

Решение однородной системы линейных уравнений



ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

**МАНЕШЕВА РИММА АХМАТОВНА
ДОЦЕНТ КАФ. ВММФ**

Однородная система линейных уравнений



- ОСЛУ всегда имеет тривиальное (нулевое) решение.
- Если ОСЛУ определенная, то существует только тривиальное решение.
- Если ОСЛУ неопределенная, то кроме тривиального существует и нетривиальное решение.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

Однородная система линейных уравнений



Пусть дана система 4-х линейных уравнений с 5-ю неизвестными.

$$\begin{cases} 2x_1 & - x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 & - x_4 + x_5 = 0 \\ -2x_2 + x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

Однородная система линейных уравнений



Шаг 1. Выпишем матрицу числовых коэффициентов и определим её ранг

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 & 9 & -5 \end{pmatrix}$$

Однородная система линейных уравнений



Шаг 2. Для определения ранга матрицы вместо 2-ой и 4-ой строк запишем следующие комбинации: $s_1 - 2s_2$; $s_1 - 2s_4$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 & 9 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 6 & -3 & -15 & 9 \end{pmatrix}$$

s_1
$s_1 - 2s_2$
s_3
$s_1 - 2s_4$

Однородная система линейных уравнений



Шаг 3. Преобразованная матрица имеет линейно-зависимы строки: 2-ю, 3-ю и 4-ю, следовательно ранг матрицы равен 2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 6 & -3 & -15 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rang} A = 2$$

$$s_4 = -3s_2$$

Однородная система линейных уравнений



Шаг 4. По теореме Кронекера-Капелли, если ранг основной матрицы меньше числа неизвестных, то система имеет множество решений, т.е. система будет неопределенной.

Однородная неопределенная система уравнений имеет фундаментальную систему решений ФСР.

ФСР состоит из $(n-R)$ линейно независимых решений, т.е. число независимых переменных равно $(n-R)$.

Любое решение можно представить в виде линейной комбинации ФСР.

Однородная система линейных уравнений



Шаг 5. Исходная система содержит 5 неизвестных, а её ранг равен 2. Следовательно число независимых (свободных) переменных равно $5-2=3$, число базисных переменных 2.

Независимыми переменными могут быть, например, x_3, x_4 и x_5 .

Базисный минор можно составить из 1-го, 2-го столбцов.

Базисные переменные x_1, x_2 .

Однородная система линейных уравнений



Шаг 6. Из 1-ого уравнения системы выразим x_1 ,
из 3-го уравнения выразим x_2 :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 0 \\ -2x_2 + x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(x_5 - x_3 - 3x_4) \\ x_2 = \frac{1}{2}(x_3 + 5x_4 - 3x_5) \end{cases}$$

Однородная система линейных уравнений



Шаг 7. Запишем общее решение системы :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 = \frac{1}{2}(x_5 - x_3 - 3x_4) \\ x_2 = \frac{1}{2}(x_3 + 5x_4 - 3x_5) \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

Однородная система линейных уравнений



Шаг 8. Однородная система имеет фундаментальную систему решений, состоящую из $(n-R)$ линейно-независимых решений. Запишем общее решение системы. Присвоим свободным неизвестным следующие произвольные значения:

$$x_3 = 1 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 0$$

$$x_3 = 0 \quad x_4 = 1 \quad x_5 = 0$$

$$x_3 = 0 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 1$$

Однородная система линейных уравнений



Шаг 9. Составим фундаментальную систему решений. Значения x_1 , x_2 вычислим исходя из общего решения (см шаг 7.):

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Однородная система линейных уравнений



Шаг 10. Запишем общее решение однородной системы как линейную комбинацию:

$$X = \lambda_1 \cdot C_1 + \lambda_2 \cdot C_2 + \lambda_3 \cdot C_3 = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$