Нахождение обратной матрицы

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

МАНЕШЕВА РИММА АХМАТОВНА
ДОЦЕНТ КАФ. ВММФ

Понятие обратной матрицы

- Матрица $\boldsymbol{A^{-1}}$ называется ***обратной*** для невырожденной матрицы A, если произведение матриц равно единичной.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Обратная матрица $\boldsymbol{A^{-1}}$ существует тогда и только тогда, когда исходная матрица $\boldsymbol{A}$ является невырожденной.

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Нахождение обратной матрицы

Пусть дана матрица 3 порядка. Найдем ей обратную.

Шаг 1. Вычислим её определитель, например методом треугольников.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot(-2)+(-2)\cdot 3\cdot 2+(-2)\cdot 0\cdot 1-$$

$$-1\cdot 1\cdot 2-(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)-3\cdot 3\cdot 0=-12$$

Нахождение обратной матрицы

Шаг 2. Найдем все миноры и алгебраические дополнения. Воспользуемся результатом из предыдущего примера (см Миноры и дополнения).

$$M_{11} = -2 \qquad A_{11} = -2$$
$$M_{12} = -2 \qquad A_{12} = 2$$
$$M_{13} = -2 \qquad A_{13} = -2$$
$$M_{21} = 4 \qquad A_{21} = -4$$
$$M_{22} = -8 \qquad A_{22} = -8$$
$$M_{23} = 4 \qquad A_{23} = -4$$
$$M_{31} = -7 \qquad A_{31} = -7$$
$$M_{32} = 11 \qquad A_{32} = -11$$
$$M_{33} = -1 \qquad A_{33} = -1$$

Нахождение обратной матрицы

<u>Шаг</u> 3. Составим союзную матрицу из вычисленных алгебраических дополнений

$$\breve{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -4 & -8 & -4 \\ -7 & -11 & -1 \end{pmatrix}$$

Нахождение обратной матрицы

<u>Шаг</u> 4. Транспонируем союзную матрицу, поменяв местами строки и столбцы

$$\breve{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -4 & -8 & -4 \\ -7 & -11 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \breve{A}^T = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -7 \\ 2 & -8 & -11 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Нахождение обратной матрицы

<u>Шаг</u> 5. Найдем обратную матрицу по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \breve{A}^{T} = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -2 & -4 & -7 \\ 2 & -8 & -11 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Нахождение обратной матрицы

Шаг 6. Проверим правильность вычислений, перемножим исходную и обратную матрицы по правилу «строка на столбец»

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

$$A^{-1} \cdot A = -\frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -4 & -7 \\ 2 & -8 & -11 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \ldots$$

Перемножение обратной матрицы на исходную

Перемножим 1-ую строку обратной матрицы на 1-ый, 2-ой и 3-ий столбцы исходной

Номер строки

Номер столбца

$$c_{11} = -\frac{1}{12} \cdot (-2 \cdot 3 - 4 \cdot (-2) - 7 \cdot 2) = 1$$

$$c_{12} = -\frac{1}{12} \cdot (-2 \cdot (-2) - 4 \cdot 1 - 7 \cdot 0) = 0$$

$$c_{13} = -\frac{1}{12} \cdot (-2 \cdot 1 - 4 \cdot 3 - 7 \cdot (-2)) = 0$$

Перемножение обратной матрицы на исходную

Перемножим 2-ую строку обратной матрицы на 1-ый, 2-ой и 3-ий столбцы исходной

$$c_{21} = -\frac{1}{12} \cdot (2 \cdot 3 - 8 \cdot (-2) - 11 \cdot 2) = 0$$

$$c_{22} = -\frac{1}{12} \cdot (2 \cdot (-2) - 8 \cdot 1 - 11 \cdot 0) = 1$$

$$c_{23} = -\frac{1}{12} \cdot (2 \cdot 1 - 8 \cdot 3 - 11 \cdot (-2)) = 0$$

Перемножение обратной матрицы на исходную

Перемножим 3-ю строку обратной матрицы на 1-ый, 2-ой и 3-ий столбцы исходной

$$c_{31} = -\frac{1}{12} \cdot (-2 \cdot 3 - 4 \cdot (-2) - 1 \cdot 2) = 0$$

$$c_{32} = -\frac{1}{12} \cdot (-2 \cdot (-2) - 4 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = 0$$

$$c_{33} = -\frac{1}{12} \cdot (-2 \cdot 1 - 4 \cdot 3 - 1 \cdot (-2)) = 1$$

Перемножение обратной матрицы на исходную

Запишем полученный результат

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$$

Следовательно все вычисления проведены верно.