

# Миноры и алгебраические дополнения



ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

МАНЕШЕВА РИММА АХМАТОВНА

ДОЦЕНТ КАФ.ВММФ

# Понятие минора матрицы



- Минором  $M_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  матрицы  $A$  порядка  $n$  называется определитель порядка  $(n-1)$ , полученный из элементов матрицы путем вычеркивания  $i$ -строки и  $j$ -столбца, на пересечении которых стоит этот элемент

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

# Понятие алгебраического дополнения матрицы



- Алгебраическим дополнением  $A_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  матрицы  $A$  порядка  $n$  называется минор этого элемента  $M_{ij}$ , взятый со знаком  $(-1)^{i+j}$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

# Вычисление миноров матрицы 3 порядка



- Пусть дана матрица 3 порядка. Необходимо вычислить все её миноры и алгебраические дополнения. Число миноров равно числу элементов матрицы. Столько же алгебраических дополнений.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

# Вычисление миноров матрицы 3 порядка



1. Найдем минор  $M_{11}$  соответствующий элементу матрицы  $a_{11}=3$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = -2$$

# Вычисление миноров матрицы 3 порядка



2. Вычислим алгебраическое дополнение  $A_{11}$  соответствующее минору  $M_{11} = -2$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 1 \cdot (-2) = -2$$

# Вычисление миноров матрицы 3 порядка



3. Найдем минор  $M_{12}$  соответствующий элементу матрицы  $a_{12} = -2$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-2) - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$$

# Вычисление миноров матрицы 3 порядка



4. Вычислим алгебраическое дополнение  $A_{12}$  соответствующее минору  $M_{12} = -2$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -1 \cdot (-2) = 2$$



# Вычисление миноров матрицы 3 порядка



5. Найдем минор  $M_{13}$  соответствующий элементу матрицы  $a_{12}=1$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot 0 - 1 \cdot 2 = 0 - 2 = -2$$

# Вычисление миноров матрицы 3 порядка



6. Вычислим алгебраическое дополнение  $A_{13}$  соответствующее минору  $M_{13} = -2$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = 1 \cdot (-2) = -2$$

# Вычисление миноров матрицы 3 порядка



7. Найдем минор  $M_{21}$  соответствующий элементу матрицы  $a_{21} = -2$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-2) - 1 \cdot 0 = 4 - 0 = 4$$

# Вычисление миноров матрицы 3 порядка



8. Вычислим алгебраическое дополнение  $A_{21}$  соответствующее минору  $M_{21}=4$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -1 \cdot (4) = -4$$

# Вычисление миноров матрицы 3 порядка



9. Найдем минор  $M_{22}$  соответствующий элементу матрицы  $a_{22}=1$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 1 \cdot 2 = -6 - 2 = -8$$

# Вычисление миноров матрицы 3 порядка



10. Вычислим алгебраическое дополнение  $A_{22}$  соответствующее минору  $M_{22} = -8$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 1 \cdot (-8) = -8$$

# Вычисление миноров матрицы 3 порядка



11. Найдем минор  $M_{23}$  соответствующий элементу матрицы  $a_{23}=3$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - (-2) \cdot 2 = 0 + 4 = 4$$

# Вычисление миноров матрицы 3 порядка



12. Вычислим алгебраическое дополнение  $A_{23}$  соответствующее минору  $M_{23}=4$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -1 \cdot 4 = -4$$



# Вычисление миноров матрицы 3 порядка



13. Найдем минор  $M_{31}$  соответствующий элементу матрицы  $a_{31}=2$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = -6 - 1 = -7$$

# Вычисление миноров матрицы 3 порядка



14. Вычислим алгебраическое дополнение  $A_{31}$  соответствующее минору  $M_{31} = -7$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = 1 \cdot (-7) = -7$$

# Вычисление миноров матрицы 3 порядка



15. Найдем минор  $M_{32}$  соответствующий элементу матрицы  $a_{32} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) = 9 + 2 = 11$$

# Вычисление миноров матрицы 3 порядка



16. Вычислим алгебраическое дополнение  $A_{32}$  соответствующее минору  $M_{32} = 11$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -1 \cdot 11 = -11$$

# Вычисление миноров матрицы 3 порядка



17. Найдем минор  $M_{33}$  соответствующий элементу матрицы  $a_{33} = -2$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2) = 3 - 4 = -1$$

# Вычисление миноров матрицы 3 порядка



18. Вычислим алгебраическое дополнение  $A_{33}$  соответствующее минору  $M_{33} = -1$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = 1 \cdot (-1) = -1$$

# Результаты вычислений



$$M_{11} = -2 \quad A_{11} = -2$$

$$M_{12} = -2 \quad A_{12} = 2$$

$$M_{13} = -2 \quad A_{13} = -2$$

$$M_{21} = 4 \quad A_{21} = -4$$

$$M_{22} = -8 \quad A_{22} = -8$$

$$M_{23} = 4 \quad A_{23} = -4$$

$$M_{31} = -7 \quad A_{31} = -7$$

$$M_{32} = 11 \quad A_{32} = -11$$

$$M_{33} = -1 \quad A_{33} = -1$$