

Решение системы линейных уравнений методом Крамера



ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

**МАНЕШЕВА РИММА АХМАТОВНА
ДОЦЕНТ КАФ. ВММФ**

Метод Крамера



- Система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение тогда и только тогда, когда определитель основной матрицы не равен нулю. При этом неизвестные находятся по формулам Крамера:

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$$

Δ – главный определитель системы

Δ_k – определитель, получаемый из главного путем замены k -столбца столбцом свободных членов

Метод Крамера



Пусть дана система 3-х линейных уравнений с 3-мя неизвестными.

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ x + 3y - z = 1 \\ 3x + 4y - z = 5 \end{cases}$$

Метод Крамера



Шаг 1. Выпишем матрицу числовых коэффициентов и свободных членов

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Метод Крамера



Шаг 2. Вычислим определитель матрицы A :

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) \cdot (-1) - \\ - 2 \cdot 3 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \cdot (-1) - 1 \cdot 4 \cdot (-1) = -5$$

Метод Крамера



Шаг 3. Составим определитель Δ_1 , заменив в матрице A 1-ый столбец матрицей B и вычислим его:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 \cdot 2 + 5 \cdot (-2) \cdot (-1) - \\ - 2 \cdot 3 \cdot 5 - 1 \cdot (-2) \cdot (-1) - 3 \cdot 4 \cdot (-1) = -11$$

Столбец B

Метод Крамера



Шаг 4. Составим определитель Δ_2 , заменив в матрице A 2-ой столбец матрицей B и вычислим его:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot (-1) - \\ - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 5 \cdot (-1) = 2$$

Столбец B

Метод Крамера



Шаг 4. Составим определитель Δ_3 , заменив в матрице A 3-ий столбец матрицей B и вычислим его:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot (-2) -$$
$$- 3 \cdot 3 \cdot 3 - 1 \cdot 5 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 \cdot 4 = 0$$

Столбец B

Метод Крамера



Шаг 5. Вычислим неизвестные:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta_A} = \frac{-11}{-5} = \frac{11}{5}$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta_A} = \frac{2}{-5} = -\frac{2}{5}$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta_A} = \frac{0}{-5} = 0$$

Метод Крамера



Шаг 6. Выполним проверку, подставив полученные результаты в исходную систему:

$$\frac{11}{5} + \frac{2 \cdot 2}{5} + 2 \cdot 0 = 3 \quad \text{верно}$$

$$\frac{11}{5} - \frac{3 \cdot 2}{5} - 0 = 1 \quad \text{верно}$$

$$\frac{3 \cdot 11}{5} - \frac{4 \cdot 2}{5} - 0 = 5 \quad \text{верно}$$