

Решение системы линейных уравнений методом Гаусса



ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

**МАНЕШЕВА РИММА АХМАТОВНА
ДОЦЕНТ КАФ. ВММФ**

Метод Гаусса



- Записывается расширенная матрица коэффициентов.
- Первая строка матрица оставляется без изменений; на 1-ое место можно поставить любую строку, но в последствии её не менять.
- Путем элементарных преобразований матрица приводится к треугольному виду.
- Последовательно вычисляются неизвестные – обратный ход Гаусса.

Метод Гаусса



Пусть дана система 3-х линейных уравнений с 3-мя неизвестными.

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ x + 3y - z = 1 \\ 3x + 4y - z = 5 \end{cases}$$

Метод Гаусса



Шаг 1. Выпишем расширенную матрицу
числовых коэффициентов и свободных членов

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \end{array} \right)$$

Метод Гаусса



Шаг 2. 1-ую и 3-ю строки оставим без изменений, вместо 2-ой строки запишем разность между 1-ой и 2-ой строками $s_1 - s_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \end{array} \right)$$

Метод Гаусса



Шаг 3. Необходимо в 3-ей строке получить ноль в 1-ом столбце, для этого 1-ую и 2-ую строки оставим без изменений, вместо 3-ей строки запишем разность $3s_1 - s_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & -10 & 7 & 4 \end{array} \right)$$

Метод Гаусса



Шаг 4. 1-ую и 2-ую строки оставим без изменений, вместо 3-ей строки запишем разность $2s_2 - s_3$ для получения нуля в 3-й строке во 2-ом столбце:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & -10 & 7 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Обратный ход Гаусса



Шаг 5. Из 3-ей строки следует следующее уравнение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow -1 \cdot z = 0 \Rightarrow z = 0$$

Числовые
коэффициенты при z

Обратный ход Гаусса



Шаг 6. Из 2-ой строки следует следующее уравнение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow -1 \cdot z = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$\rightarrow -5 \cdot y + 3 \cdot z = 2 \Rightarrow y = -\frac{2}{5}$$

Числовые
коэффициенты при y

Обратный ход Гаусса



Шаг 7. Из 1-ой строки следует следующее уравнение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow -1 \cdot z = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$\rightarrow -5 \cdot y + 3 \cdot z = 2 \Rightarrow y = -\frac{2}{5}$$

$$\rightarrow 1 \cdot x - 2 \cdot y + 2 \cdot z = 3 \Rightarrow x = \frac{11}{5}$$

Числовые
коэффициенты
при x

Метод Гаусса



Шаг 8. Запишем полученные результаты:

$$x = \frac{11}{5}$$

$$y = -\frac{2}{5}$$

$$z = 0$$

Метод Гаусса



Шаг 9. Выполним проверку, подставив полученные результаты в исходную систему:

$$\frac{11}{5} + \frac{2 \cdot 2}{5} + 2 \cdot 0 = 3 \quad \text{верно}$$

$$\frac{11}{5} - \frac{3 \cdot 2}{5} - 0 = 1 \quad \text{верно}$$

$$\frac{3 \cdot 11}{5} - \frac{4 \cdot 2}{5} - 0 = 5 \quad \text{верно}$$