

Решение матричных уравнений



ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

МАНЕШЕВА РИММА АХМАТОВНА
ДОЦЕНТ КАФ. ВММФ

Матричные уравнения



Пусть даны 3 матрицы: A , B – известные, X – неизвестная. Необходимо найти матрицу X .

Рассмотрим 1-ый вариант матричного уравнения.

$$A \cdot X = B$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Решение матричного уравнения



Пусть дана матрица A 3-го порядка и матрица B размерности 3×1 .

Для нахождения матрицы X необходимо матрицу B слева умножить на матрицу A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Решение матричного уравнения



Шаг 1. Найдем обратную матрицу, воспользуемся результатом, полученным в предыдущем примере (см. Обратная матрица).

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^{\cup T} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -7 \\ 2 & -8 & -11 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение матричного уравнения



Шаг 2. Для нахождения x_{11} перемножим 1-ую строку обратной матрицы на 1-ый и единственный столбец матрицы \mathbf{B} :

$$x_{11} = -\frac{1}{12} \cdot (-2 \cdot 4 - 4 \cdot 1 - 7 \cdot 2) = \frac{26}{12} = \frac{13}{6}$$

Решение матричного уравнения



Шаг 3. Для нахождения x_{21} перемножим 2-ую строку обратной матрицы на 1-ый и единственный столбец матрицы B :

$$x_{21} = -\frac{1}{12} \cdot (2 \cdot 4 - 8 \cdot 1 - 11 \cdot 2) = \frac{22}{12} = \frac{11}{6}$$

Решение матричного уравнения



Шаг 4. Для нахождения x_{31} перемножим 3-ую строку обратной матрицы на 1-ый и единственный столбец матрицы B :

$$x_{31} = -\frac{1}{12} \cdot (-2 \cdot 4 - 4 \cdot 1 - 1 \cdot 2) = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$$

Решение матричного уравнения



Запишем полученную матрицу X размерности 3×1

$$X = \begin{pmatrix} \frac{13}{6} \\ \frac{11}{6} \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

Решение матричного уравнения



Шаг 5. Выполним проверку, перемножив матрицу A на матрицу X , должны получить матрицу B .

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{13}{6} \\ \frac{11}{6} \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \frac{13}{6} - 2 \cdot \frac{11}{6} + 1 \cdot \frac{7}{6} \\ -2 \cdot \frac{13}{6} + 1 \cdot \frac{11}{6} + 3 \cdot \frac{7}{6} \\ 2 \cdot \frac{13}{6} + 0 \cdot \frac{11}{6} - 2 \cdot \frac{7}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Матричные уравнения



Пусть даны 3 матрицы: A , B – известные, X – неизвестная. Необходимо найти матрицу X .

Рассмотрим 2-ой вариант матричного уравнения.

$$X \cdot A = B$$

$$X \cdot A^{-1} \cdot A = B \cdot A^{-1}$$

$$X = B \cdot A^{-1}$$

Решение матричного уравнения



Пусть даны матрицы A и B 3-го порядка.

Для нахождения матрицы X необходимо матрицу B **справа** умножить на матрицу A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot A = B \rightarrow X = B \cdot A^{-1}$$

Решение матричного уравнения



Шаг 1. Найдем обратную матрицу, воспользуемся результатом, полученным в предыдущем примере (см. Обратная матрица).

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^{\cup T} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -7 \\ 2 & -8 & -11 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение матричного уравнения



Шаг 2. Для нахождения x_{11} перемножим 1-ую строку матрицы \mathbf{B} на 1-ый столбец обратной матрицы; для нахождения x_{12} перемножим 1-ую строку матрицы \mathbf{B} на 2-ой столбец обратной матрицы; для нахождения x_{13} перемножим 1-ую строку матрицы \mathbf{B} на 3-ий столбец обратной матрицы;

$$x_{11} = -\frac{1}{12} \cdot (1 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-2)) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$x_{12} = -\frac{1}{12} (1 \cdot (-4) + 1 \cdot (-8) + 2 \cdot (-4)) = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

$$x_{13} = -\frac{1}{12} (1 \cdot (-7) + 1 \cdot (-11) + 2 \cdot (-1)) = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

Решение матричного уравнения



Шаг 3. Для нахождения x_{21} перемножим 2-ую строку матрицы \mathbf{B} на 1-ый столбец обратной матрицы; для нахождения x_{22} перемножим 2-ую строку матрицы \mathbf{B} на 2-ой столбец обратной матрицы; для нахождения x_{23} перемножим 2-ую строку матрицы \mathbf{B} на 3-ий столбец обратной матрицы;

$$x_{21} = -\frac{1}{12} \cdot (1 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-2)) = -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}$$

$$x_{22} = -\frac{1}{12} (1 \cdot (-4) + 3 \cdot (-8) + 1 \cdot (-4)) = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$$

$$x_{23} = -\frac{1}{12} (1 \cdot (-7) + 3 \cdot (-11) + 1 \cdot (-1)) = \frac{41}{12}$$

Решение матричного уравнения



Шаг 4. Для нахождения x_{31} перемножим 3-ую строку матрицы B на 1-ый столбец обратной матрицы; для нахождения x_{32} перемножим 3-ую строку матрицы B на 2-ой столбец обратной матрицы; для нахождения x_{33} перемножим 3-ую строку матрицы B на 3-ий столбец обратной матрицы;

$$x_{31} = -\frac{1}{12} \cdot (2 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-2)) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$x_{32} = -\frac{1}{12} (2 \cdot (-4) + 1 \cdot (-8) + 3 \cdot (-4)) = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$$

$$x_{33} = -\frac{1}{12} (2 \cdot (-7) + 1 \cdot (-11) + 3 \cdot (-1)) = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$$

Решение матричного уравнения



Запишем полученную матрицу X размерности 3×3

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{8}{3} & \frac{41}{12} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

Решение матричного уравнения



Шаг 5. Для проверки правильности результата необходимо перемножить матрицу X на матрицу A по правилу «строка на столбец». В результате должны получить матрицу B .

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 5/3 & 5/3 \\ -1/6 & 8/3 & 41/12 \\ 2/3 & 7/3 & 7/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$