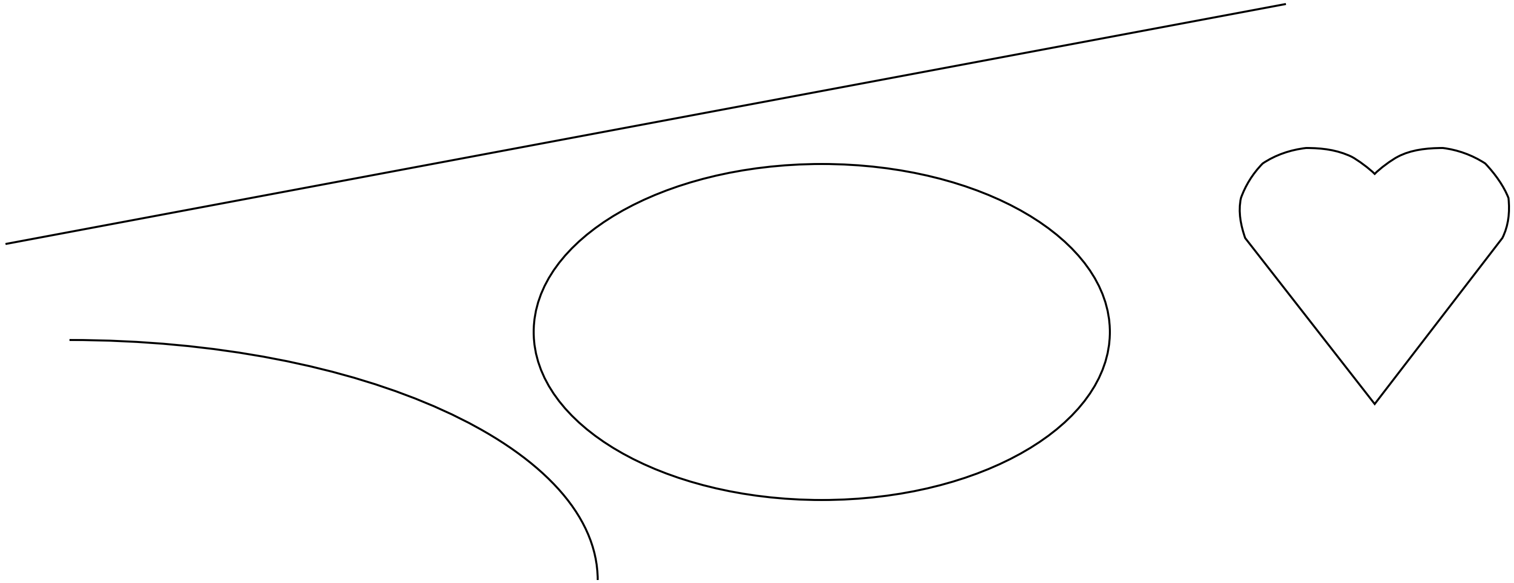
Прямая на плоскости

Аналитическая геометрия

Определение линии

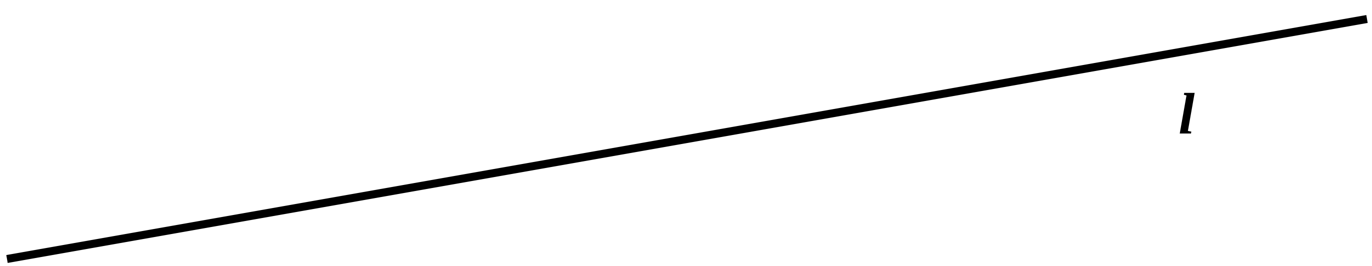
- Линией называется множество точек, координаты которых удовлетворяют алгебраическому уравнению ***n***-порядка



Прямая на плоскости

- В декартовой системе координат (ДСК) всякая прямая может быть описана уравнением 1-го порядка

Ax + By + C = 0 – *общее уравнение прямой*



Прямая задана точкой и вектором нормали

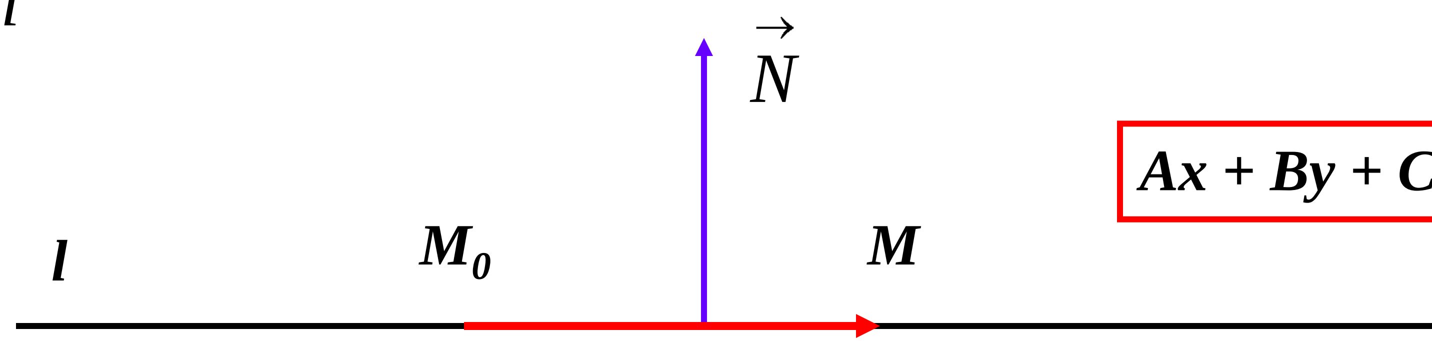
$M_0(x_0; y_0) \in l - \textit{заданная точка искомой прямой}$

$M(x; y) \in l - \textit{произвольная точка искомой прямой}$

$\vec{N} = \{A; B\} - \textit{заданный вектор нормали}$

$l - \textit{искомаяпрямая}$

$\vec{N} \perp l$



$\boxed{Ax + By + C = 0}$

Прямая задана точкой и направляющим вектором. Каноническое уравнение.

$M_0(x_0;y_0)\in l$ – *заданная точка искомой прямой*

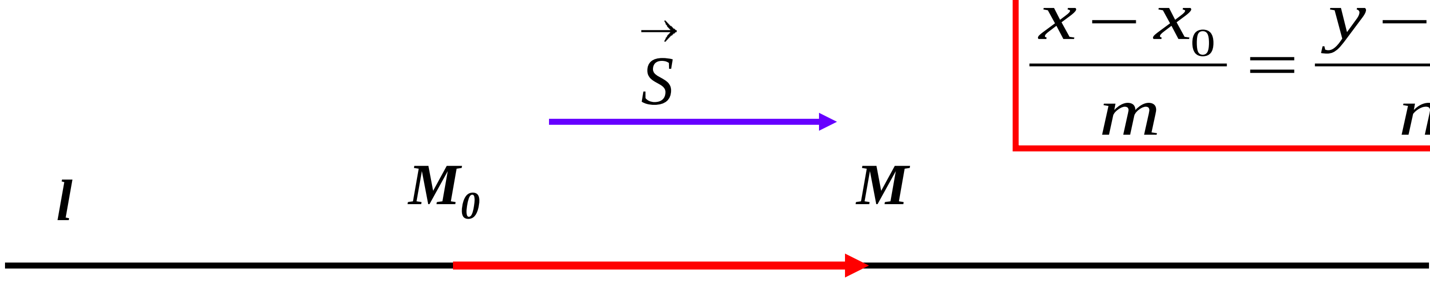
$M(x;y)\in l$ – *произвольная точка искомой прямой*

$\vec{S}=\{m;n\}$ – *заданный направляющий вектор*

l – *искомая прямая*

$\vec{S}\parallel l$

$$\boxed{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}}$$



Прямая задана двумя точками

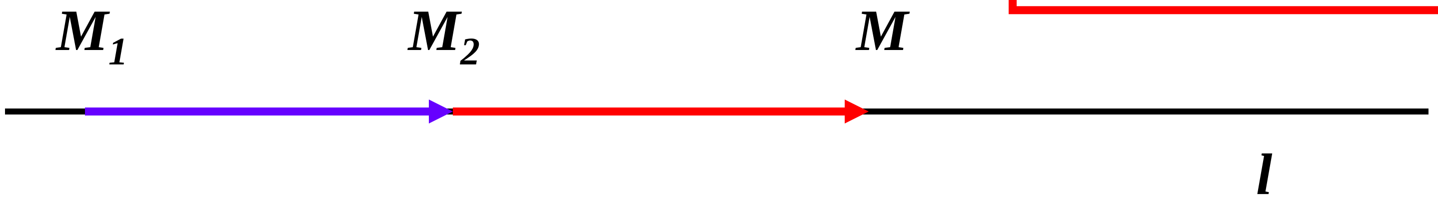
$M_1(x_1; y_1) \in l$ – *заданная точка искомой прямой*

$M_2(x_2; y_2) \in l$ – *заданная точка искомой прямой*

$M(x; y) \in l$ – *произвольная точка искомой прямой*

l – *искомая прямая*

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$$



Параметрическое уравнение прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = t$$

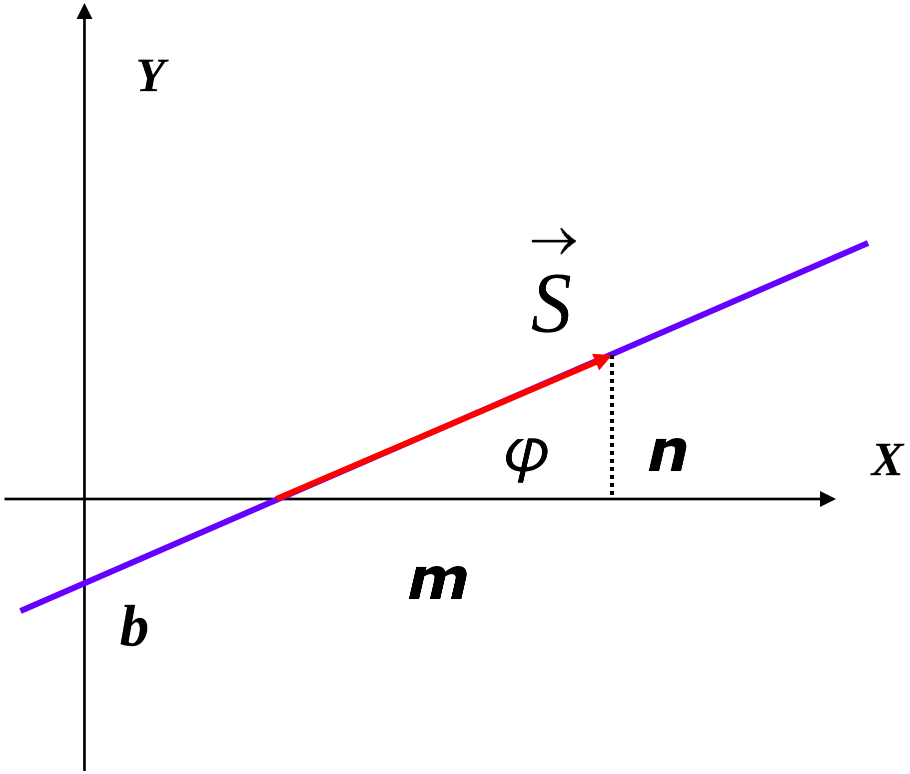
$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b$$

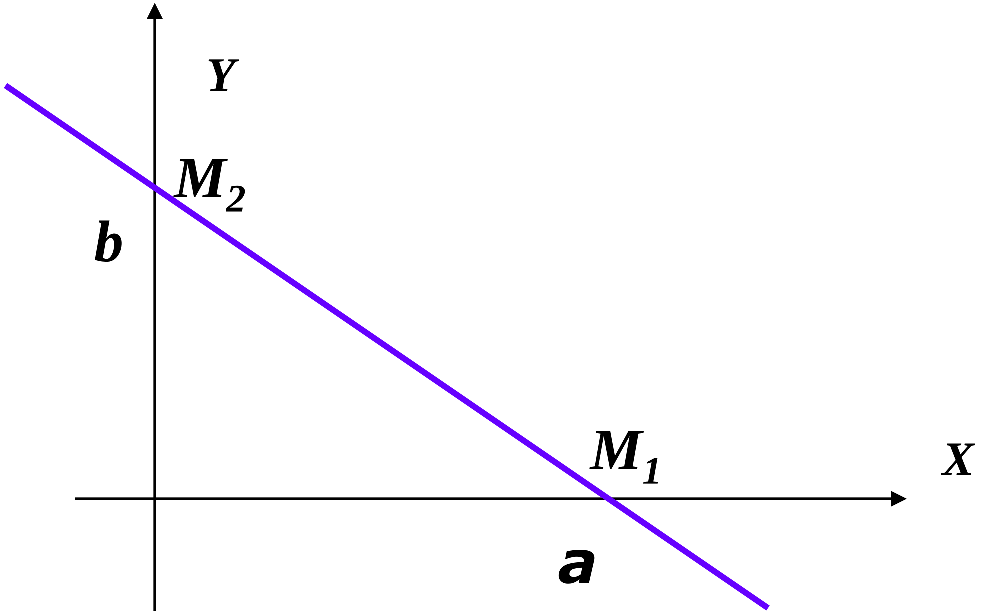
$$k = tg\varphi = \frac{n}{m}$$

$$\vec{S} = \{m; n\}$$



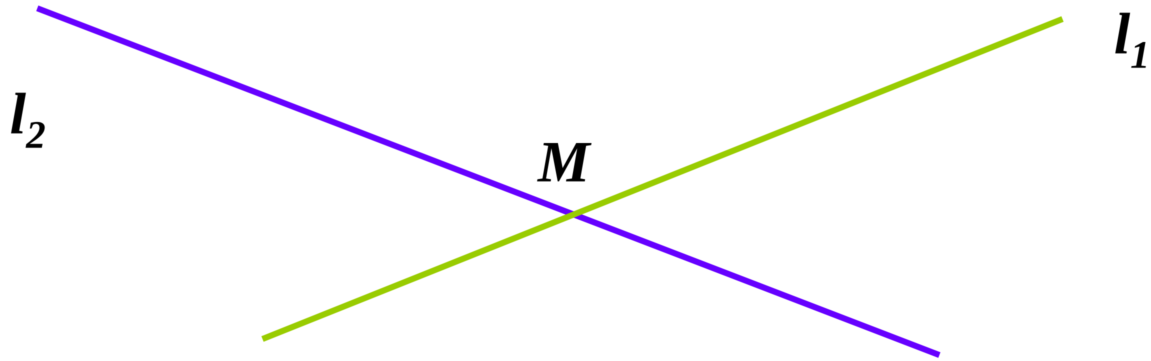
Уравнение прямой в отрезках

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$



$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

Нахождение точки пересечения 2-х прямых.



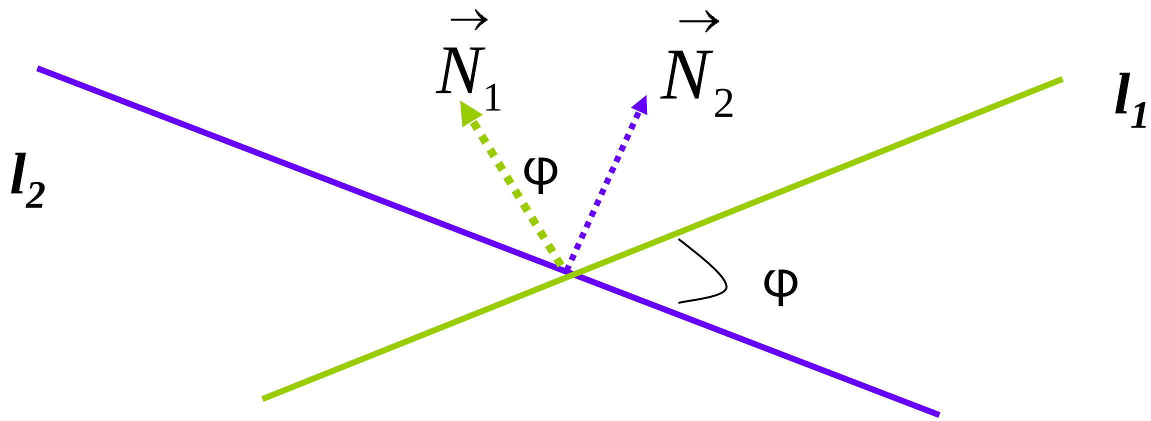
$$l_1 : Ax + By + C = 0$$

$$l_2 : Dx + Gy + F = 0$$

$$M(x_0; y_0) - искомая\ точка$$

$$M \in l_1 \quad M \in l_2$$

Нахождение угла при пересечении 2-х прямых.



$$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

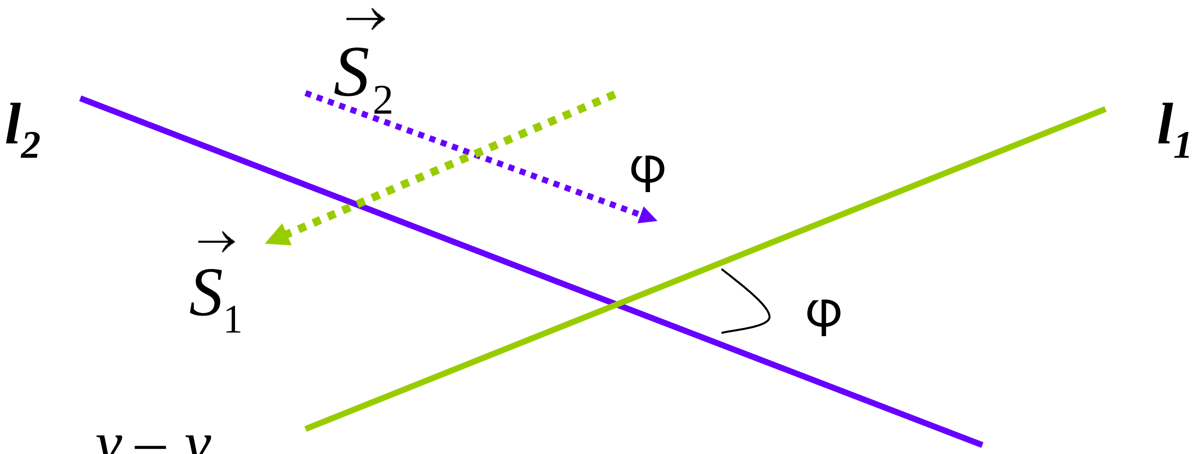
$$l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

$$\vec{N}_1(A_1; B_1) - \textit{вектор нормали } l_1$$

$$\vec{N}_2(A_2; B_2) - \textit{вектор нормали } l_2$$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}}$$

Нахождение угла при пересечении 2-х прямых.



$$l_1:\ \frac{x-x_{01}}{m_1}=\frac{y-y_{01}}{n_1}$$

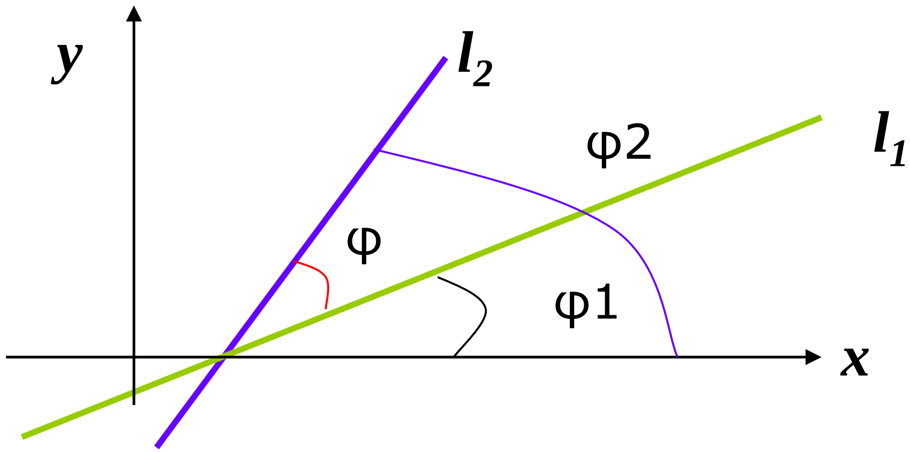
$$l_2:\ \frac{x-x_{02}}{m_2}=\frac{y-y_{02}}{n_2}$$

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2}}}$$

$\vec{S}_1(m_1;n_1)-$ *направляющий вектор* l_1

$\vec{S}_2(m_2;n_2)-$ *направляющий вектор* l_2

Нахождение угла при пересечении 2-х прямых.



$$l_1 : y = k_1 x + b_1$$

$$l_2 : y = k_2 x + b_2$$

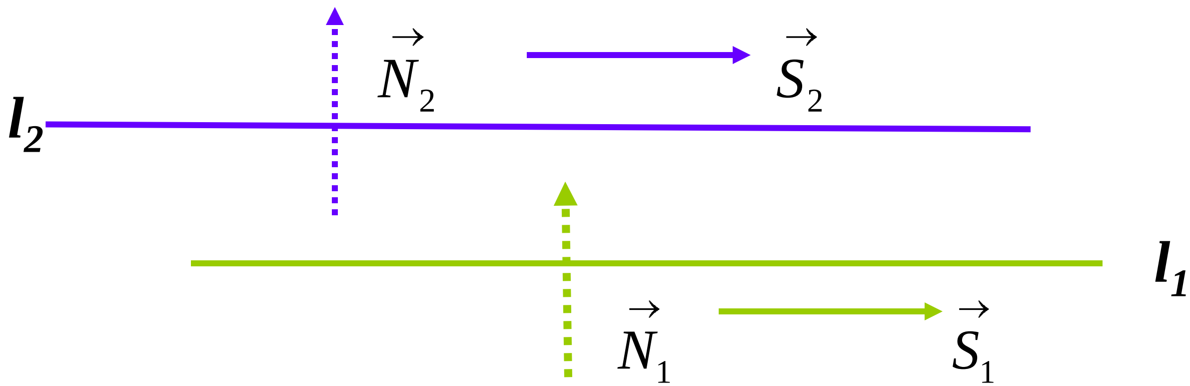
$$k_1 = tg\varphi 1 - \text{угловой коэффициент } l_1$$

$$k_2 = tg\varphi 2 - \text{угловой коэффициент } l_2$$

$$tg(\varphi 2 - \varphi 1) = \frac{tg\varphi 2 - tg\varphi 1}{1 + tg\varphi 1 \cdot tg\varphi 2}$$

$$\boxed{tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}}$$

Проверка условия параллельности.



$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$

$\vec{N}_1(A_1; B_1)$ – *вектор нормали* l_1

$\vec{S}_1(m_1; n_1)$ – *направляющий вектор* l_1

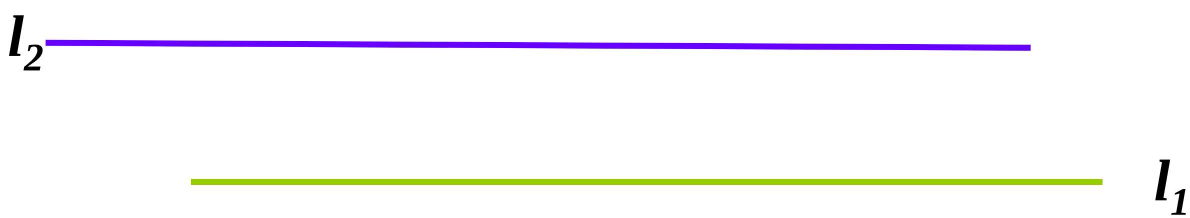
$\vec{N}_2(A_2; B_2)$ – *вектор нормали* l_2

$\vec{S}_2(m_2; n_2)$ – *направляющий вектор* l_2

$$\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2 : \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

$$\vec{S}_1 \parallel \vec{S}_2 : \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Проверка условия параллельности.



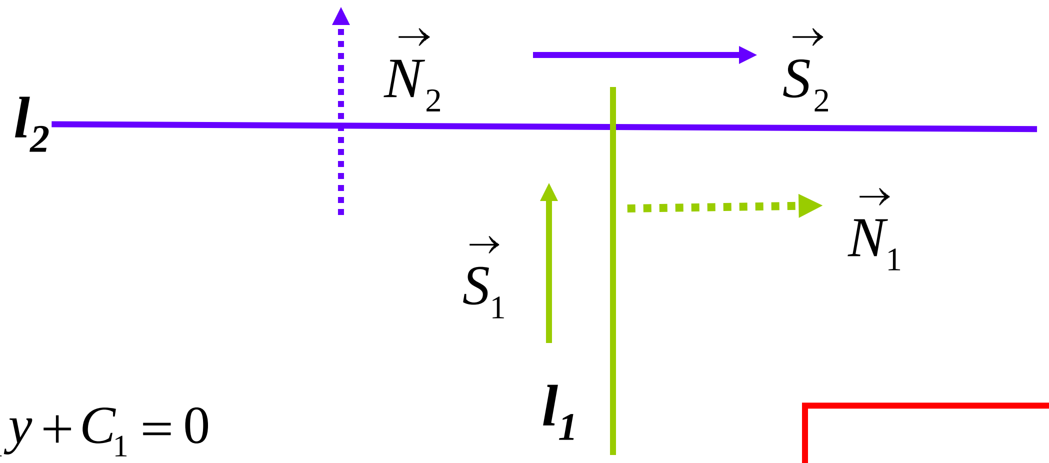
$$l_1 : y = k_1 x + b_1$$

$$l_2 : y = k_2 x + b_2$$

$$\boxed{tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \varphi = 0 \\ tg\varphi = o \Rightarrow k_1 = k_2 \end{array}}$$

Проверка условия перпендикулярности.



$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

$$\vec{N}_1(A_1; B_1) - \text{вектор нормали } l_1$$

$$\vec{S}_1(m_1; n_1) - \text{направляющий вектор } l_1$$

$$\vec{N}_2(A_2; B_2) - \text{вектор нормали } l_2$$

$$\vec{S}_2(m_2; n_2) - \text{направляющий вектор } l_2$$

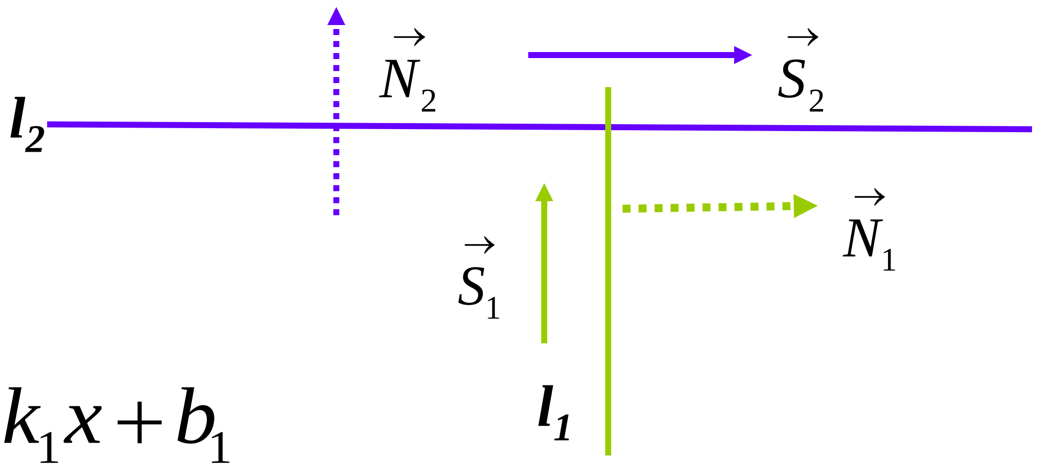
$$\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \Rightarrow (\vec{N}_1, \vec{N}_2) = 0$$

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

$$\vec{S}_1 \perp \vec{S}_2 \Rightarrow (\vec{S}_1, \vec{S}_2) = 0$$

$$m_1m_2 + n_1n_2 = 0$$

Проверка условия перпендикулярности.



$$l_1 : y = k_1 x + b_1$$

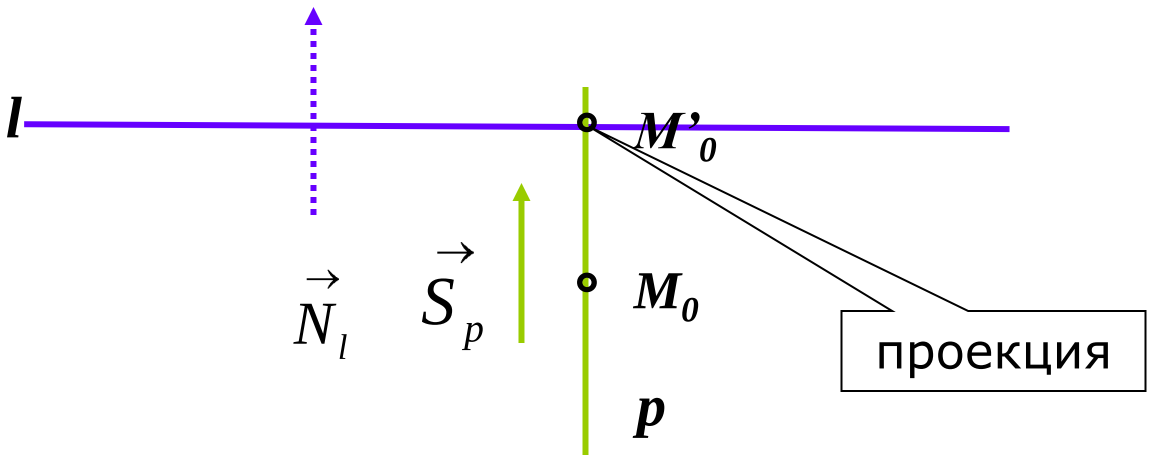
$$l_2 : y = k_2 x + b_2$$

$$\boxed{tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}}$$

$$l_1 \perp l_2 \Rightarrow \varphi = 90^0$$

$$tg90^0 = \infty \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

Нахождение проекции точки на прямую.



$l\ :\ Ax + By + C = 0 -$ *заданная прямая*

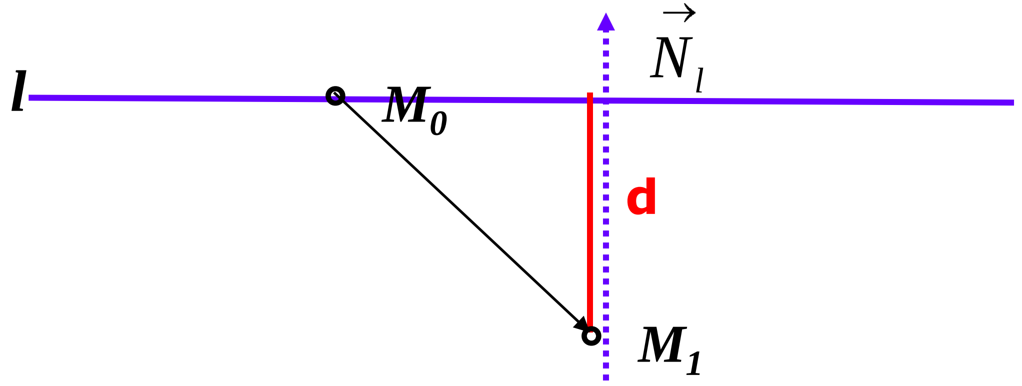
$M_0(x_0; y_0) -$ *заданная точка*

$M_0 \in p \quad M_0^{\backslash}(x; y) - ?$

$p \perp l \Rightarrow \vec{N}_l = \vec{S}_p = \{A; B\}$

$$\begin{cases} l:\ Ax + By + C = 0 \\ p:\ \dfrac{x - x_0}{A} = \dfrac{y - y_0}{B} \end{cases}$$

Нахождение расстояния от точки до прямой.



$l\ :\ Ax+By+C=0-$ *заданная прямая*

$\vec{N}_l=\{A;B\}$

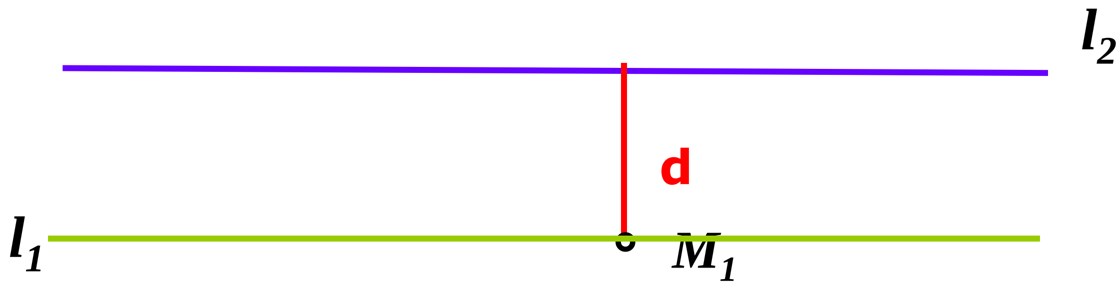
$M_0(x_0;y_0)\in l-$ *произвольная точка*

$M_1(x_1;y_1)-$ *заданная точка*

$$d=|\,Пр_{\vec{N}}(\overrightarrow{M_0M_1})\,|=\frac{|(\overrightarrow{M_0M_1},\vec{N})|}{|\vec{N}|}$$

$$\boxed{d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$$

Нахождение расстояния между параллельными прямыми.



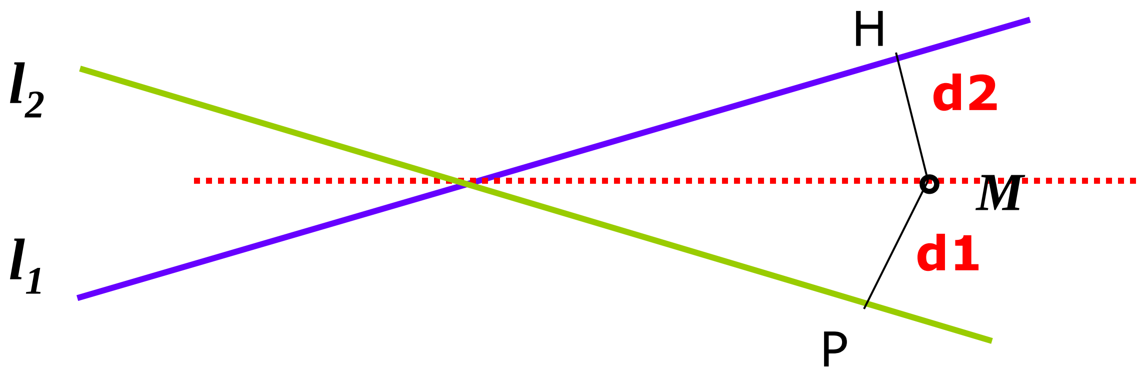
$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0 -$ *заданная прямая*

$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0 -$ *заданная прямая*

$M_1(x_1; y_1) \in l_1 -$ *произвольная точка*

$$\boxed{d = \frac{|A_2x_1 + B_2y_1 + C_2|}{\sqrt{A_2^{\ 2} + B_2^{\ 2}}}}$$

Составление биссектрис углов между прямыми.



$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0 -$ *заданная прямая*

$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0 -$ *заданная прямая*

$M(x;y) -$ *точка биссектрисы*

$|MH| = |MP|$

$$\boxed{\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}}$$