# Операции с векторами в координатной форме

Векторная алгебра

# Линейные операции

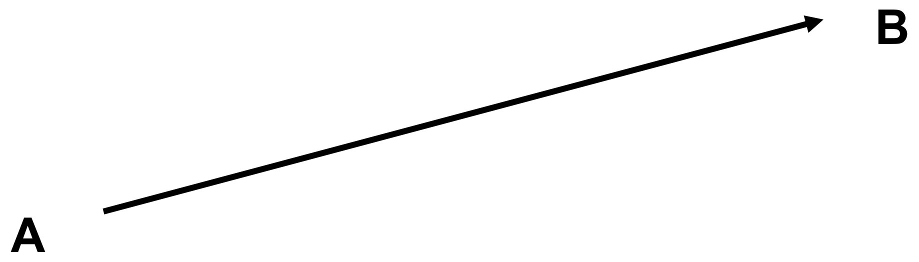
$$\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow x_1 = x_2; y_1 = y_2; z_1 = z_2$$

$$\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b} = \{x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2\}$$

$$\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} = \{\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1\}$$

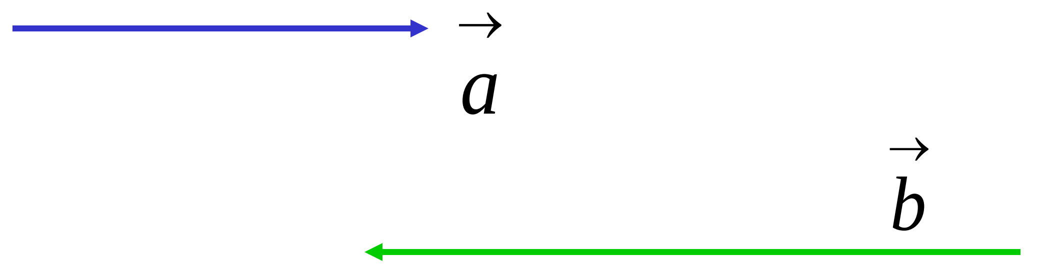
# Линейные операции




$$A = \{x_1; y_1; z_1\} \quad B = \{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

# Условие коллинеарности




$$\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

# Длина вектора. Расстояние между точками.

$\vec{a}$

B A

$$\vec{a} = \{x\,; y; z\} \quad \left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$A(x_1; y_1; z_1) \quad B(x_2; y_2; z_2)$$

$$\left|\vec{AB}\right| = \left|AB\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

# Орт вектора.

$$\vec{a}$$

$$\vec{a} = \{x\,;\, y; z\} \quad \vec{a}^{\,0} = \frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|} = \left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\}$$

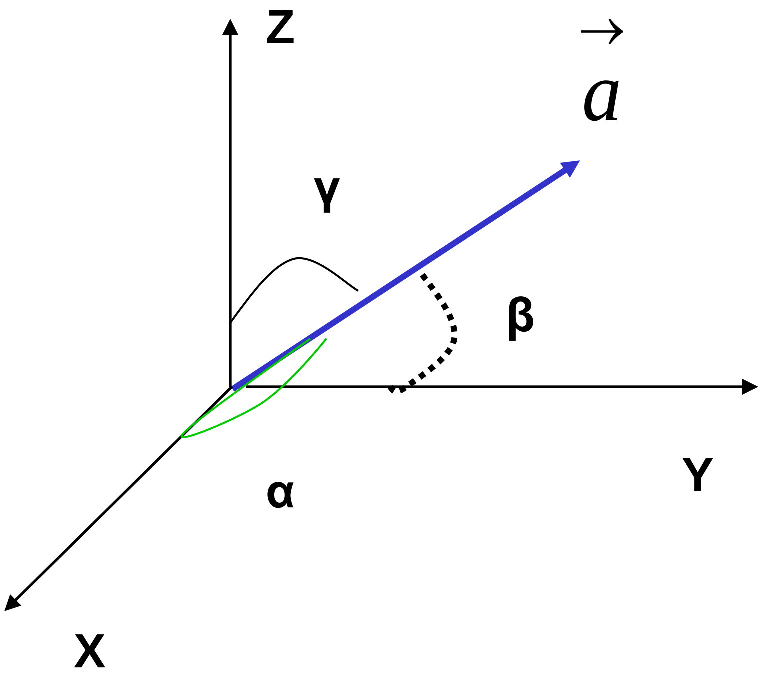
# Направляющие косинусы.

$$\vec{a} = \{x\ ; y; z\}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

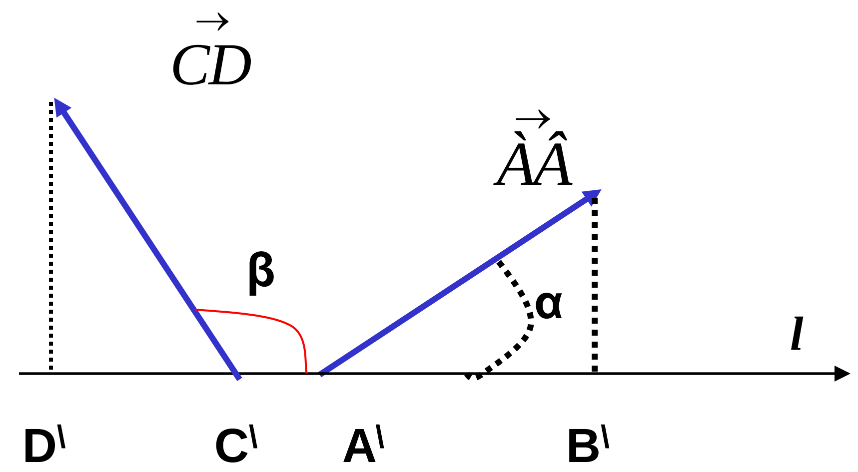
$$\cos\beta = \frac{y}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$



# Проекция вектора на ось.

Проекцией вектора на ось называется длина направленного отрезка на этой оси, взятая со знаком (+), если направление с осью совпадают, и со знаком (-), если направления противоположные.




$$A^{\backslash}B^{\backslash} = Пр_l\,\vec{AB} = \left|\vec{AB}\right| \cdot \cos\alpha > 0$$

$$C^{\backslash}D^{\backslash} = Пр_l\,\vec{CD} = \left|\vec{CD}\right| \cdot \cos\beta < 0$$

# Свойства проекции.

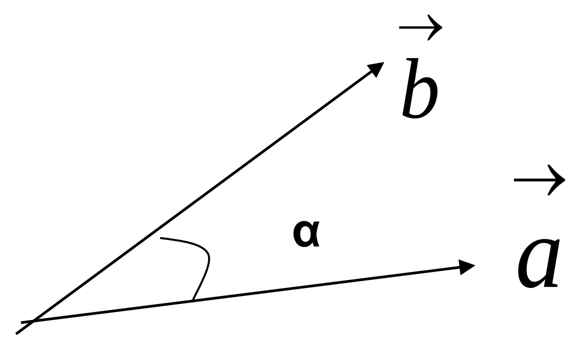
$$\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \textit{Пр}_l \, \vec{a} = \textit{Пр}_l \, \vec{b}$$

$$\textit{Пр}_l (\vec{a} + \vec{b}) = \textit{Пр}_l \, \vec{a} + \textit{Пр}_l \, \vec{b}$$

$$\textit{Пр}_l (\lambda \vec{a}) = \lambda \textit{Пр}_l \, \vec{a}$$

# Скалярное произведение векторов. Определение.

- ***Скалярным произведение*** 2-х векторов называется ***число (скаляр),*** равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.




$$\boxed{(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha}$$

# Свойства скалярного произведения.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \text{ если } \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \text{ если } \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$$

$$(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b})$$

$$(\vec{a} \pm \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \pm 2 \cdot (\vec{a}, \vec{b}) + \vec{b}^2$$

# Скалярное произведение в координатной форме.

$$\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\} \; \vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

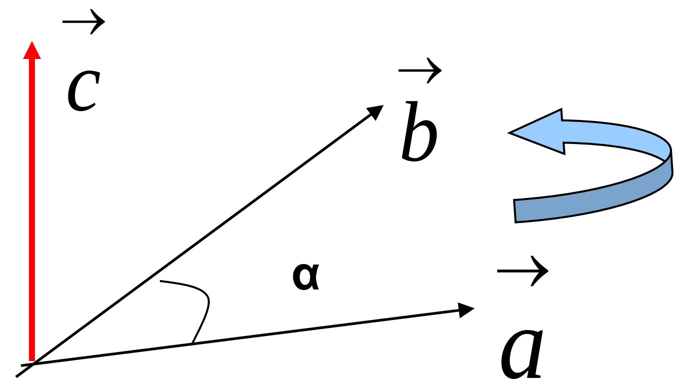
$$\cos\alpha = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\text{Пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

# Векторное произведение векторов. Определение.

- ***Векторным произведение***

2-х векторов называется ***вектор,*** длина которого равна произведению длин этих векторов на синус угла между ними. При этом результирующий вектор перпендикулярен перемножаемым.




$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\alpha$$

$$\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$$

# Свойства векторного произведения.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = 0 \ \textit{если} \ \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \ \textit{если} \ \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$[\vec{a}, \vec{a}] = 0$$

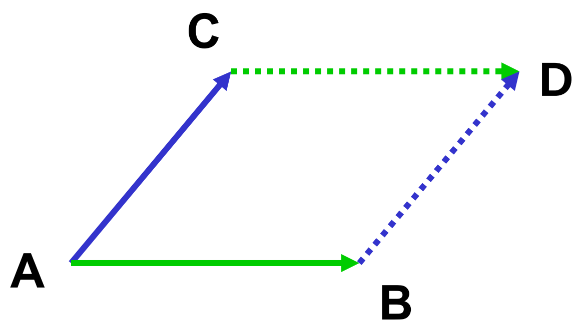
$$[\lambda \vec{a}, \vec{b}] = \lambda [\vec{a}, \vec{b}]$$

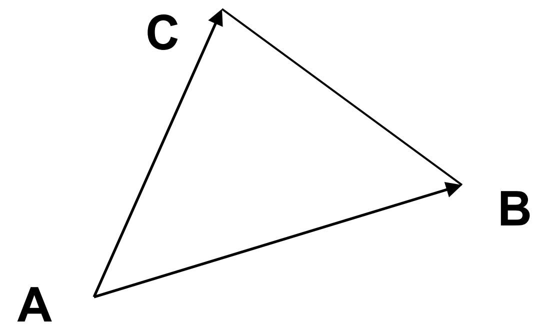
# Векторное произведение в координатной форме.

$$\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

# Приложение векторного произведения.




$$S_{параллелограмма} = |[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\alpha$$

$$S_{треугольника} = \frac{1}{2} |[\vec{a}, \vec{b}]| = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\alpha$$

# Смешанное произведение векторов.

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = ([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$$

$$([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}) = ([\vec{b},\vec{c}],\vec{a}) = ([\vec{c},\vec{a}],\vec{b})$$

$$([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}) = -([\vec{b},\vec{a}],\vec{c}) = -([\vec{c},\vec{b}],\vec{a}) = -([\vec{a},\vec{c}],\vec{b})$$

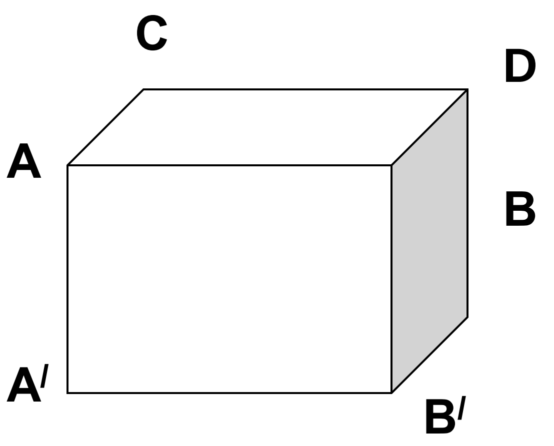
$$([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}) = 0 \ \textit{если} \ \vec{a},\vec{b},\vec{c} - \textit{компланарные}$$

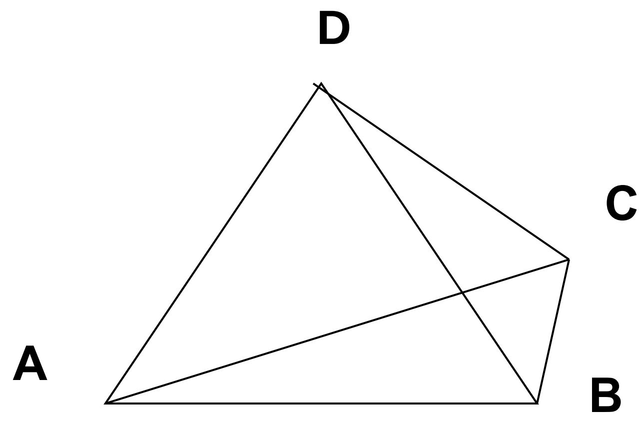
# Смешанное произведение в координатной форме.

$$\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\} \; \vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\} \; \vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

# Приложение смешанного произведения.




$$V_{параллелепипеда} = |([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})|$$

$$V_{пирамиды} = \frac{1}{6}|([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})|$$