7.1.1. Индивидуальные задания

<u>Пример варианта индивидуальных заданий.</u>

Линейная алгебра

---

1. Вычислить определители

$$a)\ \begin{vmatrix} 12 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} -7 & -3 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Найти матрицу **X** из уравнения. Сделать проверку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 11 & -15 \\ 2 & -8 & 3 \\ 11 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Решить системы линейных уравнений:
a) методом Крамера, b) матричным методом

$$a)\ \begin{cases} 3x + 4y - 2z = 26 \\ x - y + 3z = -2 \\ 3x - 3y + 5z = -2 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x + 5y - z = 5 \\ 3x + 8y + z = 7 \\ 4x - 6y + z = 10 \end{cases}$$

4. Решить системы методом Гаусса

$$a)\ \begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

5. Найти собственные значения и собственные векторы матриц.

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \qquad b)\ B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Векторная алгебра

1. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$, в которой $|AB|=6$, $|AD|=2$, $\alpha=\angle BAD=60^\circ$, $\vec{m}$ – единичный вектор в направлении основания AB, $\vec{n}$ – единичный вектор в направлении стороны AD. Разложить векторы сторон $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ и векторы диагоналей трапеции $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ по векторам $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

2. Определить координаты точек C и D, лежащих на прямой, проходящей через точки A и B, если $A(2;-3;1)$, $B(-2;2;-4)$ и $|AC|:|AD|:|AB|=0,5:2:1$

3. В треугольнике с вершинами $A(-1;2;4)$, $B(2;0;-3)$, $C(4;-1;2)$.
Найти: a) вектор медианы AM,
b) вектор высоты BD,
c) любой по модулю вектор биссектрисы угла C.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$:
$A(3;0;-3)$, $B(-8;2;0)$, $C(0;3;-4)$. Определить:
a) координаты четвертой вершины D,
b) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB,
c) косинус острого угла между диагоналями AC и BD.

5. Параллелограмм построен на векторах $\vec{a}=\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}-\vec{q}$, где $|\vec{p}|=1$, $|\vec{q}|=2$, $(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q})=\pi/3$. Определить:
a) косинус тупого угла между диагоналями;
b) длину высоты, опущенной на сторону $\vec{a}$.

6. Найти единичный вектор $\vec{e}$, который одновременно перпендикулярен векторам $\vec{a}=\{1;2;3\}$ и $\vec{b}=\{0;1;-2\}$, если $(\vec{e}\,\hat{}\,\vec{i})\geq\pi/2$.

7. В пирамиде $ABCD$ с вершинами в точках
$$A(4;4;5),\ B(-5;-3;2),\ C(-2;-6;-3),\ D(-2;2;-1)$$
найти объем и длину высоты, опущенной на грань ABC.

8. Доказать, что векторы $\vec{p}=\{1;4;1\}$, $\vec{q}=\{-3;-2;0\}$, $\vec{r}=\{1;-1;2\}$ образуют базис и найти разложение вектора $\vec{x}=\{-5;-8;-3\}$ в этом базисе.

1. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(-7;5)$:

a) параллельно прямой $3x+2y-1=0$,

b) перпендикулярно прямой $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+4}{2}$,

c) под углом 45^0 к прямой $\begin{cases} x=3t+4 \\ y=-t-2 \end{cases}$

2. Даны вершины треугольника $A(-1;3)$, $B(2;5)$, $C(0;6)$.

Составить: a) уравнение стороны AC,

b) уравнение медианы BM,

c) уравнение высоты CH и найти ее длину.

3. Даны две прямые $l_1 : y=2x-1$, $l_2 : \begin{cases} x=3t-1 \\ y=-4 \end{cases}$ Найти:

a) точку пересечения прямых,

b) косинус угла между прямыми,

c) составить уравнение биссектрисы тупого угла между прямыми.

4. Привести уравнения линий к каноническому виду и построить:

1) $x^2+y^2-x-y-1=0$ 2) $4x^2+8x+y^2-4y+1=0$

3) $y=9+2\sqrt{x^2+4x+9}$ 4) $x=8+8y-y^2$

5) $25x^2-14xy+25y^2=10$ 6) $x^2-8xy+y^2+1=0$

5. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой одинаково удалена от точки $M(-2;1)$ и от прямой $x-4=0$.

6. Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах:

$$1)\ \rho=1+\frac{1}{\varphi},\qquad 2)\ \rho=\frac{1}{\sin\varphi},\qquad 3)\ \rho=\frac{1}{1-2\cos\varphi}.$$

7. Построить линии, заданные параметрическими уравнениями:

$$1)\ \begin{cases} x=2\cos t \\ y=-4\sin t \end{cases}\qquad 2)\ \begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=e^{-t} \end{cases}$$

8. Построить фигуру, ограниченную линиями

$$1)\ \left|\begin{array}{l} y=x^2, \\ y-x=2. \end{array}\right.\qquad 2)\ \left|\begin{array}{l} \rho=2\cos\varphi, \\ \rho=2\sin\varphi. \end{array}\right.$$

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3;-2;4)$ параллельно двум векторам $\vec{a}_1 = \{6;1;-1\}$, $\vec{a}_2 = \{3;2;-2\}$ Найти расстояние от начала координат до этой плоскости и объем пирамиды, отсекаемой плоскостью от координатного угла.

2. Из общих уравнений прямой

$$\begin{cases} 3x+4y+3z+1=0 \\ 2x-4y-2z+4=0 \end{cases}$$

получить ее канонические и параметрические уравнения. Определить расстояние от начала координат до прямой.

3. Найти точку пересечения и угол между прямой

$$\begin{cases} x=2t+3 \\ y=t-2 \\ z=t+3 \end{cases} \quad \text{и плоскостью} \quad 2x-6y+14z=0.$$

Составить уравнение проекции данной прямой на эту плоскость.

4. Даны вершины треугольной пирамиды

$A(4;4;5)$, $B(-5;-3;2)$, $C(-2;-6;-3)$, $D(-2;2;1)$.

Составить уравнение грани ABC и уравнение высоты DH, опущенной на эту грань. Найти объем пирамиды.

5. Построить поверхности

$$\begin{array}{ll} 1)\ x^2+z^2=2z & 2)\ x^2+y^2=(z-2)^2 \\ 3)\ z=-(\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}) & 4)\ y^2-4y+z=0 \\ 5)\ x^2+y^2+z^2+2x=0 & 6)\ z=3+\sqrt{2-x} \end{array}$$

6. Построить тело, ограниченное поверхностями

$$1)\ \left|\begin{array}{l} z=x^2, \\ x+y=6, \\ y=2x \\ z=0. \end{array}\right. \qquad 2)\ \left|\begin{array}{l} x^2+y^2=4z^2, \\ x^2+y^2=2z \\ x=0,\quad y=0, \\ (x>0,\quad y>0) \end{array}\right.$$