КАФЕДРА
В М М Ф

Л.И.ТЕРЕХИНА
И.И.ФИКС

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Сборник индивидуальных домашних заданий

для студентов 1-го и 2-го курсов
химических специальностей ФТФ

Томск 2009

УДК 511

Высшая математика. Сборник индивидуальных домашних заданий.Вариант 1. для студентов 1-го и 2-го курсов химических специальностей ТПУ. /Сост. Л.И.Терехина, И.И.Фикс.–Томск: каф. ВММФ ТПУ, 2009,–40с.

Полный сборник состоит из 14-ти индивидуальных заданий по 25 вариантов в каждом и содержит основные типовые примеры и задачи по всем темам курса высшей математики для технических университетов. К каждой теме приведены теоретические вопросы для самоконтроля.

Содержание сборника индивидуальных домашних заданий отвечает действующим образовательным стандартам базового технического образования и может быть использован студентами всех технических специальностей ТПУ..

Рассмотрено и рекомендовано к использованию в учебном процессе методическим семинаром кафедры высшей математики и математической физики ТПУ " 26 " апреля 2009 г.

Зав. каф. ВММФ, проф.,
доктор физ.-мат.наук А.Ю. Трифонов

Линейная алгебра

1. Вычислить определители

$$a)\ \begin{vmatrix} 12 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 20 \qquad b)\ \begin{vmatrix} -7 & -3 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

2. Найти матрицу **X** из уравнения. Сделать проверку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 11 & -15 \\ 2 & -8 & 3 \\ 11 & 7 & 0 \end{pmatrix}. \qquad X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

3. Решить системы линейных уравнений:
a) методом Крамера, b) матричным методом

$$a)\ \begin{cases} 3x + 4y - 2z = 26 \\ x - y + 3z = -2 \\ 3x - 3y + 5z = -2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}. \qquad b)\ \begin{cases} x + 5y - z = 5 \\ 3x + 8y + z = 7 \\ 4x - 6y + z = 10 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

4. Решить системы методом Гаусса

$$a)\ \begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$b)\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$c)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

5. Найти собственные значения и собственные векторы матриц.

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \qquad b)\ B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ЗАДАНИЕ N 2 Вариант 21

Векторная алгебра

1. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$, в которой $|AB| = 6$, $|AD| = 2$, $\alpha = \angle BAD = 60°$, $\vec{m}$ – единичный вектор в направлении основания AB, $\vec{n}$ – единичный вектор в направлении стороны AD. Разложить векторы сторон $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ и векторы диагоналей трапеции $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ по векторам $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

2. Определить координаты точек C и D, лежащих на прямой, проходящей через точки A и B, если $A(2;-3;1)$, $B(-2;2;-4)$ и
$|AC| : |AD| : |AB| = 0,5 : 2 : 1$

3. В треугольнике с вершинами $A(-1;2;4)$, $B(2;0;-3)$, $C(4;-1;2)$.
Найти: a) вектор медианы AM,
b) вектор высоты BD,
c) любой по модулю вектор биссектрисы угла C.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$:
$A(3;0;-3)$, $B(-8;2;0)$, $C(0;3;-4)$. Определить:
a) координаты четвертой вершины D,
b) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB,
c) косинус острого угла между диагоналями AC и BD.

5. Параллелограмм построен на векторах $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}$, где $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q}) = \pi/3$. Определить:
a) косинус тупого угла между диагоналями;
b) длину высоты, опущенной на сторону $\vec{a}$.

6. Найти единичный вектор $\vec{e}$, который одновременно перпендикулярен векторам $\vec{a} = \{1;2;3\}$ и $\vec{b} = \{0;1;-2\}$, если $(\vec{e}\,\hat{}\,\vec{i}) \geq \pi/2$.

7. В пирамиде $ABCD$ с вершинами в точках
$A(4;4;5)$, $B(-5;-3;2)$, $C(-2;-6;-3)$, $D(-2;2;-1)$
найти объем и длину высоты, опущенной на грань ABC.

8. Доказать, что векторы $\vec{p} = \{1;4;1\}$, $\vec{q} = \{-3;-2;0\}$, $\vec{r} = \{1;-1;2\}$ образуют базис и найти разложение вектора $\vec{x} = \{-5;-8;-3\}$ в этом базисе.

9. Средствами векторной алгебры найти кратчайшее расстояние между прямыми AB и CD, если
$A(1;4;-5)$, $B(-2;3;2)$, $C(-3;2;-4)$, $D(0;2;-1)$

ЗАДАНИЕ N 3 Вариант 21

Аналитическая геометрия на плоскости

---

1. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(-7;5)$:
a) параллельно прямой $3x+2y-1=0$,
b) перпендикулярно прямой $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+4}{2}$,
c) под углом 45^0 к прямой $\begin{cases} x=3t+4 \\ y=-t-2 \end{cases}$

2. Даны вершины треугольника $A(-1;3)$, $B(2;5)$, $C(0;6)$.
Составить: a) уравнение стороны AC,
b) уравнение медианы BM,
c) уравнение высоты CH и найти ее длину.

3. Даны две прямые $l_1: y=2x-1$, $l_2: \begin{cases} x=3t-1 \\ y=-4 \end{cases}$ Найти:
a) точку пересечения прямых,
b) косинус угла между прямыми,
c) составить уравнение биссектрисы тупого угла между прямыми.

4. Привести уравнения линий к каноническому виду и построить:

1) $x^2+y^2-x-y-1=0$ 2) $4x^2+8x+y^2-4y+1=0$
3) $y=9+2\sqrt{x^2+4x+9}$ 4) $x=8+8y-y^2$
5) $25x^2-14xy+25y^2=10$ 6) $x^2-8xy+y^2+1=0$

5. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой одинаково удалена от точки $M(-2;1)$ и от прямой $x-4=0$.

6. Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах:

1) $\rho=1+\dfrac{1}{\varphi}$, 2) $\rho=\dfrac{1}{\sin\varphi}$, 3) $\rho=\dfrac{1}{1-2\cos\varphi}$.

7. Построить линии, заданные параметрическими уравнениями:

1) $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=-4\sin t \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=e^{-t} \end{cases}$

8. Построить фигуру, ограниченную линиями

1) $\left| \begin{array}{l} y=x^2, \\ y-x=2. \end{array} \right.$ 2) $\left| \begin{array}{l} \rho=2\cos\varphi, \\ \rho=2\sin\varphi. \end{array} \right.$

ЗАДАНИЕ N 4 Вариант 21

Аналитическая геометрия в пространстве

---

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3;-2;4)$ параллельно двум векторам $\vec{a}_1=\{6;1;-1\}$, $\vec{a}_2=\{3;2;-2\}$ Найти расстояние от начала координат до этой плоскости и объем пирамиды, отсекаемой плоскостью от координатного угла.

2. Из общих уравнений прямой

$$\begin{cases} 3x+4y+3z+1=0 \\ 2x-4y-2z+4=0 \end{cases}$$

получить ее канонические и параметрические уравнения. Определить расстояние от начала координат до прямой.

3. Найти точку пересечения и угол между прямой

$$\begin{cases} x=2t+3 \\ y=t-2 \\ z=t+3 \end{cases} \quad \text{и плоскостью} \quad 2x-6y+14z=0.$$

Составить уравнение проекции данной прямой на эту плоскость.

4. Даны вершины треугольной пирамиды
$A(4;4;5)$, $B(-5;-3;2)$, $C(-2;-6;-3)$, $D(-2;2;1)$.
Составить уравнение грани ABC и уравнение высоты DH, опущенной на эту грань. Найти объем пирамиды.

5. Построить поверхности

$$\begin{array}{ll} 1)\ x^2+z^2=2z & 2)\ x^2+y^2=(z-2)^2 \\ 3)\ z=-(\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}) & 4)\ y^2-4y+z=0 \\ 5)\ x^2+y^2+z^2+2x=0 & 6)\ z=3+\sqrt{2-x} \end{array}$$

6. Построить тело, ограниченное поверхностями

$$1)\ \left|\begin{array}{l} z=x^2, \\ x+y=6, \\ y=2x \\ z=0. \end{array}\right. \qquad 2)\ \left|\begin{array}{l} x^2+y^2=4z^2, \\ x^2+y^2=2z \\ x=0,\ \ y=0, \\ (x>0,\ \ y>0) \end{array}\right.$$

Задание N 5 Вариант 21

Предел. Непрерывность

1. Найти пределы

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n-1}-\sqrt[3]{64n^3+3n}}{\sqrt[4]{n}+n}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^2+n+1}{(3n^2-1)^2-(3n^2+1)^2}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\arcsin(5x/7)}-1}{1-\cos\sqrt{x}}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2-3n+2}-2n\right)$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)!\,n}{(n+1)!-n!}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9^n-7^{n-1}}{3\cdot 7^n+4\cdot 9^{n+1}}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^3+3x-2}{(5x-4)(2x+1)^2}-3^{\frac{1}{x+2}}\right]$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2}$

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x-4}{x^2-x}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x(e^x-1)}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{5\ \mathrm{arctg}\ (x/3)}$

13. $\lim\limits_{x\to 0.5}\dfrac{\cos(\pi x)}{2x-1}$

14. $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{1}{\sin 3x}}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+6}{3x+11}\right)^{\frac{7}{x+3}}$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+5}{2n-6}\right)^{\frac{n}{6}+1}$

2. Сравнить две бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to 0$, если

1) $\alpha(x)=x^2\sin x,\qquad \beta(x)=x\ \arcsin^2 2x$
2) $\alpha(x)=e^{\cos 3x}-e,\qquad \beta(x)=\mathrm{arctgx}$

3. Для данных бесконечно малых при $x\to x_0$ величин записать эквивалентнные в виде $A(x-x_0)^k$

1. $\ln(1-\sqrt[5]{x^2\cdot \mathrm{tg}\ \sqrt{x}}),\quad x_0=0$

2. $1-\cos\dfrac{3x}{7},\quad x_0=0$

3. $\sin^2\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right),\quad x_0=-\dfrac{\pi}{6}$

4. $\dfrac{(x^3-4x)^2}{3x+5},\quad x_0=2$

4. Исследовать на непрерывность функции

1. $y=\dfrac{x^2+3}{x^2-1}$

2. $y=1-5^{\frac{1}{7-x}}$

3. $y=\begin{cases}-2x, & x<-1\\ (x-1)^2, & -1\le x\le 4\\ \sqrt{8+2x}, & x>4\end{cases}$

Задание N 6 Вариант 21

Производные

---

1. Найти производные $y'(x)$ данных функций

1) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^4+5x}}{2} + \dfrac{1}{\sqrt[5]{3x^2}}$

2) $y = x^3 \cdot \mathrm{arctg}\ \dfrac{1}{x^2} + 3^{\frac{\cos x}{\ln x}}$

3) $y = \dfrac{1-e^x}{\sqrt{\sin 2x}} + (1+2x)^2 \cdot e^{-x^3}$

4) $y = \sin^5(x - \mathrm{tg}\ 2x)$

5) $y = \dfrac{1+\mathrm{ch}^2 x}{1-\mathrm{sh} 4x}$

6) $y = \sqrt[5]{\arccos x} - \dfrac{x}{(x^2-1)^3}$

7) $y = \ln\sqrt{\dfrac{(1-\sin 4x)^5}{1+\mathrm{tg}\ x}}$

8) $y = \dfrac{\ln^3(x-1)\cdot\sqrt[5]{2x}}{(5x+1)^4\cdot\sqrt{\cos^3 x}}$

9) $y = (\cos 3x)^{x^2-1}$

10) $y = (\ln 2x)^{\mathrm{arctg}\ 4x}$

11) $\begin{cases} x = \dfrac{2-t}{2+t^2} \\ y = \dfrac{t^2}{2+t^2} \end{cases}$

12) $\begin{cases} x = t\cdot\sqrt{t^2+1} \\ y = \ln(t+\sqrt{t^2+1}) \end{cases}$

13) $4y = \cos(x+y) + \sqrt{x^2+y^2}$

14) $x\cdot y + \ln y - 2\ln x = \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt[3]{x}}$

2. Найти вторую производную y'' функции

1) $y = \ln\mathrm{tg}\ x - \mathrm{arctg}\ 2x$

2) $\begin{cases} x = 5^{\ln t} \\ y = \ln^5 t \end{cases}$

3. Вычислить значение производной функции в точке

1) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x_0 = 0$

2) $\begin{cases} x = t\ (t\cos t - 2\sin t) \\ y = t\ (t\sin t + 2\cos t) \end{cases} \qquad t_0 = \dfrac{\pi}{4}$

4. Найти первый dy и второй d^2y дифференциалы функции

1) $y = \dfrac{1}{\mathrm{ctg}\ (2x-1)}$

2) $y = \ln\sin 5x$

5 Доказать, что функция $y = \dfrac{\sin x}{x}$
удовлетворяет уравнению $xy' + y = \cos x$

Задание N 7 Вариант 21

Приложения производной

1. Исследовать на экстремум функции

$$1)\ \ y=\frac{x^3}{2(x+1)^2} \qquad 2)\ \ y=x^{2/3}-(x^2-1)^{1/3}$$

$$3)\ \ y=e^{2x-x^2}$$

2. Составить уравнения всех асимптот следующих кривых

$$1)\ \ y=\sqrt[3]{1-x^3} \qquad 2)\ \ y=\frac{x^2-6x+3}{x-3}$$

$$3)\ \ y=x-2\ln x$$

3. Провести полное исследование и построить графики функций

$$1)\ \ y=\frac{4x}{x^2+4} \qquad 2)\ \ y=\sqrt[3]{(2-x)(x^2-4x+1)}$$

$$3)\ \ y=\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}$$

4. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой $x=x_o$, или соответствующей значению параметра $t=t_o$

$$1)\ \ y=\frac{1}{4}(x^2-2x-3) \qquad x_0=4$$

$$2)\ \ \begin{cases} x=2\cos t \\ y=\sin t \end{cases} \qquad t_0=-\pi/3$$

5. В круг радиуса R вписан равнобедренный треугольник. При каком соотношении сторон треугольник будет иметь наибольшую площадь.

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=x^2+\frac{16}{x}-16 \quad \text{в интервале} \quad [1;\ 4]$$

7. Используя правило Лопиталя, найти пределы

$$1)\ \ \lim_{x\to\pi/3}\frac{8\cos^3 x-1}{x/2-\pi/6} \qquad 2)\ \ \lim_{x\to\infty}\frac{xe^{x/2}}{x+e^x}$$

$$3)\ \ \lim_{x\to 0}(\mathrm{tg}\ x)^{\mathrm{tg}\ 2x}$$

Задание N 8 Вариант 21

Функции многих переменных

---

1. Найти и изобразить области определения функций:

$$1)\ \ z = 2y - x + \sqrt{4x^2 - y^2} \qquad 2)\ \ z = \arcsin(1 - y) + \sqrt{x - y^2}$$

2. Найти частные производные z'_x и z'_y функций

$$1)\ \ z = \arcsin\frac{y}{x}\cdot\arccos\frac{\sqrt{x}}{y} \qquad 2)\ \ z = y^3\cdot\sqrt{x} - \frac{4-y}{\sqrt[3]{y^7}}$$

$$3)\ \ z = \frac{\sin x^3 y^2}{x - \ln y} + \operatorname{tg}\ \ln(x^2 - 1/y) \quad 4)\ \ z = \sqrt{2x - 3y}\cdot e^{x-y}$$

3. Найти частные производные z'_x и z'_y сложной функции

$$z = \operatorname{ctg}\frac{u}{v},\ \ \text{где}\ \ u = \cos\sqrt{y^2 - x},\ \ v = \frac{3}{\ln(x - y^2)}$$

4. Найти производную z'_t, если

$$z = \ln\cos(x^3 - y),\ \ \text{где}\ \ x = 5^{3t-2},\quad y = \frac{4}{t}$$

5. Найти производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$, если

$$z = 3^{x-y} + \frac{3x - y^{\ln x}}{3},\quad \text{где}\quad y = 1 - e^{2\sqrt{x}}$$

6. Найти производную y' неявной функции $y(x)$, заданной выражением

$$1)\ \ e^{x^2+1} - ye^{xy^3-7y} + 2x\ln y = 9$$
$$2)\ \ 2^{4x+y} - y\cos xy - x = 0$$

7. Найти частные производные z'_x и z'_y неявной функции $z(x,y)$, заданной выражением $\quad (\operatorname{ctg}\ x)^z = 2 - \operatorname{arctg}^5\dfrac{x^2 z}{z - 5y}$

8. Найти первый dz и второй d^2z дифференциалы функции $\quad z = 3^{x\sqrt{y}}$

9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^3 + 12yz - 3xy^2 + y^3 + z^2 - 44 = 0$ в точке $M_0(-1; 2; 1)$

10. Исследовать на экстремум функцию $\quad z = x^2 + y^2 - 2x - 4\sqrt{xy} - 2y$

ЗАДАНИЕ N 9 Вариант 21

Неопределенный интеграл

1. $\int \frac{\sin x}{7+3\cos^2 x}\,dx$

2. $\int \frac{x+\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}\,dx$

3. $\int \frac{\sqrt{1-3\ln x}}{x}\,dx$

4. $\int \frac{5^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$

6. $\int \frac{81^x-3^x}{9^x}\,dx$

7. $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{4x}-5}$

8. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx$

9. $\int e^x\left(2-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right)\,dx$

10. $\int (3-2x)^7\,dx$

11. $\int \operatorname{arctg}\,x\,dx$

12. $\int (3x-5)\cos x\,dx$

13. $\int x^2\cdot e^{-3x}\,dx$

14. $\int (x+2)\cdot\ln^2 x\,dx$

15. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$

16. $\int \sin(\ln x)\,dx$

17. $\int \frac{dx}{x^2+3x+5}$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x-7}}$

19. $\int \frac{(x-8)\,dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$

20. $\int \frac{(3x-1)\,dx}{4x^2-4x+7}$

21. $\int \frac{3x^3+x^2+5x+1}{x^3+x}\,dx$

22. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$

23. $\int \frac{(x+2)dx}{x^3-2x^2+2x}$

24. $\int \frac{x^2-x}{(x+3)^3}\,dx$

25. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$

26. $\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx$

27. $\int \frac{(x+2)^2}{\sqrt{x-1}}\,dx$

28. $\int \sqrt[3]{x}\left(1-\sqrt[3]{x}\right)^3\,dx$

29. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

30. $\int \frac{dx}{x^4\cdot\sqrt{1+x^2}}$

31. $\int \frac{dx}{\cos^3 x\,\sin^3 x}$

32. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x-5\sin^2 x}$

33. $\int \sin 5x\cos 3x\,dx$

34. $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$

35. $\int \cos^4\frac{x}{3}\,dx$

36. $\int \frac{dx}{4+5\sin x}$

37. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$

38. $\int \frac{dx}{e^x+3}$

ЗАДАНИЕ N 10 Вариант 21

Определенный интеграл

1. Вычислить определённые интегралы

1) $\int\limits_0^1 \frac{2^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$ 2) $\int\limits_{-1}^3 \ln(2x^2+3)\,dx$ 3) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2+2}}$

4) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x}\,dx$ 5) $\int\limits_2^3 \frac{x+2}{x^2(x+1)}\,dx$ 6) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x^2\,\sqrt{9+x^2}}$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

1) $y=\cos^3 x,\quad [0;\ \pi/4],$ 2) $y=\frac{1}{\sqrt[5]{3-4x}},\quad [-3/4;\ 0]$

3. Оценить значения интегралов

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ 2) $\int\limits_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}}$

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

1) $\int\limits_0^\infty x\ \sin x\,dx$ 2) $\int\limits_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x\ dx}{\sqrt{(1-\sin 3x)^5}}$

3) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{2x^6+3x^2+5}}$ 4) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

1) $\left|\begin{array}{l} y=x^2, \\ y-x=2. \end{array}\right.$ 2) $\left|\begin{array}{l} \rho=\cos\varphi, \\ \rho=2\cos\varphi. \end{array}\right.$ 3) $\left|\begin{array}{l} x=9(t-\sin t), \\ y=9(1-\cos t), \\ y=0, \quad 0\le t\le 2\pi. \end{array}\right.$

6. Найти объёмы тел, образованных вращением фигур, ограниченных указанными линиями: 1) – вокруг оси OX, 2) – вокруг оси OY :

1) $\left|\begin{array}{l} x=\sqrt[3]{y-2}, \\ y=1, \quad x=1. \end{array}\right.$ 2) $\left|\begin{array}{l} x=2\cos t, \\ y=3\sin t. \end{array}\right.$

7. Вычислить длины дуг линий

1) $L:\ \left|\begin{array}{l} y=1-\ln(\cos x), \\ 0\le x\le \pi/6. \end{array}\right.$ 2) $L:\ \left|\begin{array}{l} y=2(\cos t+t\ \sin t), \\ x=2(\sin t-t\ \cos t), \quad 0\le t\le \pi. \end{array}\right.$

8. Определить работу, затрачиваемую на перенос электрического заряда q из бесконечности в точку $A(0;1)$ электрического поля заряда Q, сосредоточенного в начале координат.

ЗАДАНИЕ N 11 Вариант 21

Дифференциальные уравнения и системы

1. Найти общие решения уравнений первого порядка

1) $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{\sin(y/x)}$.
2) $y' + y\cos x = \cos x$.
3) $y' + y = x\sqrt{y}$.
4) $\dfrac{e^{-x^2}dy}{x} + \dfrac{dx}{\cos^2 y} = 0$.
5) $(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 4y^3)\,dy = 0$.
6) $2(4y^2 + 4y - x)\,y' = 1$.

2. Найти частные решения уравнений

1) $\sqrt{y^2+1}\,dx = x\,y\,dy$, $y(1) = 0$.
2) $(x-y)\,dx + (x+y)\,dy = 0$, $y(1) = 1$.
3) $xy' - 2y = 2x^4$, $y(1) = 0$.
4) $y' + xy = (1+x)\,e^{-x}\cdot y^2$, $y(0) = 1$.

3. Найти решения уравнений высшего порядка

1) $2xy'y'' = y'^2 - 1$.
2) $y'' = y'\,e^y$, $\begin{matrix} y(0) = 0, \\ y'(0) = 1 \end{matrix}$.
3) $y''\cos^2 x = 1$.
4) $y'' + y' = \cos x$.
5) $y'' + y = \dfrac{2+\cos^3 x}{\cos^2 x}$.
6) $y'' + 2y' + y = x\,e^x + \dfrac{1}{x\,e^x}$.
7) $y'' + 2y' + y = (12x - 10)\,e^{-x}$.
8) $y'' - 3y' = 2\sin 3x - \cos 3x$.
9) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x}$.
10) $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2$.
11) $x^2\,y'' + xy' + y = 0$,
12) $x^2\,y'' - 6y = 12\ln x$.

13) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = -8e^{-t}\,\sin 2t$, $x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = 6$.
14) $\ddot{x} - 6\dot{x} + 25x = 9\sin 4t - 24\cos 4t$, $x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = -2$.

4. Найти решения линейных систем

1) $\begin{cases} \dot{x} = -8x + 4y \\ \dot{y} = 3x - 4y \end{cases}$.
2) $\begin{cases} \dot{x} = 6x + 5y \\ \dot{y} = -x + 2y \end{cases}$, $\begin{matrix} x(0) = 0 \\ y(0) = 1. \end{matrix}$

3) $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 2y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$.
4) $\begin{cases} \dot{x} = 6x + 4y + 2t \\ \dot{y} = -x + 10y - 1 \end{cases}$.

ЗАДАНИЕ N 12 Вариант 21

Числовые и функциональные ряды.

---

1. Найти суммы числовых рядов

$$1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n} \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-7n-12} \qquad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{(n+2)(n+4)}$$

2. Исследовать ряды на сходимость

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2} \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos^2\frac{\pi n}{3}}{n^2+2^n}$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt[3]{n-1}} \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^{2n}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)$$

$$5)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n+4}{7n+5}\right)^{-n^2} \qquad 6)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt[5]{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$7)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n/3)\ln^2(n+7)} \qquad 8)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{2^{n+1}\cdot n!}$$

3. Найти интервалы сходимости функциональных рядов

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^2+1} \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-5)^n}{n3^n}$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n(x-2)}$$

4. Найти суммы функциональных рядов

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)x^n \qquad 2)\ \sum_{n=0}^{\infty}(n^2+5n+3)x^n$$

5. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-x_0)$ функции

$$1)\ y=\ln\left(\sqrt{1+5x}\cdot(1-2x)\right),\quad x_0=0, \qquad 2)\ y=\frac{\mathrm{ch}3x-1}{x^2},\quad x_0=0$$

$$3)\ y=x\cdot e^{2x}\quad x_0=3, \qquad 4)\ y=\sqrt[5]{x}\quad x_0=-1.$$

6. Вычислить интегралы с точностью до 0,001

$$1)\ \int_0^{0{,}1}\sin 8x^2\,dx \qquad 2)\ \int_0^{0{,}5}\frac{1}{\sqrt[3]{27+x^3}}\,dx$$

ЗАДАНИЕ N 13 Вариант 21

Комплексные числа и функции

---

1. Даны числа $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = 2 + 2i$. Вычислить:

1) $2z_1 - 3z_2$, 2) $(z_2)^2$, 3) $\dfrac{\overline{z}_1 - z_2}{z_2}$, 4) $\dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2}$,

5) $\sqrt[3]{z_1^2 z_2}$, 6) $\ln z_1$, 7) $\cos z_2$, 8) $\operatorname{sh} \overline{z}_1$.

Результаты вычислений представить в показательной и алгебраической формах.

2. Определить и построить на комплексной плоскости семейства линий, заданных уравнениями

$$1)\ \operatorname{Im} \frac{1}{z+i} = C, \qquad 2)\ \operatorname{Re} z^2 = C.$$

3. Решить уравнения

$$1)\ \sin z + \cos z = 1, \qquad 2)\ i \cdot e^{2z} = 2 - 2i$$

4. На комплексной плоскости заштриховать области, в которых при отображении функцией $f(z) = \dfrac{2z+3i}{iz+4}$ имеет место

a) сжатие $k \le 1$;

b) поворот на угол $0 \le \alpha \le 90^o$.

5. Доказать, что функция $v(x;y) = x^2 - y^2$ может служить мнимой частью аналитической функции $f(z) = u + iv$ и найти ее.

6. Вычислить интегралы

$$1)\ \int\limits_{(L)} \frac{dz}{\sqrt{z}}, \quad \text{где} \quad L : \{\ |\, z \,| = 1,\ \ \operatorname{Im} z < 0\ \};$$

$$2)\ \int\limits_{(L)} (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z)\, dz, \text{где} \quad \text{L} - \text{ломаная } (0;\ 1;\ 1+2i).$$

7. Вычислить, используя интегральную формулу Коши

$$\oint\limits_{(L)} \frac{z^2\, dz}{(z-1)^2(z+1)} \qquad \text{где } (L) : \begin{cases} 1)\ \ |z-1| = 1/2; \\ 2)\ \ |z+1| = 1/2; \\ 3)\ \ |z| = 2 \end{cases}$$

1. В первой коробке 5 белых и 3 черных шара, во второй коробке 3 белых и 7 черных шаров. Из первой коробки во вторую наугад переложено 4 шара, а затем из второй коробки извлекают 2 шара. Какова вероятность, что оба они белые?

2. В круг радиуса 0,1 м. вписан равносторонний треугольник. В круг наудачу вбрасывается 5 точек. Какова вероятность того, что:

1) 4 точки попадут внутрь треугольника;
2) не менее 2-х точек попадут внутрь треугольника.

3. Изделие проверяется на стандартность одним из двух товароведов. Вероятность того, что изделие попадет к первому товароведу, равна 0.55, а ко второму – 0.45. Вероятность того, что стандартное изделие будет признано стандартным первым товароведом, равна 0.9, а вторым – 0.98. Стандартное изделие при проверке было признано стандартным. Найти вероятность того, что это изделие проверил второй товаровед.

4. Среднее число пасмурных дней в году в данной местности равно 78. Найти вероятность того, что в ближайшую неделю будет не более 3-х пасмурных дней. (Считать, что в году ровно 52 недели).

5. Автобусы городского маршрута подходят к данной остановке с интервалом 10 минут. Какова вероятность, что некто, подошедший к остановке в случайный момент времени будет ждать автобус не более 6 минут ?

6. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ a(x-2)(x-4), & 2 \le x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

Требуется:

1) найти значение параметра "a,"
2) найти функцию распределения $F(x)$,
3) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$,
4) вычислить $M(X)$, $D(X)$, и $\sigma(X)$,
5) вычислить вероятность $P\ (2.5 < X < 3.5)$.

7. Даны распределения двух независимых дискретных случайных величин X и Y .

x_i	-3	1	4	7
p_{x_i}	0.2	0.25	0.45	0.1

y_i	-2	0	1	2
p_{y_i}	0.25	0.35	0.25	0.15

Найти : 1) $M(X);\ M(Y);\ D(X);\ D(Y);\ \sigma(X);\ \sigma(Y);$
2) $M(X+Y);\ D(X+Y);\ \sigma(X+Y);$
3) $M(4X+2Y);\ D(4X+2Y);\ \sigma(4X+2Y).$

8. По данным корреляционной таблицы значений $x_i; y_i$ случайных величин X и Y

a) нанести точки $(x_i; y_i)$ на координатную плоскость и соединить их ломаной,

b) подобрать функциональную зависимость $y = f(x)$, наиболее хорошо описывающую данную корреляционную. Линеаризовать, если требуется, эту зависимость, используя новые переменные,

c) составить уравнение линии регрессии и определить коэффициент корреляции. Оценить тесноту связи между величинами X и Y.

1)

x_i	9	11	13	15	17	19	21	23
y_i	6,78	4,81	3,90	2,70	1,75	0,85	–0,10	–1,20

2)

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	2,32	3,01	3,27	3,79	3,90	4,15	4,35	4,52

9. Проводился подсчет количества автомобилей проезжающих мимо поста ГАИ в течении 1-ой случайно выбранной минуты (случайная величина X). Таких наблюдений проведено 30, результаты наблюдений приведены в таблице. Сколько, в среднем, автомобилей проедет мимо поста ГАИ за неделю?

$$N = \begin{cases} 6 & 6 & 2 & 1 & 3 & 4 & 4 & 2 & 4 & 5 & 4 & 3 & 6 & 1 & 5 \\ 5 & 4 & 6 & 5 & 3 & 2 & 6 & 1 & 1 & 3 & 5 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{cases}$$

10. В результате проведенных случайных измерений абсолютных значений тока (I A) в электрической цепи получены следующие значения:

$$I = \begin{cases} 0,23 & 0,98 & 1,22 & 2,03 & 2,78 & 2,89 & 2,98 & 3.76 & 4,15 & 4,73 \\ 5,25 & 5,33 & 5,67 & 5,89 & 6,17 & 6,89 & 6,97 & 8,34 & 9,76 & 9,76 \end{cases}$$

Определить среднюю мощность тока в цепи, если ее активное сопротивление составляет 5 Ом.

11. По условиям задач 9 и 10

a) составить статистическую таблицу распределения относительных частот случайной величины,

b) построить полигон и гистограмму распределения.

12. Дана статистическая таблица распределения частот в случайной выборке.

a) Построить полигон и гистограмму распределения.

b) Найти величины средней выборочной $\overline{x}$ и выборочную дисперсию s^2.

c) Записать теоретический закон распределения. Найти теоретические значения вероятностей и сравнить их с величинами относительных частот.

d) Использовать критерий Пирсона для установления правдоподобности выбранной гипотезы о законе распределения.

1)

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	15	7	6	8	11	10	11	9	12	11

(использовать закон равномерного распределения)

2)

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	3	7	10	17	18	21	11	5	7	3

(использовать закон распределения Пуассона)

3)

x_i	[0;2]	[2;4]	[4;6]	[6;8]	[8;10]	[10;12]	[12;14]	[14;16]
n_i	1	3	4	7	12	10	8	5

(использовать закон нормального распределения)

13. Для нормально распределенной случайной величины (табл.3, задача 12) определите доверительный интервал, в который с надежностью $p = 0,95$ попадает истинное значение (математическое ожидание) случайной величины.

14. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью 0.95, зная выборочную среднюю $\overline{x} = 75.17$, объем выборки $n = 36$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma = 6$.