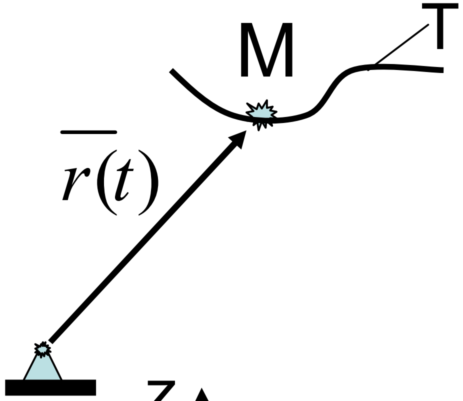
Кинематика точки и А.Т.Т.

§1. Способы задания движения точки

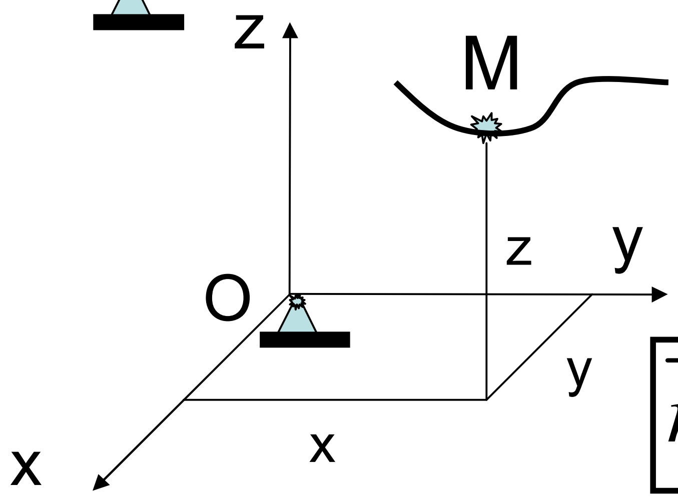
1. Векторный.

$$\boxed{\bar{r} = \bar{r}(t)} \quad (1.1)$$



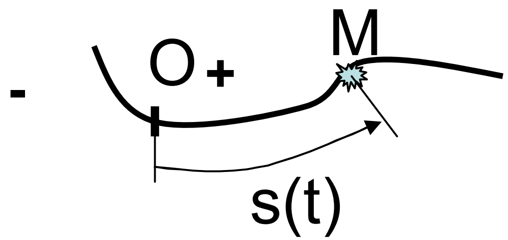
2.Координатный

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x(t); \\ y &= y(t); \\ z &= z(t). \end{aligned}} \quad (1.2)$$



$$\boxed{\overline{r(t)} = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}} \quad (1.3)$$

3.Естественный.



$$\boxed{s=s(t)} \quad (1.4)$$

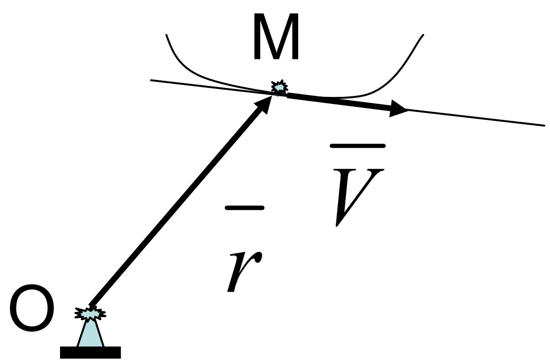
Закон движения точки по траектории.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$\boxed{s(t) = \pm\int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\;dt} \quad (1.5)$$

$\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ -точка сверху означает полную производную по времени.

§ 2.Скорость точки в декартовых координатах



$$\boxed{\overline{V} = \frac{d\overline{r}}{dt}.} \qquad (2.1)$$

$$\overline{V} = \dot{x}\overline{i} + \dot{y}\overline{j} + \dot{z}\overline{k}$$

$$V_x = \dot{x}; \quad V_y = \dot{y}; \quad V_z = \dot{z};$$

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}; \quad \cos(\overline{i}, \overline{V}) = \frac{\dot{x}}{V}. \qquad (2.2)$$

§ 3.Ускорение точки в декартовых координатах

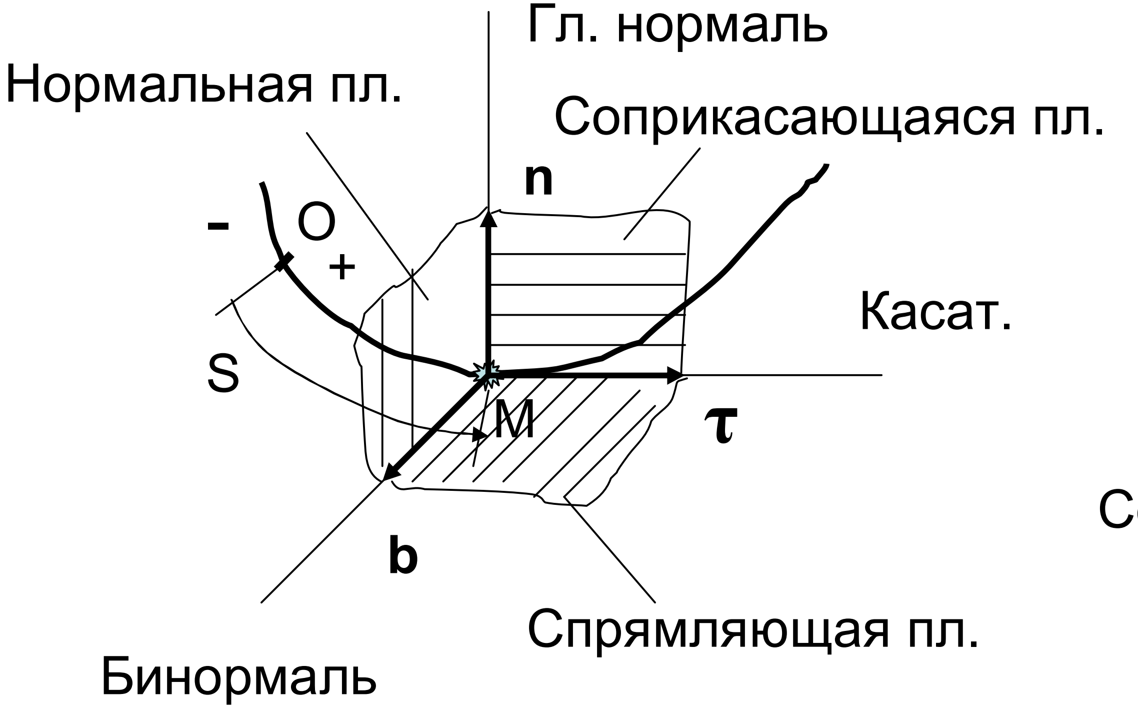
$$\boxed{\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}} \qquad (3.1)$$

$$\bar{a} = \dot{V}_x \bar{i} + \dot{V}_y \bar{j} + \dot{V}_z \bar{k} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k}.$$

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}; \quad a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}; \quad a_z = \dot{V}_z = \ddot{z};$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}; \qquad \cos(\bar{i}, \bar{a}) = \frac{\ddot{x}}{a}. \qquad (3.2)$$

§ 4. Естественная система координат (Е.С.К.)



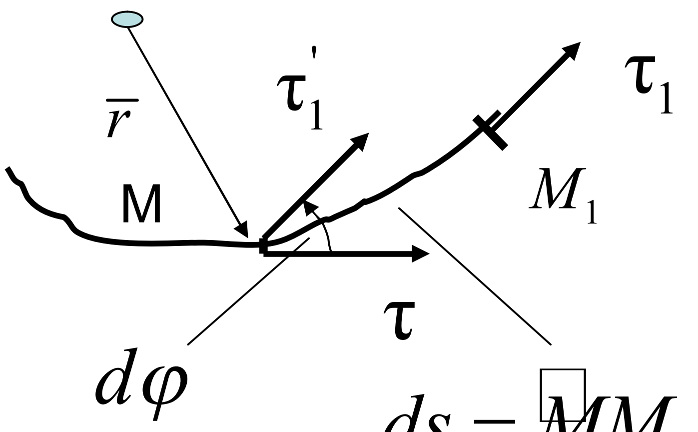
b=[τ,n]=τ×n.

Векторное произведение

$$\lim_{M_1 \to M} пл.(\tau, \tau_1') =$$

Соприкасающаяся пл.

$$\frac{d\varphi}{ds} = K = \frac{1}{\rho}.$$



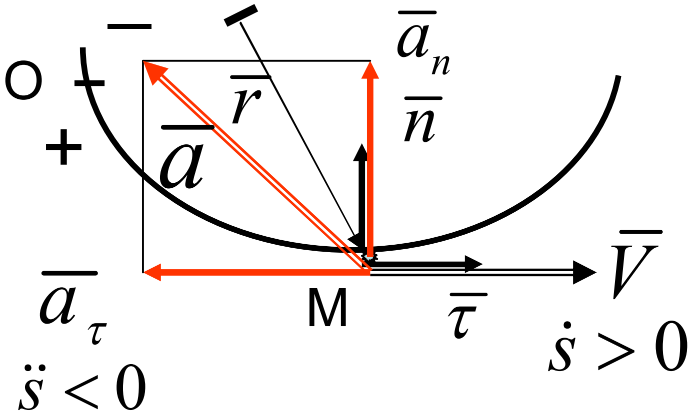
$$ds = \overset{\smile}{MM_1}$$

$$\bar{r} = \bar{r}(s); \quad \bar{\tau} = \bar{\tau}(s).$$

$$\boxed{\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau}; \quad \frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\bar{n}.} \quad (4.1)$$

§ 5. Скорость и ускорение точки в Е.С.К.

$$\overline{r} = \overline{r}[s(t)].$$



$$\overline{V} = \dot{\overline{r}} = \frac{d\overline{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}.$$

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{V} &= \dot{s}\cdot\overline{\tau}\\ V_\tau &= \dot{s}\end{aligned}} \quad (5.1)$$

$$\overline{\tau} = \overline{\tau}[s(t)]$$

$$\boxed{\overline{a} = \dot{\overline{V}} = \ddot{s}\cdot\overline{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\overline{n}.} \quad (5.2)$$

$$\overline{a} = \overline{a}_\tau + \overline{a}_n.$$

$$\overline{a}_\tau = \ddot{s}\overline{\tau}; \qquad \overline{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}\overline{n}.$$

$$\overline{a}_\tau \perp \overline{a}_n$$

§ 6. Касательное и нормальное ускорения точки

$$a_\tau = \ddot{s} = \dot{V}_\tau$$

$$a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{V^2}{\rho} \qquad (6.1)$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

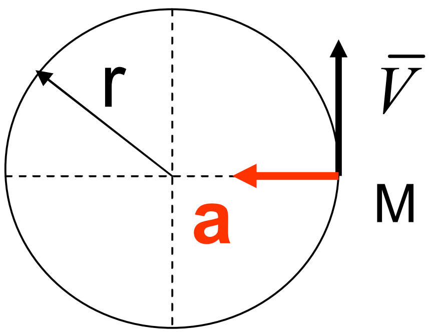
Для окружн. радиуса R

$$\rho = R \qquad a_n = V^2 / R.$$

Для прямой $\rho = \infty$

$$a_n = 0; \qquad a = a_\tau = \dot{V}_\tau = \ddot{s}$$

Пример. V=const. | $a = ?$



$$a_\tau = \dot{V}_\tau = 0$$

$$a = a_n = V^2 / r.$$

§ 7.Классификация движений А.Т.Т.

1.Поступательное движение А.Т.Т.– 3 ст. свободы.

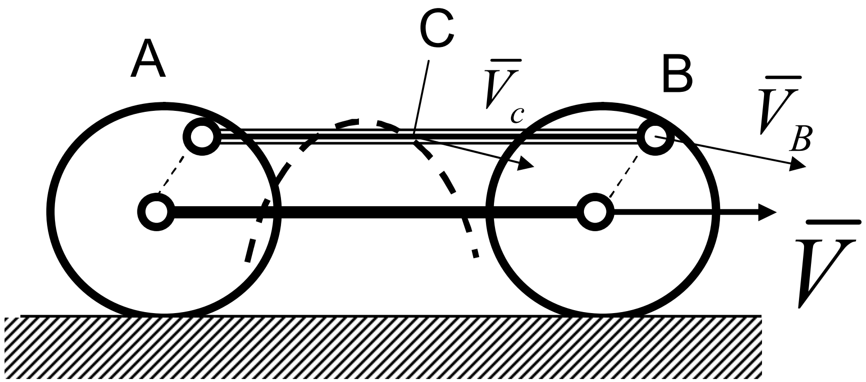
2. Вращательное движение А.Т.Т. -- 1 ст. св.

3. Плоское (плоскопараллельное) дв. –3 ст. св.

4. Сферическое движение А.Т.Т. – 3 ст. св.

5.Свободное движение А.Т.Т. -- 6 ст. св.

§ 8.Поступательное движение А.Т.Т.



$$\bar{V}_A = \bar{V}_c = \bar{V}_B$$

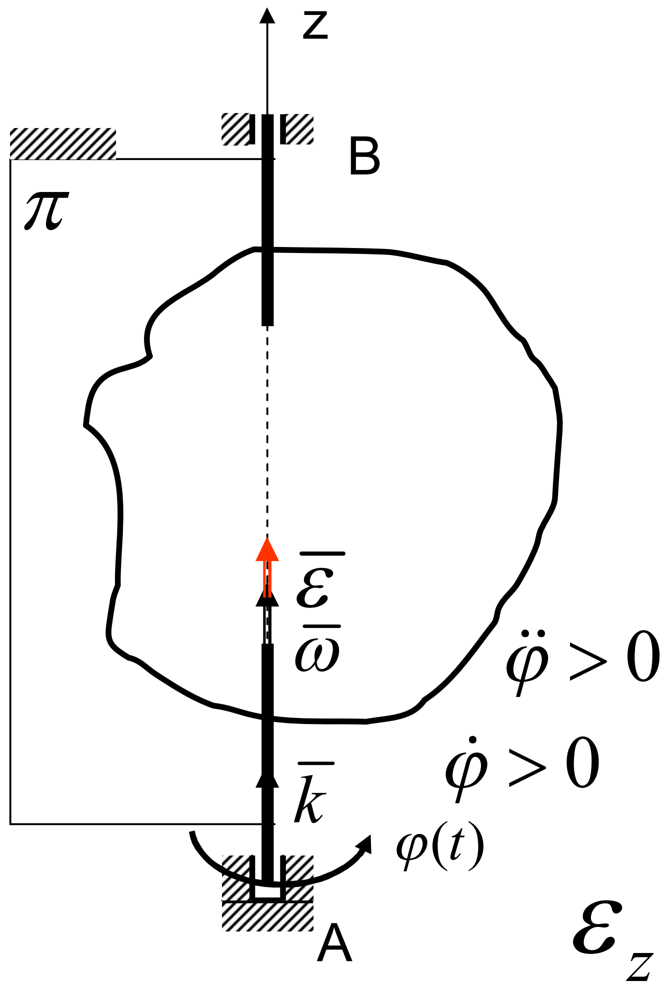
$$\bar{a}_A = \bar{a}_C = \bar{a}_B$$

Теорема: При поступательном движении А.Т.Т. все его точки описывают одинаковые траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по величине и направлению скорости и ускорения.

§9.Вращательное движение А.Т.Т.

(вращение А.Т.Т. вокруг неподвижной оси)

9.1. Закон вращательного движения.



$$\boxed{\varphi = \varphi(t)} \quad (9.1)$$

9.2. Угловая скорость и угловое ускорение тела.

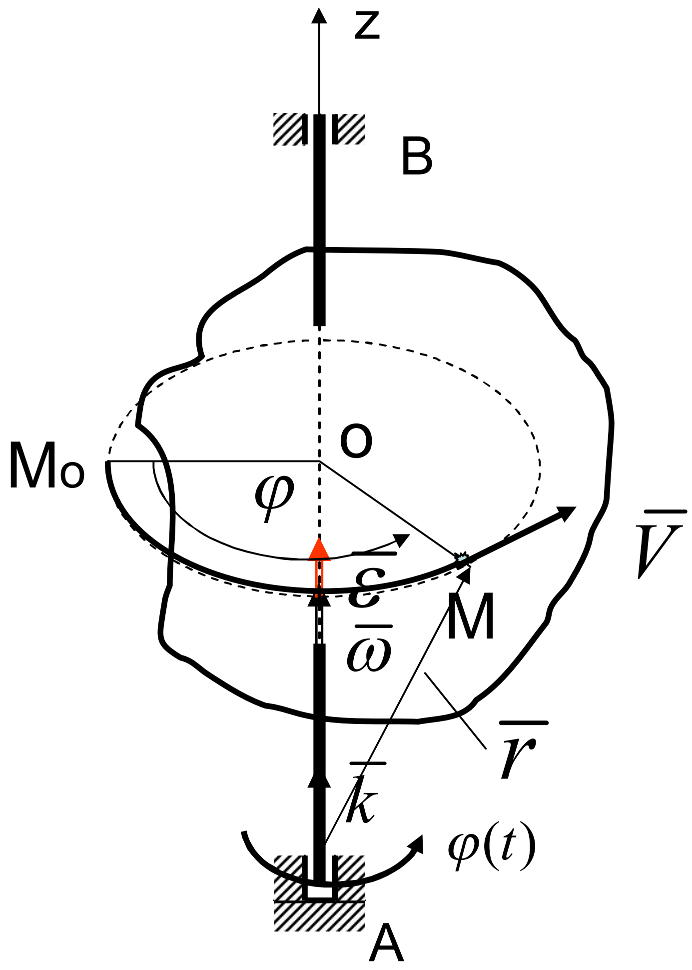
$\omega_z = \dot{\varphi}$ -- алг. угл.скорость

$$\boxed{\bar{\omega} = \dot{\varphi}\bar{k}} \quad (9.2) \qquad \omega = |\dot{\varphi}|$$

$$\boxed{\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \ddot{\varphi}\bar{k}} \quad (9.3)$$

$$\varepsilon_z = \omega_z = \ddot{\varphi} \qquad \varepsilon = \dot{\omega} = |\ddot{\varphi}|$$

9.3. скорость точки. Формула Эйлера.



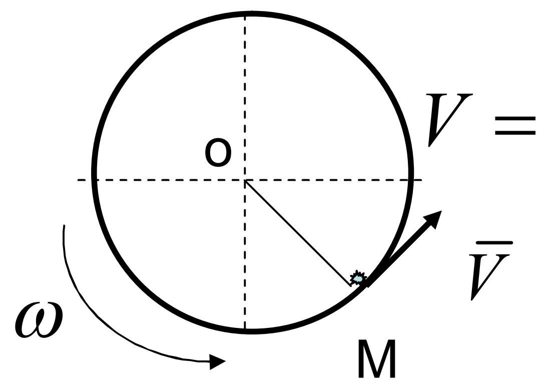
OM=h

$$\overset{\frown}{M_oM} = s = \varphi \cdot h$$

$$V = \dot{s} = \dot{\varphi}h = \omega h$$

$$\boxed{\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}} \quad (9.4)$$

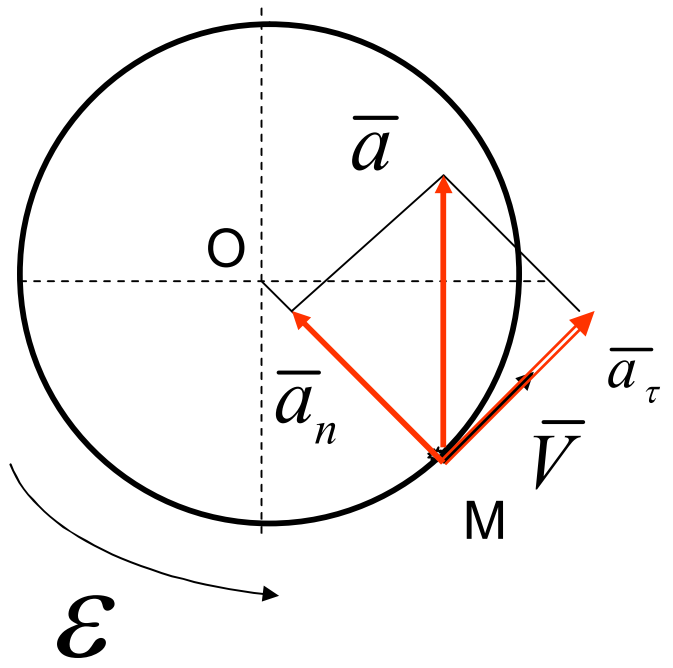
Ф. Эйлера



$$V = OM \cdot \omega = h \cdot \omega$$

9.4. Ускорение точки.

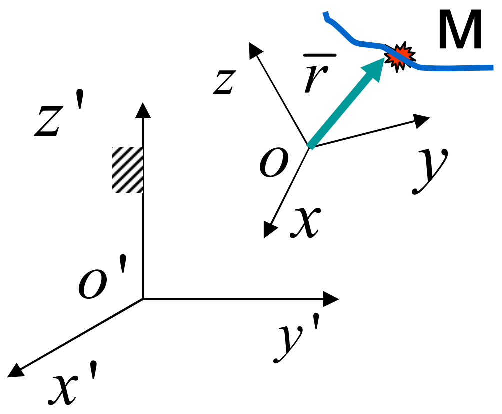
$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n$$



$$\boxed{\begin{gathered} a_\tau = \dot{V}_\tau = \varepsilon h \\ \text{h=OM} \\ a_n = \frac{V^2}{h} = \omega^2 \cdot h \\ a = h\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \end{gathered}} \qquad (9.5)$$

§.10.Сложное движение точки.

10.1.Задачи кинематики сложного движения

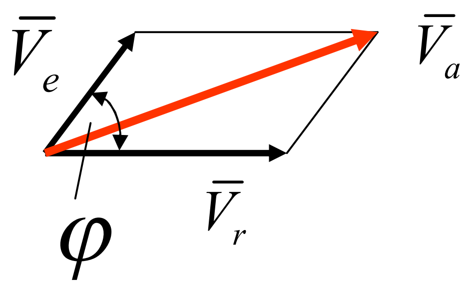


$\bar{V}_a$, $\bar{a}_a$ - абсолютные

$\bar{V}_r$, $\bar{a}_r$ - относительные

$\bar{V}_e$, $\bar{a}_e$ - переносные

10.2. Теорема сложения скоростей



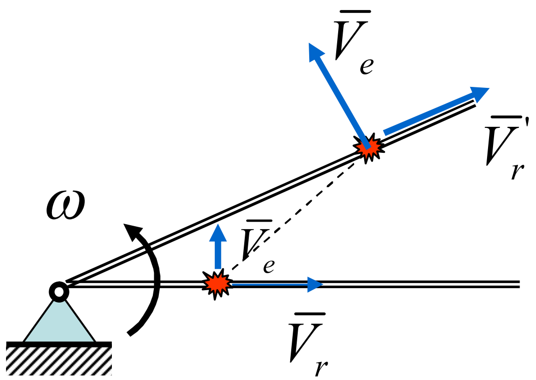
$$\boxed{\bar{V}_a = \bar{V}_r + \bar{V}_e} \quad (10.1)$$

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_rV_e\cos\varphi}$$

10.3. Теорема Кориолиса (Т. слож. Ускорений)

$$\boxed{\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_k} \qquad (10.2)$$

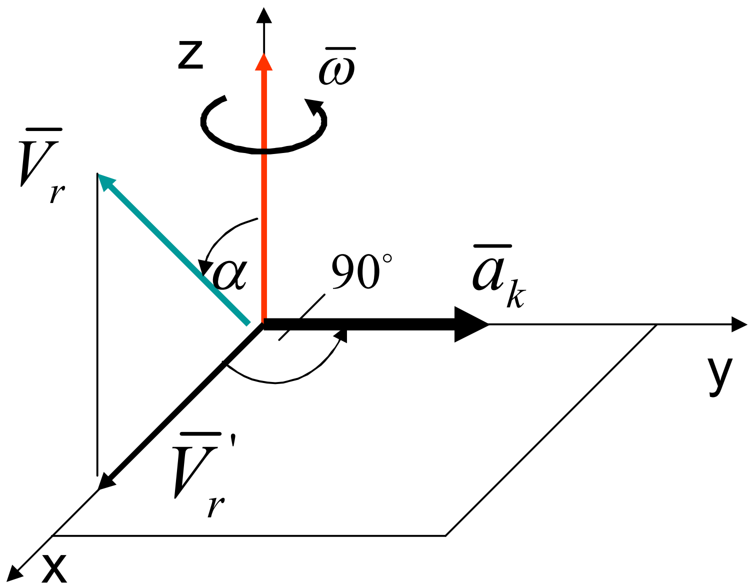
10.4.Ускорение Кориолиса

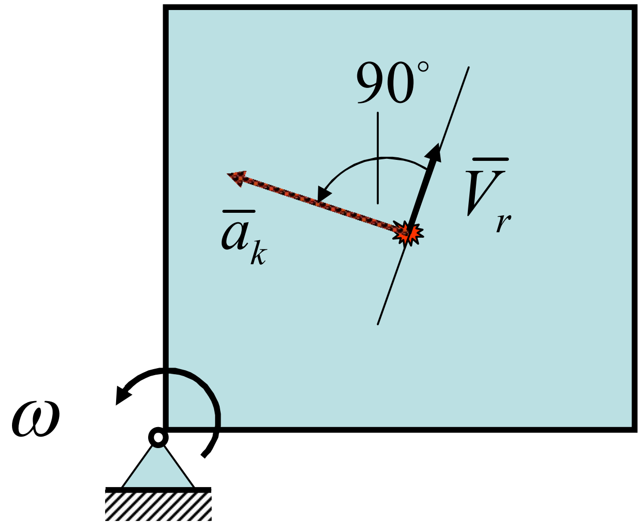


$$\boxed{\bar{a}_k = 2\bar{\omega} \times \bar{V}_r} \qquad (10.3)$$

$$\boxed{a_k = 2\omega V_r \sin(\bar{\omega} \wedge \bar{V}_r)} \qquad (10.4)$$

Правило Н. Е. Жуковского

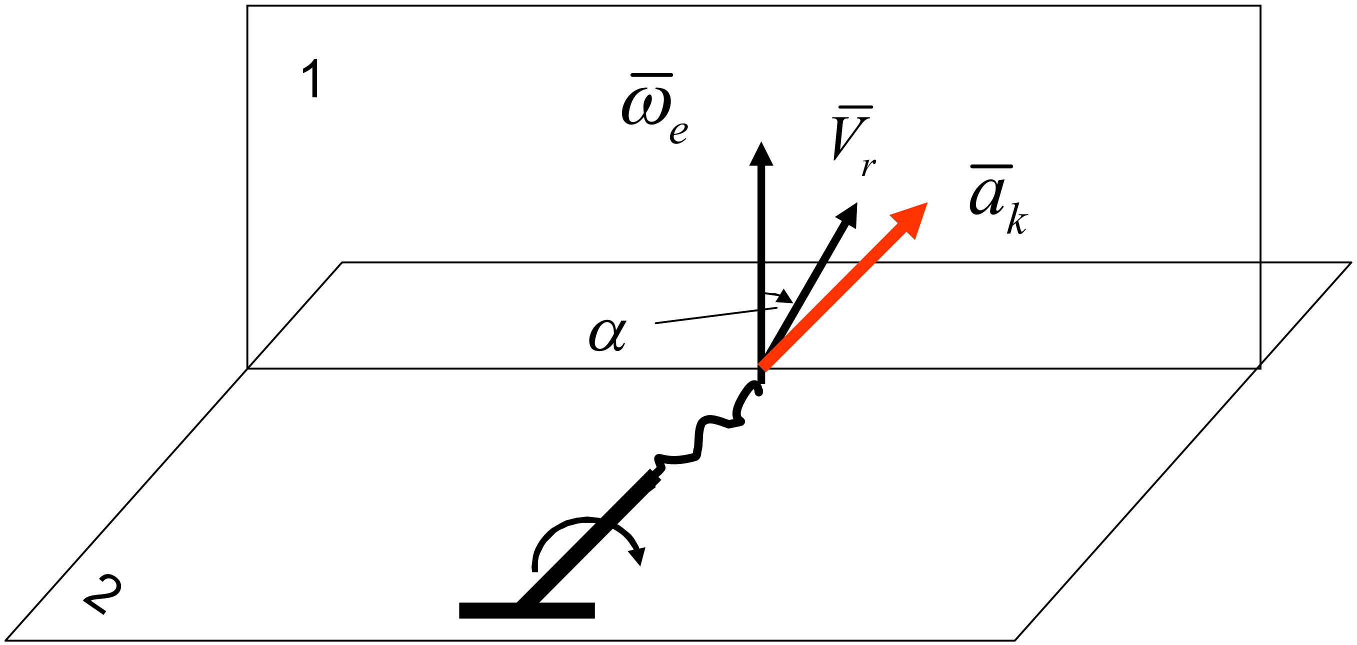




$$\bar{\omega} \perp \bar{V}_r$$

$$a_k = 2\omega V_r$$

Правило буравчика.

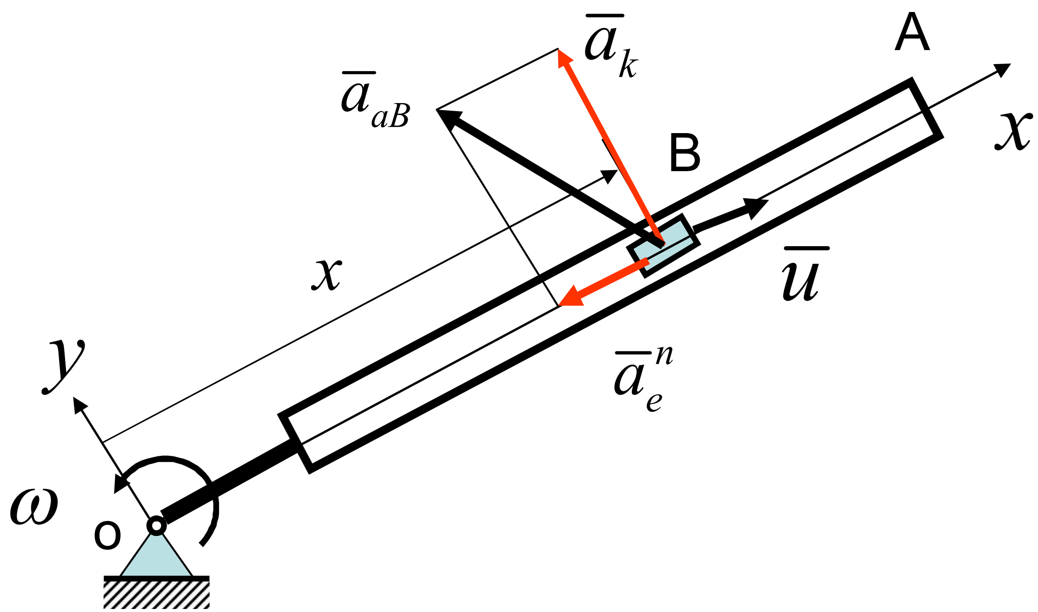


Пл. 2 $\perp$ Плоскости 1

$$a_k = 2\omega_e V_r \sin\alpha.$$

$\overline{a}_k \perp \overline{\omega}_e$ и $\overline{V}_r$.

Пример:



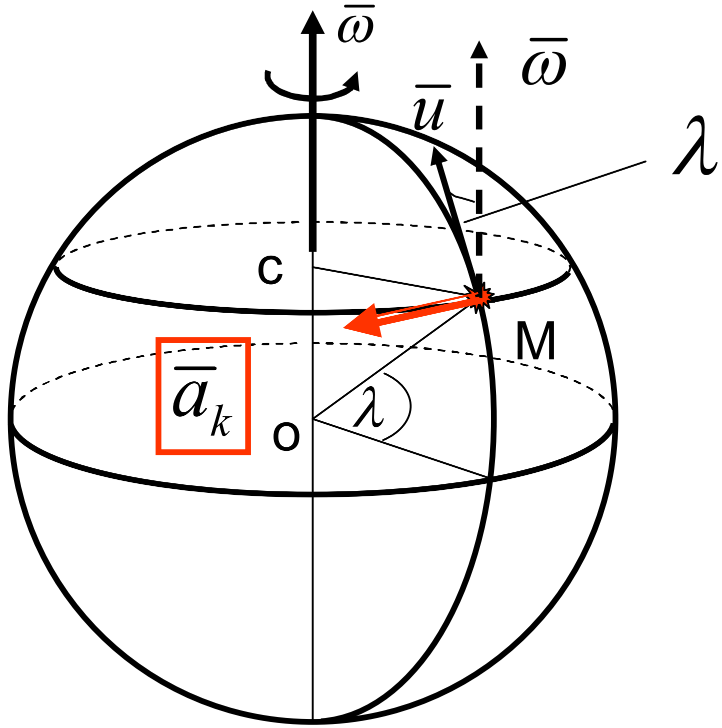
$$\omega = const;$$
$$u = const.$$

$$a_{aB}(x) = ?$$

$$a_r = \dot{u} = 0;$$
$$a_e^\tau = \dot{\omega} x = 0;$$
$$a_e^n = \omega^2 x;$$
$$a_k = 2\omega u$$

$$a_{aB} = \sqrt{a_e^{n2} + a_k^2} = \omega\sqrt{\omega^2 x^2 + 4u^2}.$$

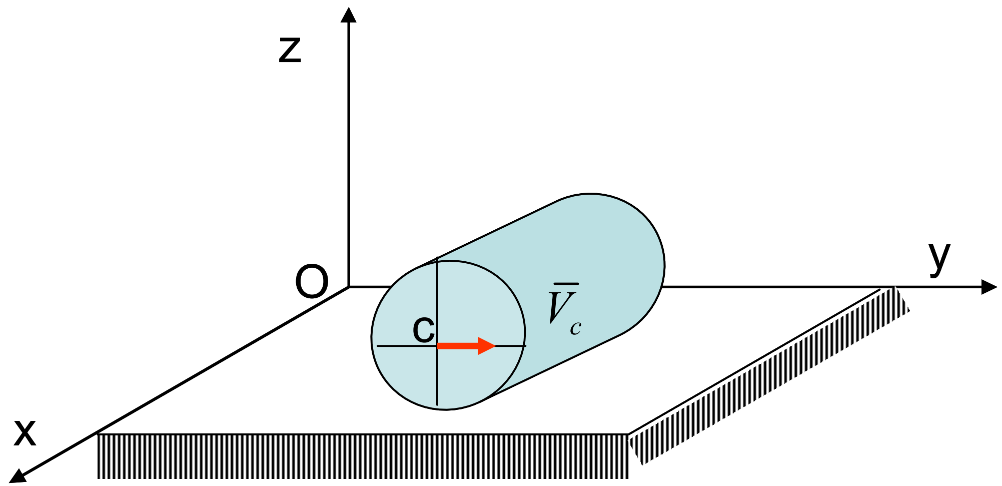
Пример: определить ускорение Кориолиса при движении точки по поверхности земли.

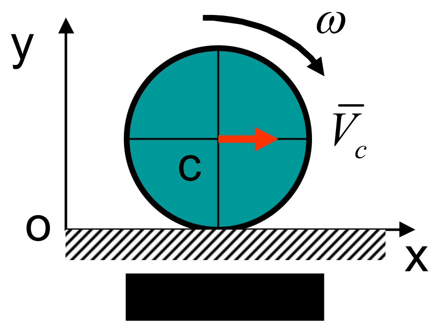


$$a_k = 2\omega u \sin\lambda$$

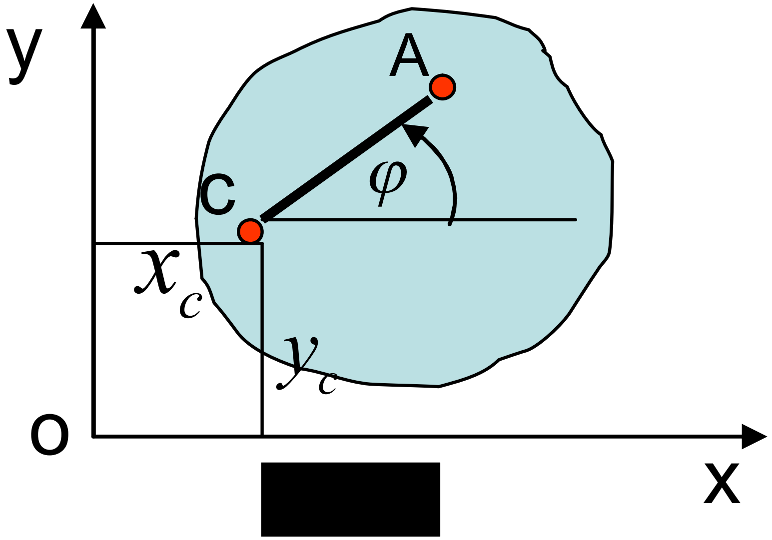
§.11. Плоское движение А.Т.Т.

11.1. Определение.





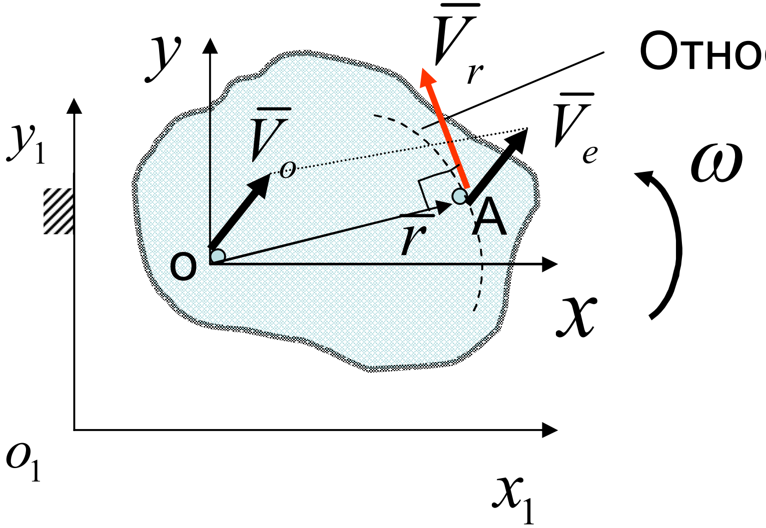
11.2. Уравнения движения плоской фигуры.



$$\boxed{\begin{aligned} x_c &= f_1(t); \\ y_c &= f_2(t); \\ \varphi &= f_3(t). \end{aligned}} \qquad (11.1)$$

11.3. Скорости точек плоской фигуры

Относительная траектория-окружность



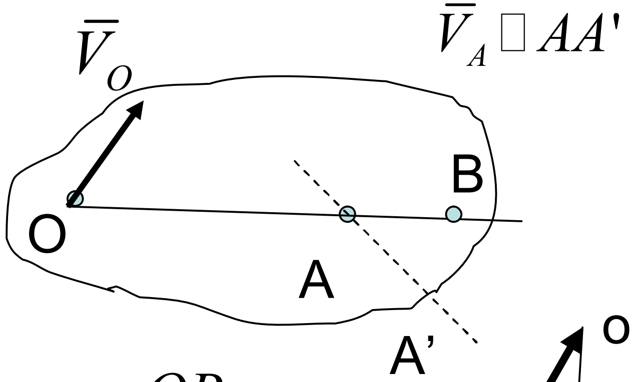
$$\bar V_A = \bar V_e + \bar V_r$$

$$\bar V_e = \bar V_o \qquad \bar V_r = \frac{d\bar r}{dt} = \bar\omega \times \bar r .$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\bar V_A = \bar V_O + \bar V_{AO};\\ &\bar V_{AO} = \bar\omega \times \bar r;\\ &\bar V_{AO} \perp OA;\\ &V_{AO} = \omega r = \omega \cdot OA. \end{aligned}} \qquad (11.2)$$

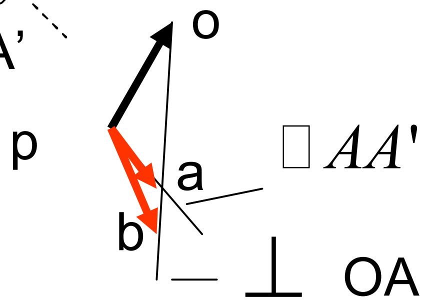
Графическое решение.

$\bar V_A \parallel AA'$



$$V_{OB} = \omega \cdot OB$$

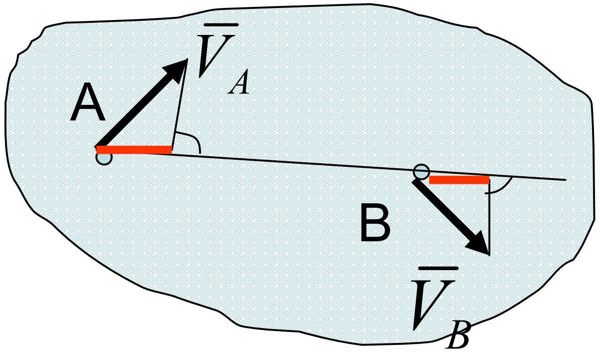
$$\frac{oa}{ob} = \frac{OA}{OB}$$



$$\bar V_A = \mu_V \cdot \overline{pa}; \qquad \bar V_B = \mu_V \cdot \overline{pb};$$

$$\omega = \frac{\mu_V \cdot oa}{OA} = \frac{\mu_V \cdot ob}{OB}.$$

11.4. Теорема о проекциях скоростей.

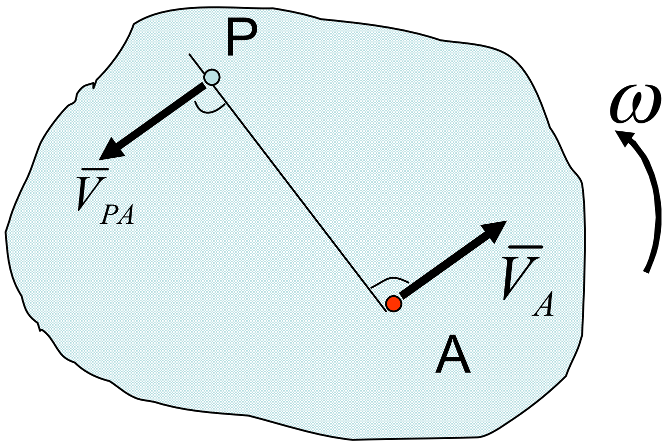


$$\boxed{np_{AB}\bar{V}_A = np_{AB}\bar{V}_B} \quad (11.3)$$

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}$$

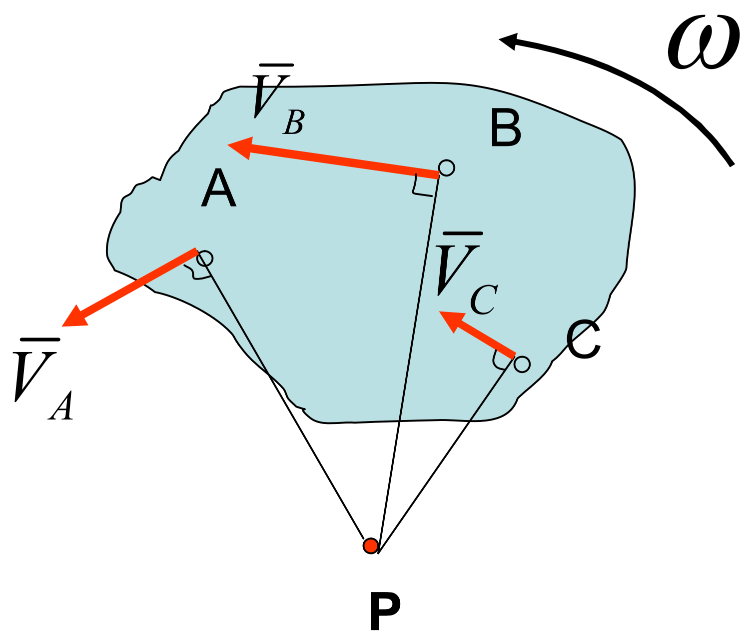
$$\bar{V}_{BA} \perp AB$$

11.5. Мгновенный центр скоростей (М.Ц.С.).



$$AP = \frac{V_A}{\omega} \qquad V_{PA} = \omega \cdot AP = V_A$$

$$\bar{V}_{PA} = -\bar{V}_A; \qquad \bar{V}_P = \bar{V}_A + \bar{V}_{PA} = 0.$$



$$\overline{V}_A = \cancel{\overline{V}_P}_{\,0} + \overline{V}_{AP};$$

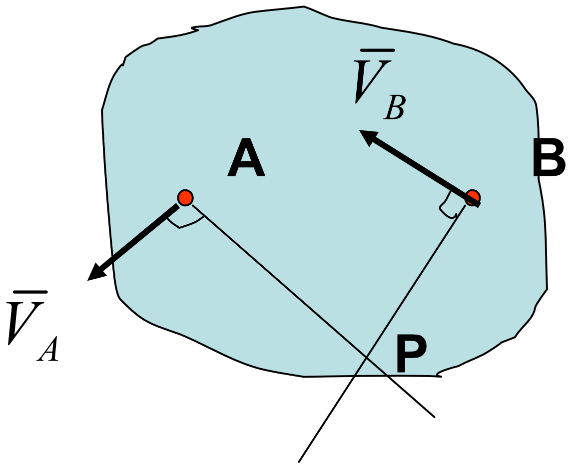
$$\overline{V}_A = \overline{V}_{AP} = \overline{\omega} \times \overline{PA}.$$

$$\boxed{\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_C}{CP} = \omega} \qquad (11.4)$$

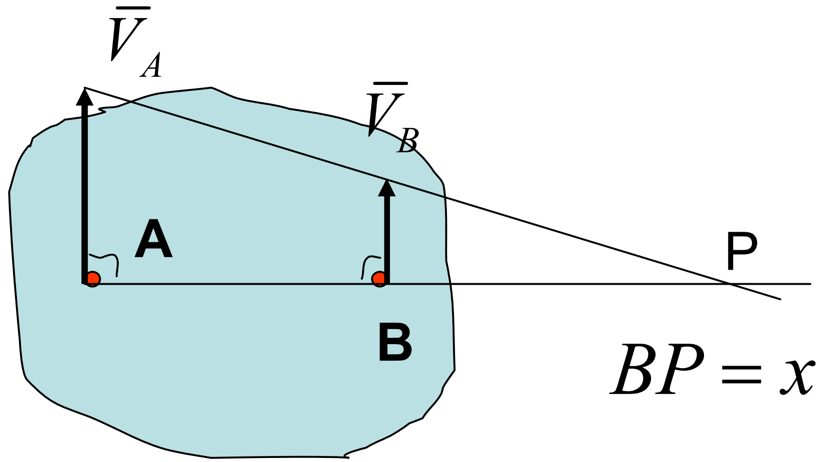
11.6. Способы определения положения М.Ц.С.

а) геометрический.

1.



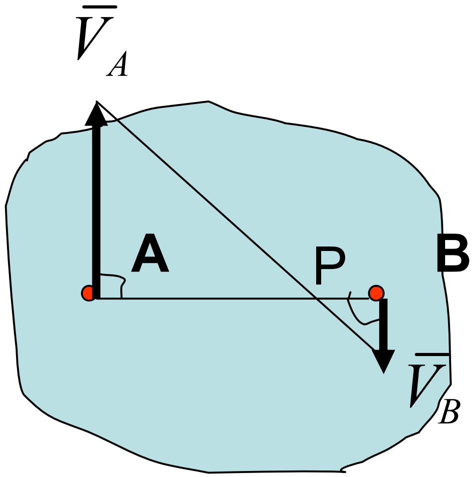
2.



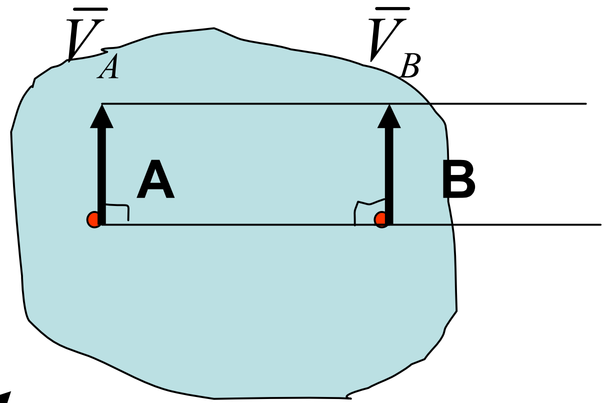
$$BP = x$$

$$\frac{V_A}{AB + x} = \frac{V_B}{x} = \omega.$$

3.



4.

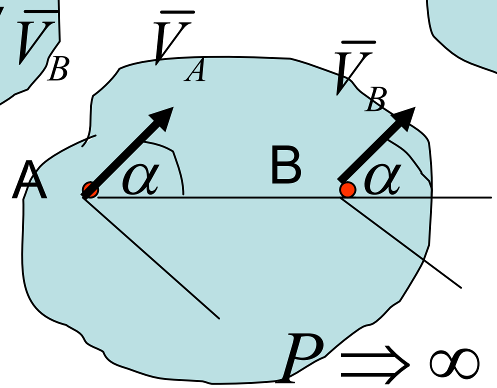


$$\bar{V}_A = \bar{V}_B$$

$$P \Rightarrow \infty$$

$$\omega = 0.$$

5.

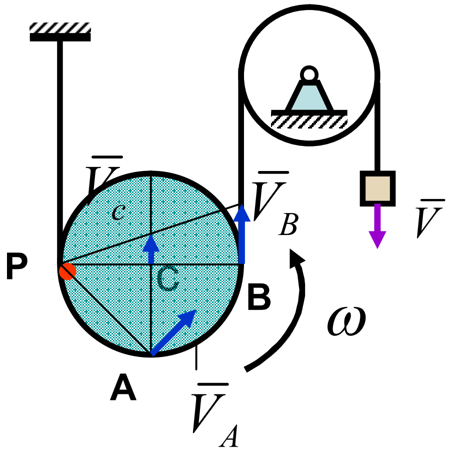


$$P \Rightarrow \infty$$

$$V_A = V_B; \quad \omega = 0.$$

б) естественный.

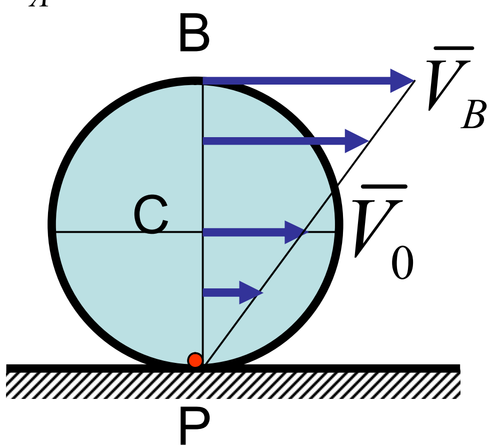
Если $V_P = 0$, то точка P – М.Ц.С.



PC=CB=R; $V_B = V;$ $\omega = \dfrac{V_B}{PB} = \dfrac{V}{2R};$

$$V_C = \omega \cdot PC = V/2;$$

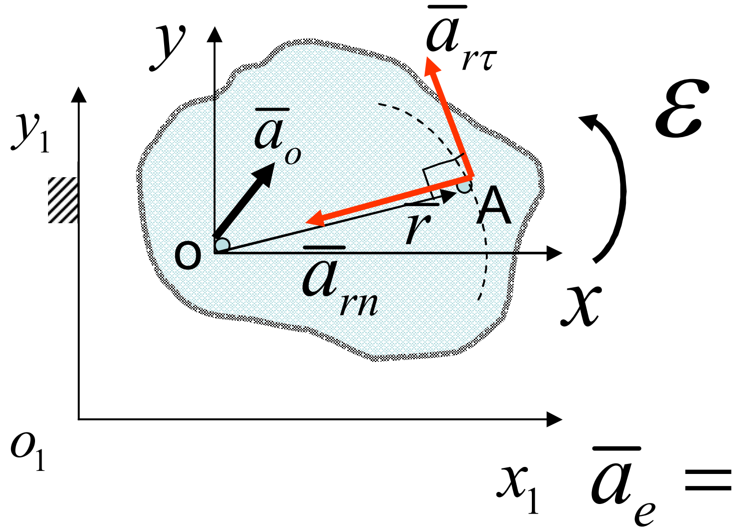
$$V_A = \omega \cdot PA = \frac{\sqrt{2}}{2} V.$$



Качение без скольжения

P – М.Ц.С.

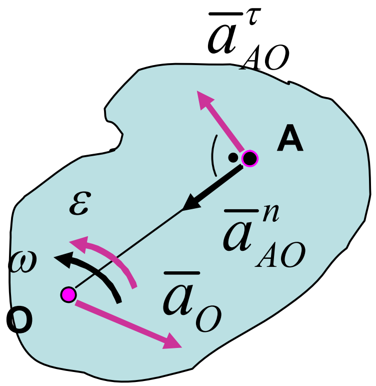
11.7. Ускорения точек плоской фигуры.



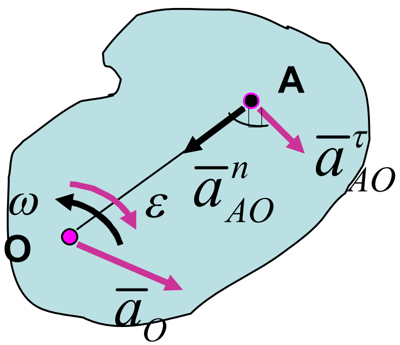
$$\overline{a}_A = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \cancel{\overline{a}_k}.\quad 0$$

$$\overline{a}_r = \overline{a}_{AO} = \overline{a}^{\tau}_{AO} + \overline{a}^{n}_{AO};$$

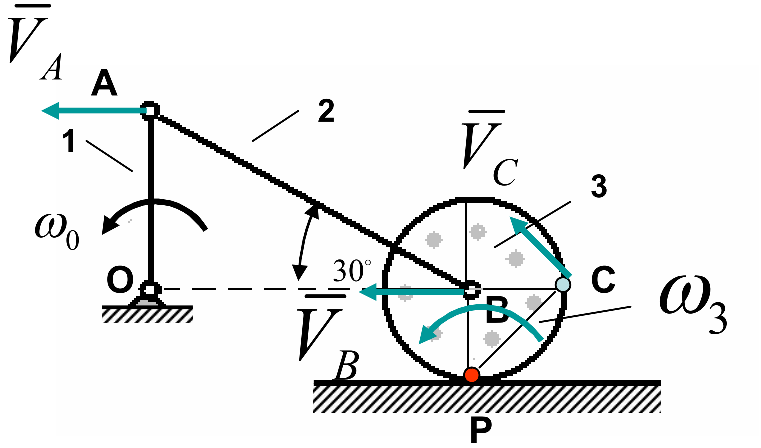
$$\overline{a}_e = \overline{a}_o;$$



$$\boxed{\begin{gathered}\overline{a}_A = \overline{a}_O + \overline{a}^{\tau}_{AO} + \overline{a}^{n}_{AO};\\ \overline{a}^{\tau}_{AO} \perp OA;\ \ a^{\tau}_{AO} = \varepsilon \cdot OA;\\ \overline{a}^{n}_{AO} \parallel OA;\ \ a^{n}_{AO} = \omega^2 \cdot OA.\end{gathered}} \qquad (11.5)$$



Пример 1. Каток.



Дано: $\omega_0 = const; \quad R_3 = r;$

$OA = 2r; \quad AB = 4r.$

Качение без скольжения

$\omega_2 = ?; \quad \omega_3 = ?; \quad \varepsilon_2 = ?; \quad \varepsilon_3 = ?;$

$V_C = ?; \qquad a_C = ?.$

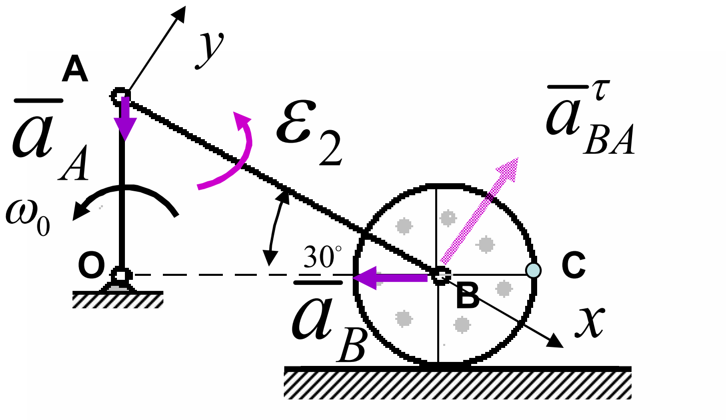
Вычисление скоростей:

$$V_B = V_A = \omega_0 \cdot OA = 2r\omega_0; \qquad \underline{\omega_2 = 0}. \qquad \underline{\omega_3 = V_B / BP = 2\omega_0};$$

$$\underline{V_C = \omega_3 \cdot PC = 2\omega_0 r\sqrt{2}}.$$

Вычисление ускорений:

$$a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = \dot{\omega}_{OA} \cdot OA = 0; \quad a_A = a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = \omega_0^2 \cdot 2r.$$



$$\underbrace{\overline{a}_B}_{\square \overline{V}_B} = \underline{\underline{\overline{a}_A}} + \underbrace{\cancel{\overline{a}_{BA}^n}}_{0} + \underbrace{\overline{a}_{BA}^\tau}_{\perp AB}; \text{ (*)}$$

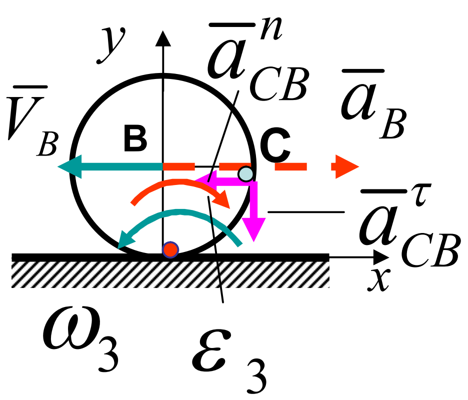
$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot AB = 0;$$

$\overline{\varepsilon}_2$ □

$$\begin{array}{ll} \text{x:} & -a_B \cos 30^\circ = a_A \cos 60^\circ; \\ \text{y:} & -a_B \sin 30^\circ = -a_A \sin 60^\circ + a_{BA}^\tau. \end{array}$$

$$a_B = -2r\omega_0^2 / \sqrt{3}; \quad a_{BA}^\tau = 4r\omega_0^2 / \sqrt{3}.$$

$$\underline{\varepsilon_2 = a_{BA}^\tau / AB = \omega_0^2 / \sqrt{3}.}$$



$$\varepsilon_3 = |\dot{\omega}_3| = \frac{d}{dt}\left(\frac{|V_B|}{PB}\right) = \frac{1}{r}\frac{d|V_B|}{dt} = |a_B|/r = 2\omega_0^2/\sqrt{3}.$$

$$\bar{a}_C = \underline{\underline{\bar{a}_B}} + \underline{\underline{\bar{a}^\tau_{CB}}} + \underline{\underline{\bar{a}^n_{CB}}}; \quad (**)$$

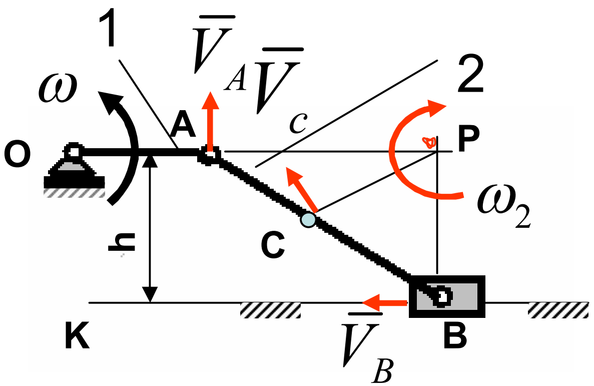
$$a^\tau_{CB} = \varepsilon_3 \cdot CB = 2\omega_0^2 r/\sqrt{3}; \quad a^n_{CB} = \omega_3^2 \cdot CB = 4\omega_0^2 r.$$

x: $a_{Cx} = a_B - a^n_{CB} = 2r\omega_0^2/\sqrt{3} - 4\omega_0^2 r = 2r\omega_0^2(1-2\sqrt{3})/\sqrt{3};$

y: $a_{Cy} = -a^\tau_{CB} = 2r\omega_0^2/\sqrt{3}.$

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = 2r\omega_0^2\sqrt{14-4\sqrt{3}}/\sqrt{3}.$$

Пример 2. Кривошипно - ползунный механизм.



Дано: OA=h=r; AB=2r;

$$\omega = const.$$

AC=CB.

Определить: $V_C, V_B, \varepsilon_2.$

$$AP = AB \cdot \cos 30^\circ = r\sqrt{3}; \quad BP = h = r;$$

Вычисление скоростей.

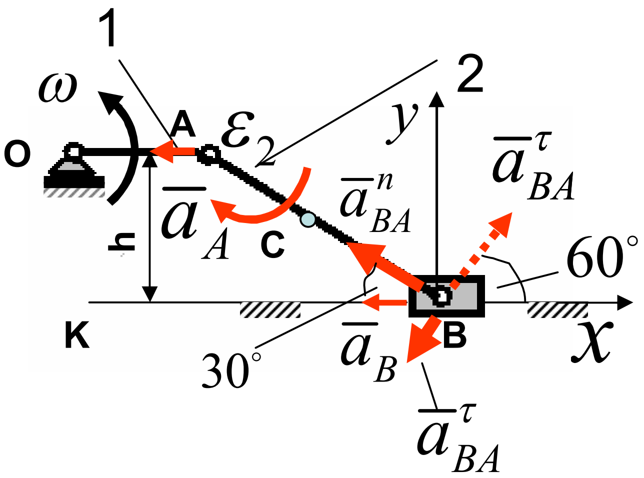
$$V_A = \omega \cdot OA = \omega r; \qquad \omega_2 = V_A / AP = \omega / \sqrt{3};$$

$$\underline{V_B = \omega_2 \cdot BP = \omega r / \sqrt{3};}$$

$$CP = BP = r$$

$$\underline{V_C = \omega_2 \cdot CP = \omega r / \sqrt{3}.}$$

Вычисление ускорений



$$a^\tau_A = 0; \quad a_A = a^n_A = \omega^2 \cdot OA = \omega^2 r;$$

$$\underset{\parallel \bar V_B}{\underline{\bar a_B}} = \underline{\underline{\bar a_A}} + \underline{\underline{\bar a^n_{BA}}} + \underset{\perp AB}{\underline{\bar a^\tau_{BA}}}; \qquad (*)$$

$$a^n_{BA} = \omega_2{}^2 \cdot AB = \frac{2}{3}\omega^2 r;$$

$\bar\varepsilon_2 \quad \otimes$

$$y:\Big| \qquad 0 = a^n_{BA}\sin 30^\circ + a^\tau_{BA}\sin 60^\circ;$$

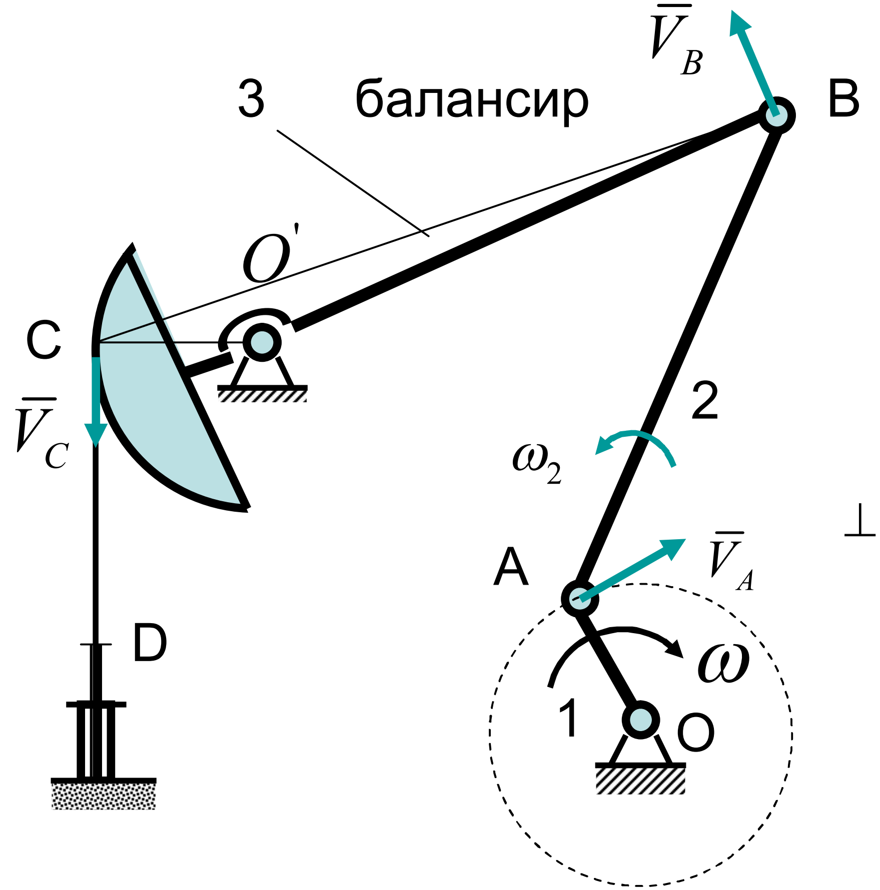
$$a^\tau_{BA} = -\frac{a^n_{BA}\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} = -\frac{2r\omega^2}{3\sqrt{3}};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\left|a^\tau_{BA}\right|}{AB} = \frac{\omega^2}{3\sqrt{3}}.$$

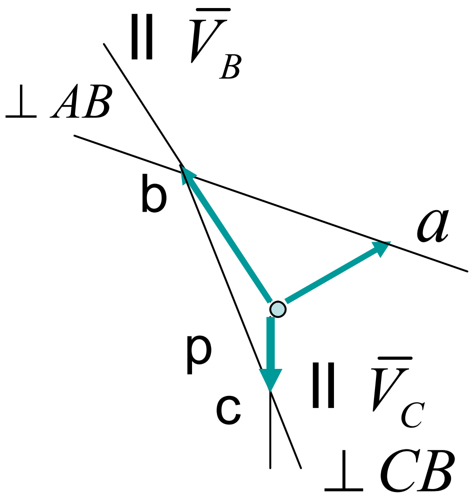
Кинематика станка - качалки

Дано: $l_1, l_2, O'B = k;$ $CO' = R;$ $\omega = const.$ $\quad\Big\|\quad V_D = ?$ $a_D = ?$

$$V_A = \omega \cdot l_1;$$



План скоростей



Масштаб скоростей

$$\mu_V = \frac{V_A}{pa} \left(\frac{м}{с \cdot мм} \right)$$

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \underset{\perp AB}{\underline{\overline{V}_{BA}}}.$$

$$V_B = pb \cdot \mu_V; \quad V_{BA} = ab \cdot \mu_V;$$

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{AB}; \quad \omega_3 = \frac{V_B}{O'B} = \frac{V_B}{k};$$

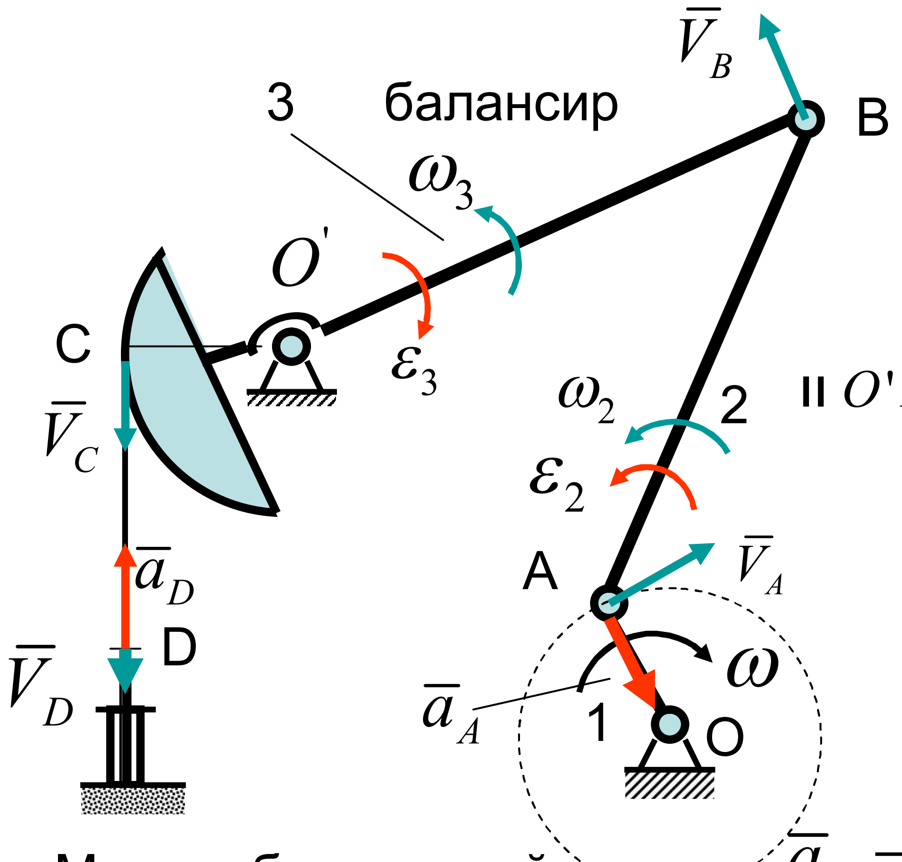
$$\overline{V}_C = \overline{V}_B + \underset{\perp CB}{\underline{\overline{V}_{CB}}}.$$

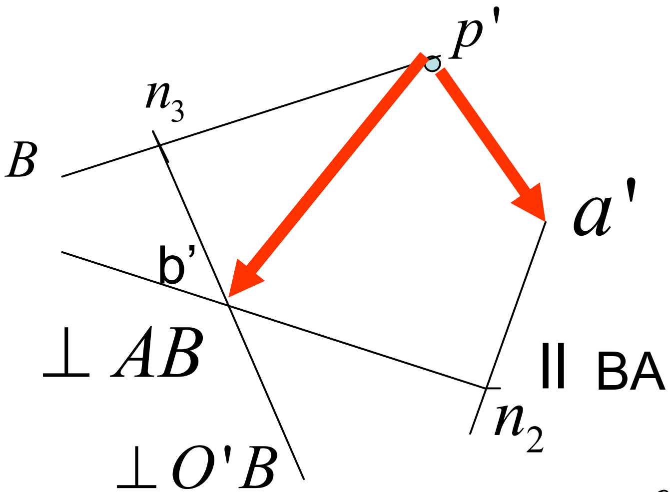
$$\underline{V_D = V_C = \omega_3 \cdot CO' = \omega_3 \cdot R.}$$

$$V_C = pc \cdot \mu_V.$$

План ускорений

$$a_A = a_A^n = \omega^2 \cdot OA = \omega^2 \cdot l_1;$$





$$a_{BA}^n = \omega_2{}^2 \cdot l_2;$$

$$\overline{a}_B = \underline{\underline{\overline{a}_A}} + \underline{\underline{\overline{a}_{BA}^n}} + \underset{\perp AB}{\underline{\overline{a}_{BA}^\tau}}; \qquad a'n_2 = a_{BA}^n / \mu_a;$$

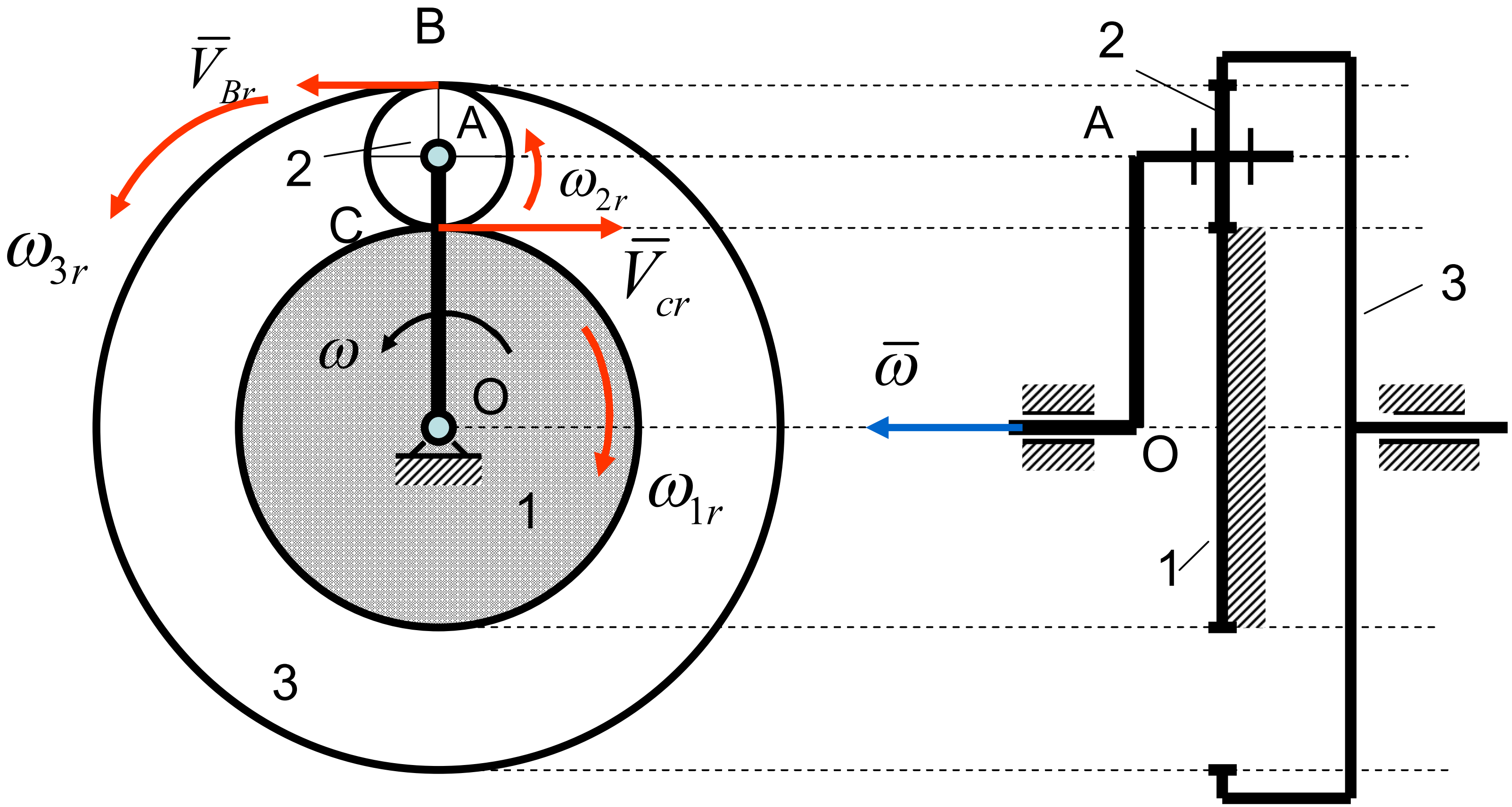
Масштаб ускорений

$$\mu_a = \frac{a_A}{p'a'} \quad \left(\frac{м}{c^2 \cdot мм}\right) \qquad a_B^n = \omega_3{}^2 \cdot k; \qquad p'n_3 = a_B^n / \mu_a;$$

$$\overline{a}_B = \underline{\underline{\overline{a}_B^n}} + \underset{\perp O'B}{\underline{\overline{a}_B^\tau}}; \qquad a_B^\tau = n_3 b' \cdot \mu_a; \qquad \varepsilon_3 = a_B^\tau / BO';$$

$$a_D = a_C^\tau = \varepsilon_3 \cdot CO' = \varepsilon_3 \cdot R.$$

Метод остановки (метод Виллиса) в кинематике планетарных механизмов



Дано: $r_1, r_2, r_3 = r_1 + 2r_2;$ $\Big\|$ $\omega_3 = ?; \quad \omega_{2r} = ?.$

$$\omega_{1r} = -\omega.$$

Звено механизма	Угловые скорости	
	До остановки	После остановки
OA	ω	0
1	0	$-\omega$
2	ω_2	$\omega_2 - \omega$
3	ω_3	$\omega_3 - \omega$

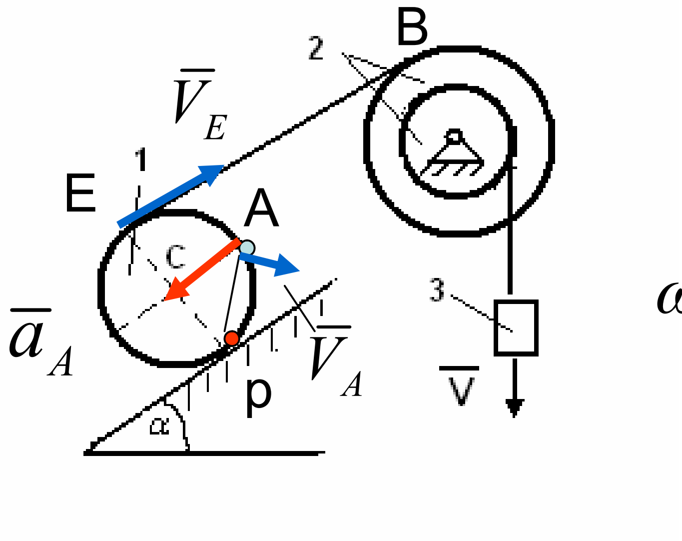
$$\frac{-\omega}{\omega_2 - \omega} = -\frac{r_2}{r_1}; \qquad \frac{\omega_2 - \omega}{\omega_3 - \omega} = \frac{r_3}{r_2};$$

Формулы Виллиса.

$$\omega_3 = \left(\frac{r_3 + r_1}{r_3}\right) \cdot \omega; \qquad \omega_{2r} = \omega_2 - \omega = \frac{r_1}{r_2}\omega;$$

Пример . Дано: V=const; $r_1,\ r_2,\ R_2.$

Определить скорость и ускорение точки А



$$V_E = V_B = \frac{V}{r_2}\cdot R_2;$$

P – М.Ц.С.

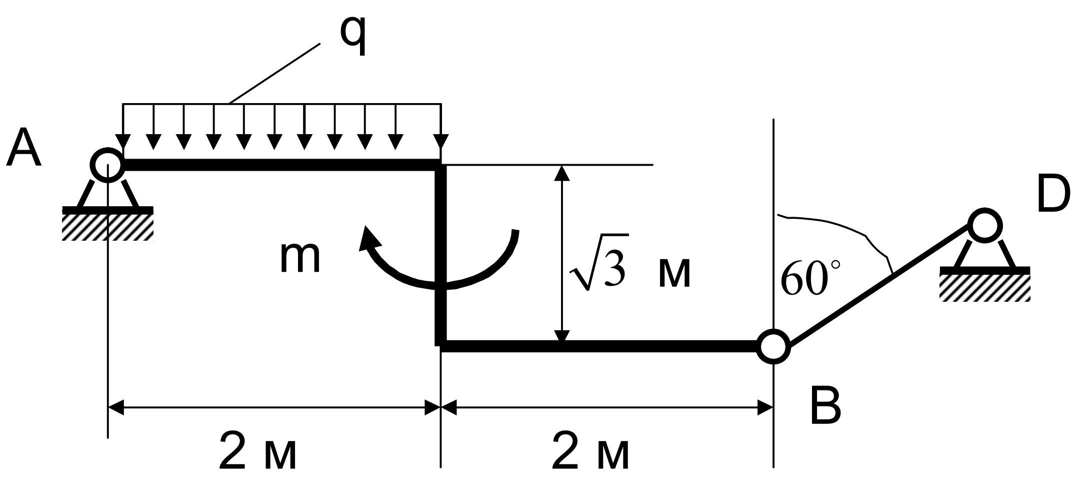
$$\omega_1 = \frac{V_E}{2r_1} = \frac{V}{r_2\cdot 2r_1}\cdot R_2; \quad V_C = \omega_1\cdot r_1 = \frac{V}{2r_2}\cdot R_2;$$

$$V_A = \omega_1\cdot PA = \omega_1 r_1\sqrt{2};$$

$$a_C = \dot{V}_C = 0; \qquad \varepsilon_1 = \dot{\omega}_1 = 0;$$

$$\overline{a}_A = \underbrace{\cancel{\overline{a}_C}}_{0} + \overline{a}^n_{AC} + \underbrace{\cancel{\overline{a}^\tau_{AC}}}_{0};$$

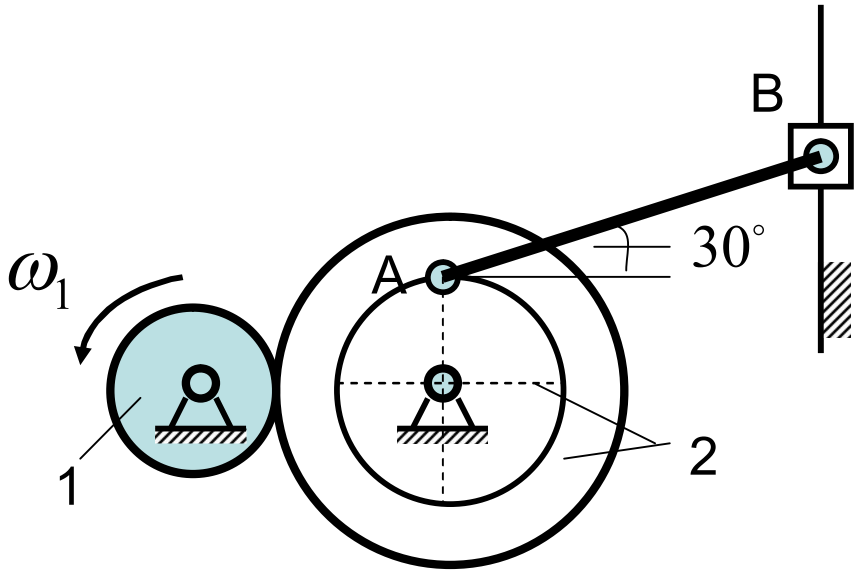
$$a_A = \omega_1^{\,2}\cdot r_1 = \frac{V^2 R_2^{\,2}}{4r_1\cdot r_2^{\,2}}.$$



Дано:

q=2 Н/м; m=3 Нм.

Определить реакцию стержня BD.



Дано: $\omega_1 = \sqrt{3} \;\; c^{-1};$

$r_1 = 1; \;\; r_2 = 1,5; \;\; R_2 = 3\,см.$

Определить в указанном положении механизма скорость ползуна B.