Гл.I. Динамика точки

§1.Законы Галилея- Ньютона

(Сформулированы И.Ньютоном в 1687г. в трактате «Математические начала натуральной философии»)

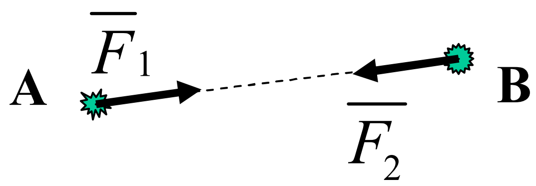
1-й закон (закон инерции)

2-й закон

$$\boxed{m\overline{a} = \overline{F}.} \quad (1.1)$$

(основной закон динамики)

3-й закон (закон равенства действия и противодействия



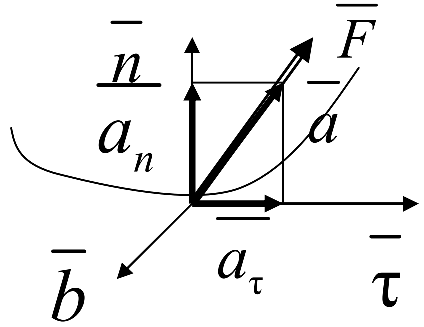
$$\overline{F}_1 = -\overline{F}_2.$$

4-й закон (закон независимости действия сил)

$$\overline{a} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \ldots + \overline{a}_n. \qquad m\overline{a}_k = \overline{F}_k; \quad k = (\overline{1,n}).$$

§ 2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k = \bar{F}.$$



$$a_\tau = \frac{dV_\tau}{dt};$$

$$a_n = \frac{V^2}{\rho};$$

$$a_b = 0.$$

Диф. ур. в Д.С.К.

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x; \\ m\ddot{y} &= F_y; \\ m\ddot{z} &= F_z. \end{aligned}} \qquad (1.2)$$

Диф. ур. в Е.С.К.

$$\boxed{\begin{aligned} m\frac{dV_\tau}{dt} &= \sum F_\tau; \\ m\frac{V^2}{\rho} &= \sum F_n; \\ 0 &= \sum F_b. \end{aligned}} \qquad (1.3)$$

§ 3.Две основные задачи динамики точки

Первая (прямая) задача.

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t); \quad m. \quad \Bigg\| \quad \overline{F} = ?$$

Вторая (обратная) задача.

$\overline{F} = \overline{F}(\overline{r}, \overline{V}, t); \quad m;$ Нач. условия

$\overline{r}(0) = \overline{r}_0; \quad \dot{\overline{r}}(0) = \overline{V}_0.$ т.е.

$x_0; \quad y_0; \quad z_0; \quad V_{0x}; \quad V_{0y}; \quad V_{0z}.$

$x(t) = ?;$

$y(t) = ?;$

$z(t) = ?.$

Общее решение

системы (1.2)

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x(t, C_1, \ldots C_6); \\ y &= y(t, C_1, \ldots C_6); \\ z &= z(t, C_1, \ldots C_6). \end{aligned}} \qquad (1.4)$$

§ 4.Принцип Даламбера для точки

$$m\overline{a} = \overline{F} + \overline{R}. \qquad \overline{F} + \overline{R} + \overline{F}^{u} = 0, \quad где \quad \overline{F}^{u} = -m\overline{a}.$$

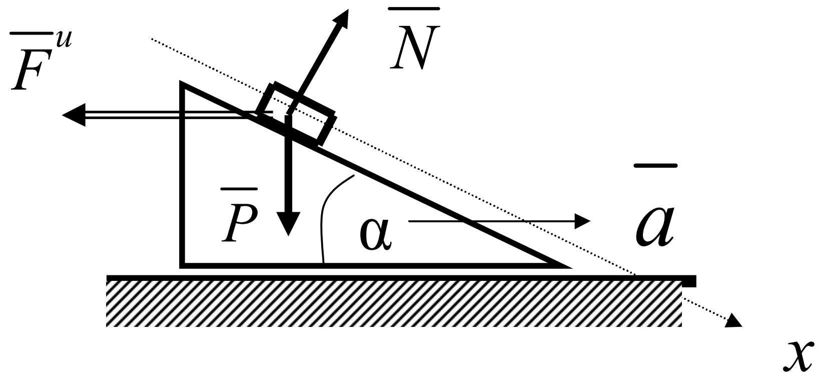
$$F_x + R_x + F_x^{u} = 0;$$

Уравн. кинетостатики

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

Пример



$$a\big|_{V_r=0} = ?$$

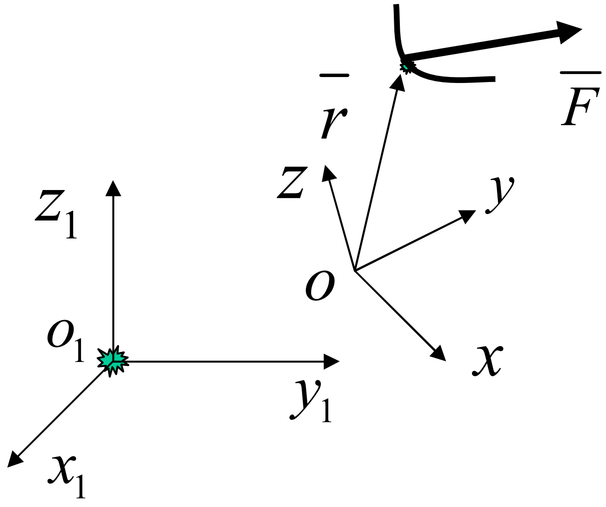
$$P = mg \qquad F^{u} = ma$$

$$mg\sin\alpha - ma\cos\alpha = 0.$$

$$\underline{a = g \cdot tg\alpha}$$

§ 5. Динамика относительного движения точки

5.1.Закон относительного движения



$$m\overline{a} = \overline{F}; \qquad \overline{a} = \overline{a_r} + \overline{a_e} + \overline{a_k}.$$

$$\boxed{\begin{gathered} m\overline{a_r} = \overline{F} + \overline{F_e^u} + \overline{F_k^u}; \\ \overline{F_e^u} = -m\overline{a_e}; \quad \overline{F_k^u} = -m\overline{a_k}. \end{gathered}} \quad (1.5)$$

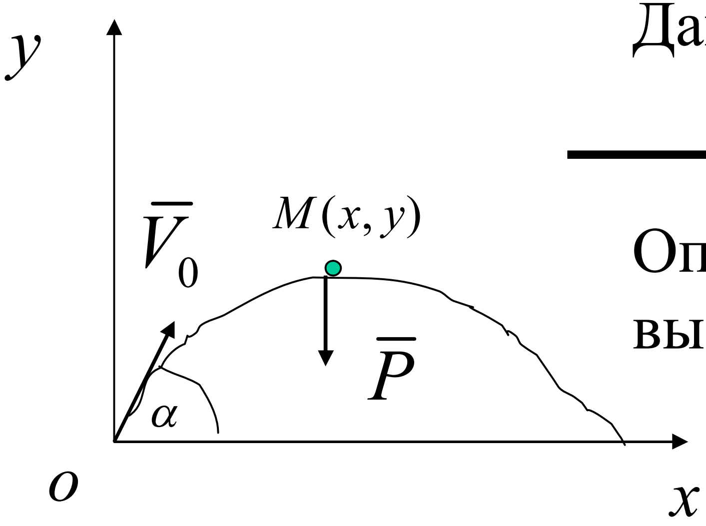
5.2.Относительное равновесие

$$\boxed{\overline{F} + \overline{F_e^u} = 0} \quad (1.6)$$

5.3.Принцип Галилея-Ньютона

$$\omega = 0; \quad \overline{a_k} = 2\overline{\omega} \times \overline{V_r} = 0; \quad \overline{a_o} = 0; \quad \overline{a_e} = 0. \qquad \boxed{m\overline{a_r} = \overline{F}.} \quad (1.7)$$

Задача внешней баллистики



Дано: V_0 - нач. скорость;

α - угол выстрела.

Определить: дальность-L и высоту полета-H снаряда.

$$m\overline{a} = \overline{P} = m\overline{g}$$

$$\ddot{x} = 0\ ;$$

$$\ddot{y} = -g.$$

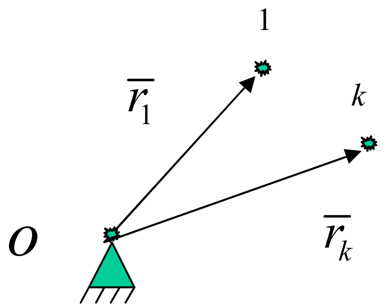
Нач. условия

$$x(0) = 0\ ;\ \ y(0) = 0\ ;$$

$$\dot{x}(0) = V_0 \cdot \cos(\alpha)\ ;$$

$$\dot{y}(0) = V_0 \cdot \sin(\alpha)\ .$$

§ 6. Дифференциальные уравнения движения точек механической системы



$n -$ *число точек* $\quad m_k, \overline{a}_k, \overline{V}_k, \overline{r}_k$

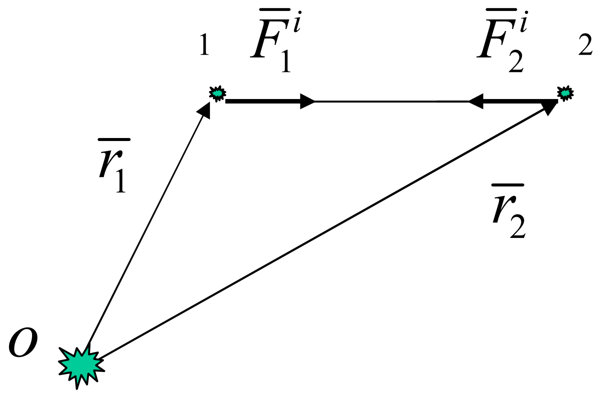
$\overline{F}_k^e -$ *равн. внешних сил* $k -$ *ой точки*

$\overline{F}_k^i -$ *равн. внутренних сил* $k -$ *ой точки*

$$m_k \overline{a}_k = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i \ , \ (k = 1...n) \qquad (1.8)$$

$$\begin{aligned} m_k \ddot{x}_k &= F_{kx}^e + F_{kx}^i; \\ m_k \ddot{y}_k &= F_{ky}^e + F_{ky}^i; \\ m_k \ddot{z}_k &= F_{kz}^e + F_{kz}^i. \end{aligned} \qquad (1.9)$$

Свойства внутренних сил



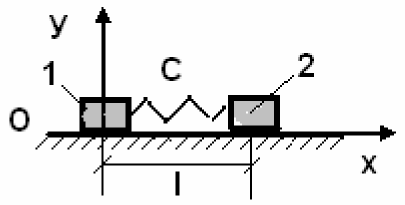
$$\bar{F}_1^i = -\bar{F}_2^i;$$

$$\bar{F}_1^i + \bar{F}_2^i = 0 \ ; \quad \bar{r}_1 \times \bar{F}_1^i + \bar{r}_2 \times \bar{F}_2^i = 0.$$

$$\Sigma \ \bar{F}_k^i = 0;$$

$$\Sigma \ \bar{m}_o(\bar{F}_k^i) = \Sigma \ \bar{r}_k \times \bar{F}_k^i = 0. \qquad (1.10)$$

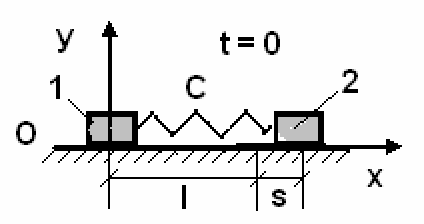
Пример: движение двух тел под действием упругих сил



Дано: $m_1 = m_2 = m$; l – *длина недеформ. пружины*;

$F = c\lambda$ – *упругая сила*; c – *жёсткость*;

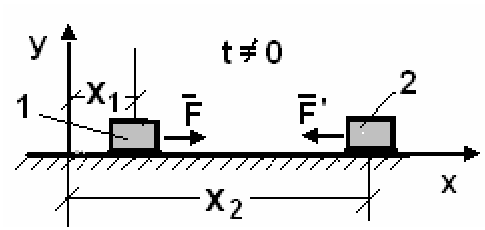
λ – *деформация пружины.*



Начальные условия:

$$x_1(0) = 0;\ \ x_2(0) = l + s;$$

$$\dot{x}_1(0) = 0;\ \ \dot{x}_2(0) = 0.$$



Уравнения движения тел

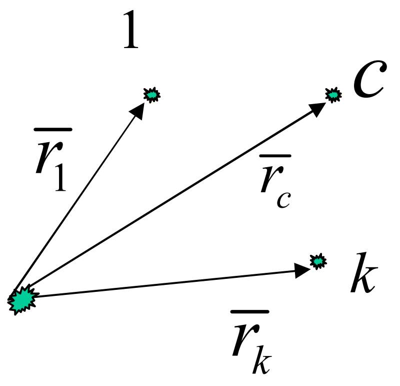
$$m_1\ddot{x}_1 = c(x_2 - x_1 - l);$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -c(x_2 - x_1 - l).$$

Здесь $F = F' = c\lambda;\ \ \lambda = x_2 - x_1 - l.$

Гл.11. Геометрия масс

§1. Центр масс системы.



$$m_k - \textit{масса } k - \textit{ой точки}$$

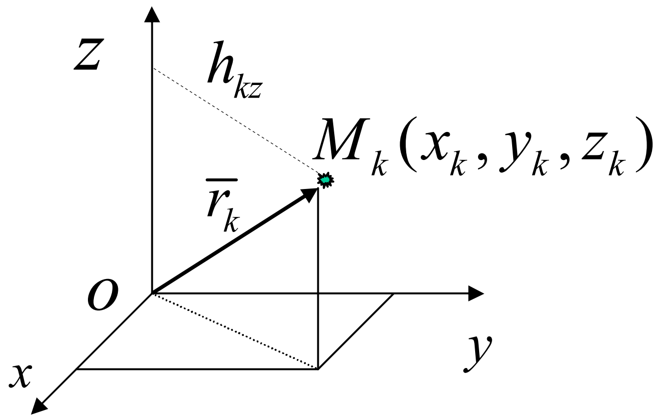
$$\overline{r}_c = \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=1}^{n} m_k \overline{r}_k \qquad (2.1)$$

Здесь

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k .$$

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \sum_{k=1}^{n} m_k x_k / M; \\ y_c &= \sum_{k=1}^{n} m_k y_k / M; \\ z_c &= \sum_{k=1}^{n} m_k z_k / M. \end{aligned} \right| \qquad (2.2)$$

§2. Моменты инерции механической системы



$$m_k - масса\ k - ой\ точки$$

$$\left.\begin{aligned} J_x &= \Sigma m_k h_{kx}^2 = \Sigma m_k (y_k^2 + z_k^2); \\ J_y &= \Sigma m_k h_{ky}^2 = \Sigma m_k (z_k^2 + x_k^2); \\ J_z &= \Sigma m_k h_{kz}^2 = \Sigma m_k (x_k^2 + y_k^2). \end{aligned}\right| \qquad (2.3)$$

$$J_o = \Sigma m_k r_k^2 = \Sigma m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2). \qquad (2.4)$$

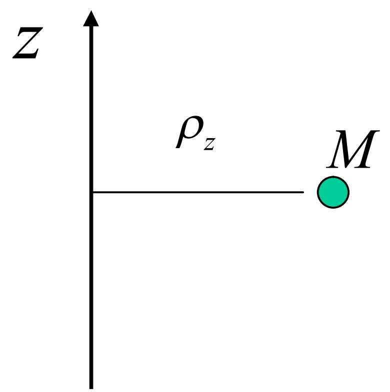
$$J_x + J_y + J_z = 2J_o. \qquad (2.5)$$

$$J_{xy} = \Sigma m_k x_k y_k; \quad J_{yz} = \Sigma m_k y_k z_k; \quad J_{zx} = \Sigma m_k z_k x_k. \Bigg| \qquad (2.6)$$

§3. Главные оси и моменты инерции. Радиус инерции системы.

Если $J_{xy} = J_{xz} = 0,$ *то ось* x

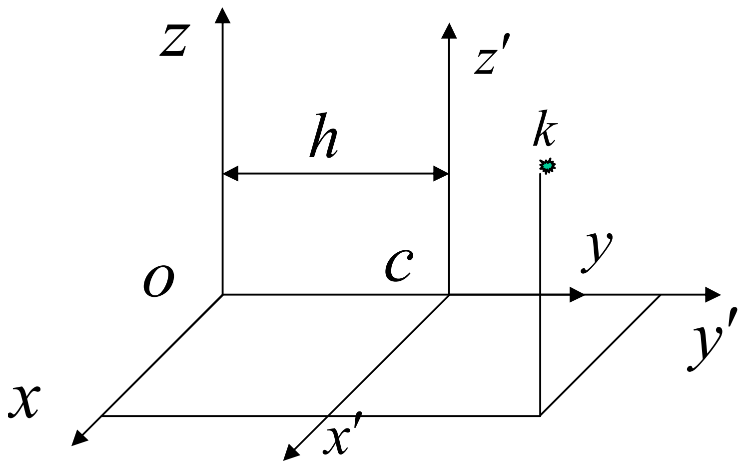
называется главной осью инерции



$$\boxed{J_z = M \cdot \rho_z^2} \quad (2.7)$$

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k$$

§ 4. Теорема Гюйгенса-Штейнера



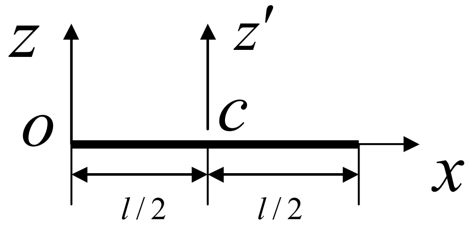
$$x_k = x'_k; \quad z_k = z'_k;$$

$$y_k = y'_k + h.$$

$$\boxed{J_z = J_{z'} + M \cdot h^2} \qquad (2.8)$$

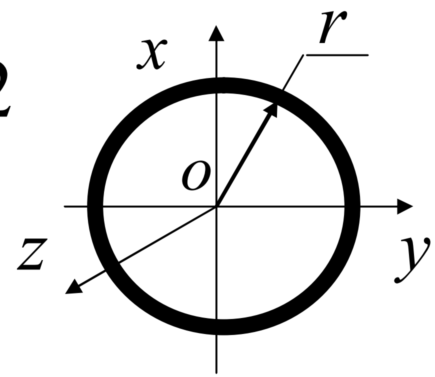
$$M = \Sigma m_k$$

§ 5. Осевые моменты инерции простейших однородных тел



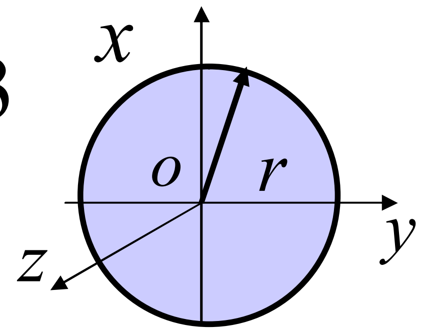
$$J_z = \frac{1}{3} ml^2; \quad J_{z'} = \frac{1}{12} ml^2.$$

2



$$J_x = J_y = \frac{1}{2} m \cdot r^2; \quad J_z = m \cdot r^2.$$

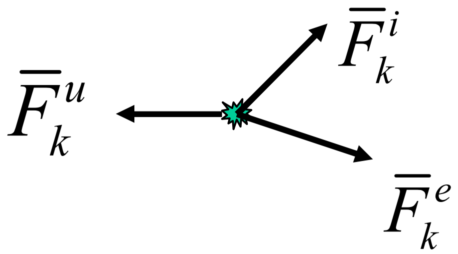
3



$$J_x = J_y = \frac{1}{4} m \cdot r^2; \quad J_z = \frac{1}{2} m \cdot r^2.$$

Гл.111. Метод кинетостатики в динамике

§ 1.Принцип Даламбера для системы



$$\overline{F}_k^u = -m_k \overline{a}_k \; - \; \textit{сила инерции } k-\textit{ой точки}$$

$1-$*ый вид*

$$\overline{F}_k^i + \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^u = 0, \quad (k = 1, \ldots n) \qquad (3.1)$$

$2-$*ой вид*
$$\boxed{\overline{F}^e + \overline{F}^u = 0; \quad \overline{M}_o^e + \overline{M}_o^u = 0.} \qquad (3.2)$$

Здесь

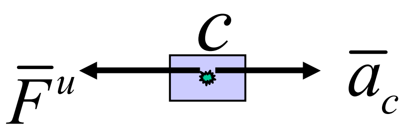
$$\overline{F}^e = \sum \overline{F}_k^e; \Big| \; \overline{F}^u = \sum \overline{F}_k^u; \Big| \; \overline{M}_o^e = \sum \overline{r}_k \times \overline{F}_k^e; \Big| \; \overline{M}_o^u = \sum \overline{r}_k \times \overline{F}_k^u$$

§ 2. Вычисление сил инерции

$$\overline{F}^u = -M\overline{a}_c - \text{главный вектор сил инерции}$$

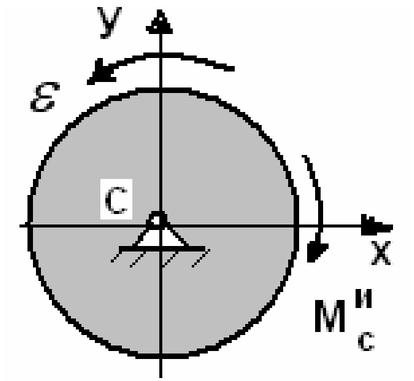
Силы инерции А.Т.Т.

1. *Поступательное движение*



$$F^u = Ma_c; \qquad \overline{M}_c^u = 0.$$

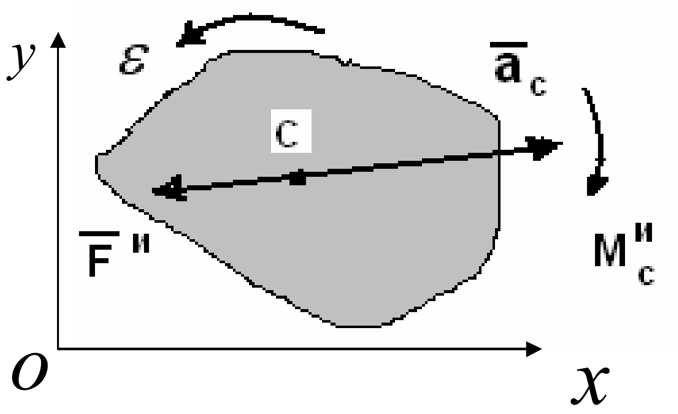
2. *Вращение вокруг главн. центр. оси инерции*



$$\overline{F}^u = 0; \quad M_c^u = M_z^u = J_z\varepsilon$$

$$M_x^u = 0; \quad M_y^u = 0.$$

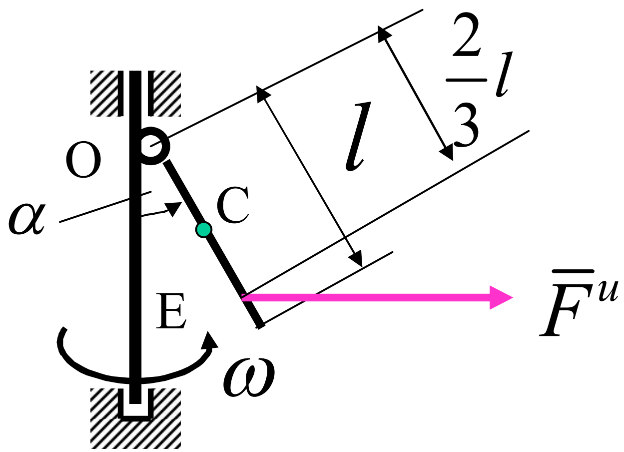
3.*Плоское движение А.Т.Т.*



$$F^{u} = Ma_{c}; \quad M_{c}^{u} = M_{cz}^{u} = J_{c}\varepsilon.$$

$$M_{x}^{u} = 0; \quad M_{y}^{u} = 0.$$

4. Равнодействующая сил инерции при вращательном движении тела



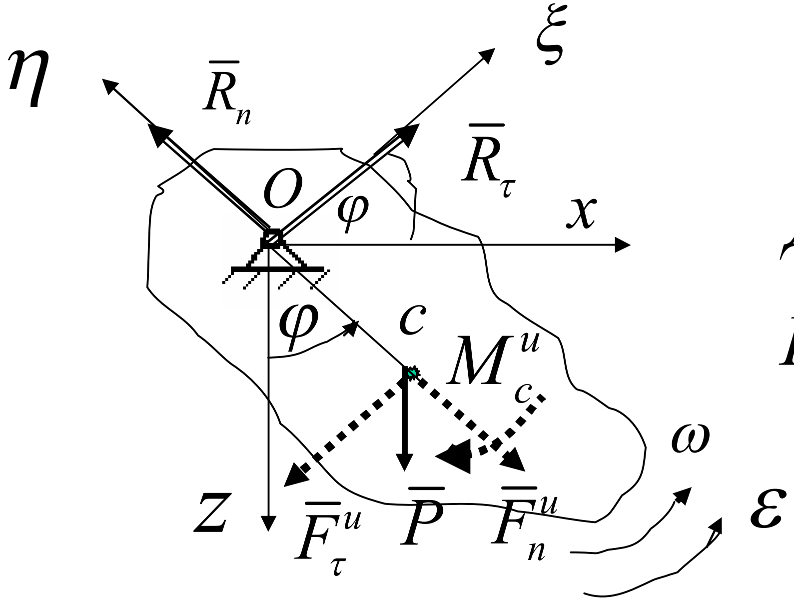
$m, \quad l$ - Масса и длина стержня

С-центр масс стержня.

$$F^u = ma_C = m\omega^2 \frac{l}{2}\sin\alpha.$$

$$OE = \frac{2}{3}l.$$

Пример. Определение реакции опоры физического маятника



$$Дано: \quad OC = h,\ m,\ J_c,\ P = mg$$

$$Нач.\ условия: \ \varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_0$$

Определить

реакцию опоры при $\varphi = \varphi_1 \le \pi / 2$

$$\sum F_{k\xi} = R_\tau - F_\tau^u - P \cdot \sin\varphi = 0; \qquad (1)$$

$$\sum F_{k\eta} = R_n - F_n^u - P \cdot \cos\varphi = 0; \qquad (2)$$

$$\sum m_o(\overline{F}_k) = -M_c^u - F_\tau^u \cdot h - P \cdot \sin\varphi \cdot h = 0. \qquad (3)$$

$$F_n^u = ma_c^n = m\dot{\varphi}^2 h; \Big| \ F_\tau^u = ma_c^\tau = m\ddot{\varphi}h; \Big| \ M_c^u = J_c\ddot{\varphi}.$$

Из (3) находим $\ddot{\varphi}(J_c + mh^2) = -Ph\sin\varphi;$

$J_c + mh^2 = J_o;\quad \dfrac{Ph}{J_o} = a;\qquad \ddot{\varphi} = -a\cdot\sin\varphi;\quad (4)$

Делаем замену $\dot{\varphi} = \omega;$ Тогда имеем $\ddot{\varphi} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{d(\omega^2)}{d\varphi};$

$d(\omega^2) = -2a\cdot\sin\varphi\cdot d\varphi;\qquad \omega^2 = 2a\cdot\cos\varphi + C;$

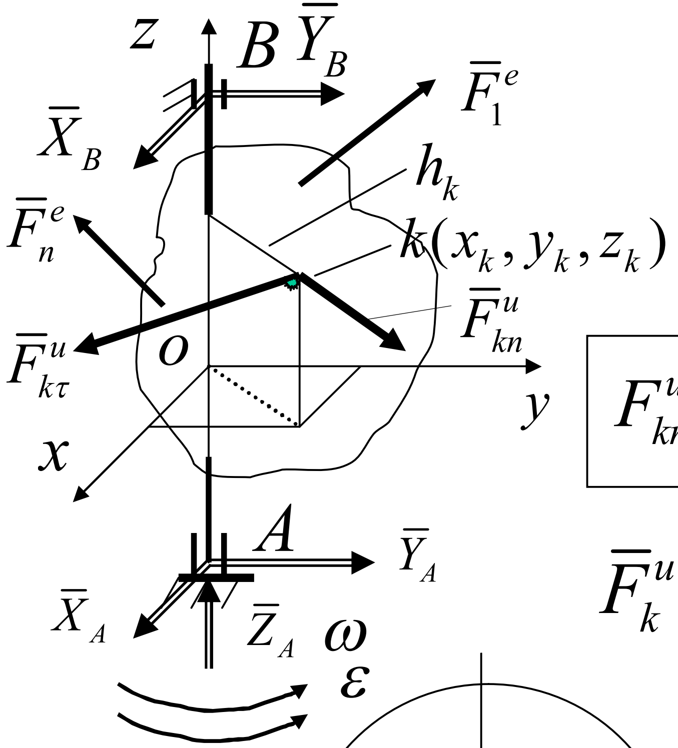
Из нач. условий $C = \omega_0^2 - 2a;$

$\dot{\varphi}^2 = \omega^2 = \omega_0^2 - 2a(1-\cos\varphi);$ (5) Из (1) и (2)

$$R_\tau(\varphi) = P\sin\varphi - mha\sin\varphi;$$

$$R_n(\varphi) = P\cos\varphi + mh[\omega_0^2 - 2a(1-\cos\varphi)].$$

§ 3. Определение реакций подшипников при вращении тела вокруг неподвижной оси

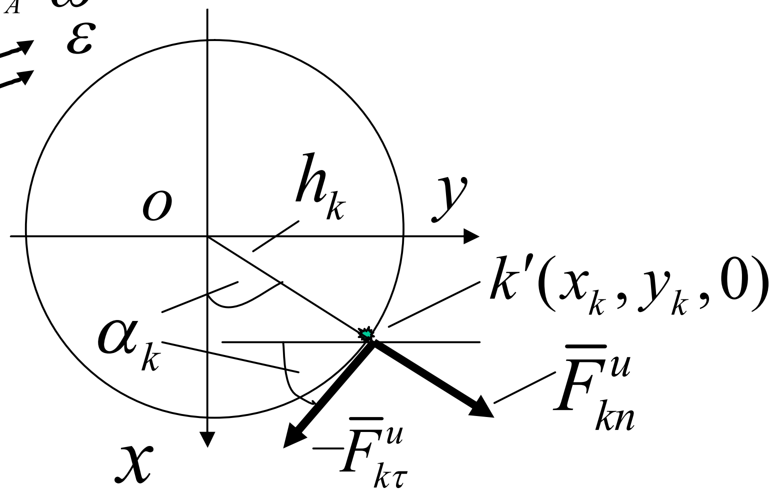


$$OA = a; \quad OB = b; \quad \bar{F}_k^e - внешн.\ силы$$

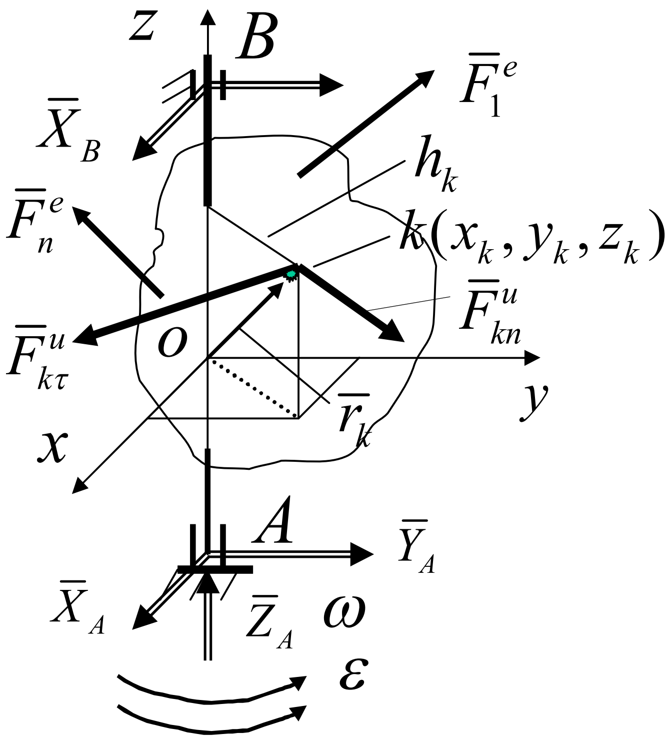
$$M - масса \quad тела$$

$$\boxed{F_{kn}^u = m_k a_k^n = m_k \omega^2 h_k; \quad F_{k\tau}^u = m_k a_k^\tau = m_k \varepsilon h_k.}$$

$$\bar{F}_k^u = \bar{F}_{kn}^u + \bar{F}_{k\tau}^u$$



$$\boxed{\begin{aligned} F_{kx}^u &= m_k x_k \omega^2 + m_k y_k \varepsilon; \\ F_{ky}^u &= m_k y_k \omega^2 - m_k x_k \varepsilon. \end{aligned}} \qquad (3.3)$$



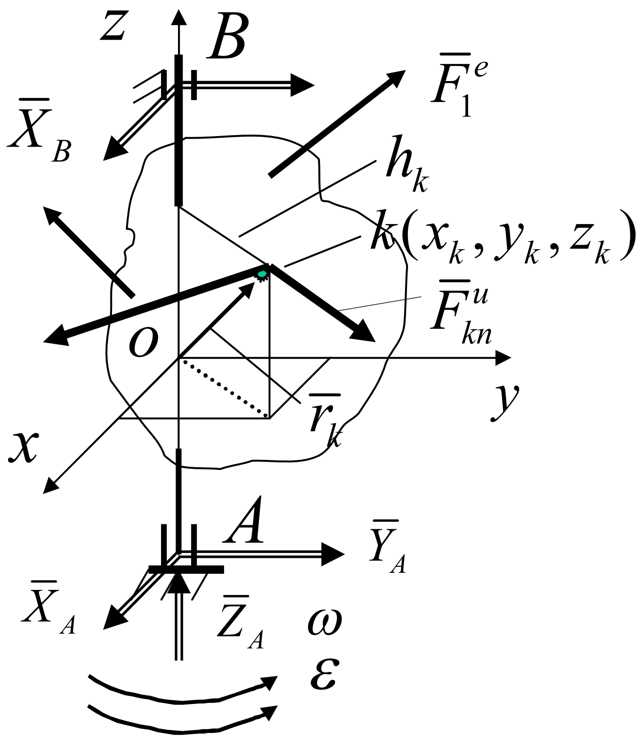
Силы инерции

$$\boxed{\begin{aligned} F_x^u &= \sum F_{kx}^u = Mx_c\omega^2 + My_c\varepsilon; \\ F_y^u &= \sum F_{ky}^u = My_c\omega^2 - Mx_c\varepsilon; \\ F_z^u &= 0. \ \ \textit{Здесь} \ \ M = \sum m_k. \end{aligned}}$$

Моменты сил инерции

$$\bar{M}_o^u = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^u = \sum \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_k & y_k & z_k \\ F_{kx}^u & F_{ky}^u & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} M_x^u &= J_{xz}\varepsilon - J_{yz}\omega^2; \\ M_y^u &= J_{yz}\varepsilon + J_{xz}\omega^2; \\ M_z^u &= -J_z\varepsilon. \end{aligned}} \qquad (3.4)$$



Уравнения кинетостатики

$$\boxed{\begin{aligned}
&X_A + X_B + \sum F_{kx}^e + F_x^u = 0;\\
&Y_A + Y_B + \sum F_{ky}^e + F_y^u = 0\ ;\\
&Z_A + \sum F_{kz}^e = 0\ ;\\
&Y_A a - Y_B b + \sum m_x(\bar{F}_k^e) + M_x^u = 0;\\
&X_B b - X_A a + \sum m_y(\bar{F}_k^e) + M_y^u = 0;\\
&\sum m_z(\bar{F}_k^e) + M_z^u = 0.
\end{aligned}} \qquad (3.5)$$

$$\left.\begin{aligned} X_A &= X'_A + X''_A;\\ Y_A &= Y'_A + Y''_A\ ; \end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} X_B &= X'_B + X''_B;\\ Y_B &= Y'_B + Y''_B\,. \end{aligned}\right| \qquad (3.6)$$

$X'_A, \ldots Y'_B -$ *дин. реакции*

Подставляя (3.4) в (3.5) и учитывая (3.6), получаем уравнения для определения динамических реакций

$$\boxed{\begin{aligned} X'_A + X'_B &= -Mx_c\omega^2 - My_c\varepsilon; \\ Y'_A + Y'_B &= -My_c\omega^2 + Mx_c\varepsilon; \\ Y'_A a - Y'_B b &= J_{yz}\omega^2 - J_{xz}\varepsilon; \\ X'_B b - X'_A a &= -J_{xz}\omega^2 - J_{yz}\varepsilon. \end{aligned}} \qquad (3.7)$$

x_c, y_c – *координаты центра масс.*

§ 4. Статическая и динамическая уравновешенность тела

4.1 | $x_c = y_c = 0,\ J_{xz} \neq 0 \quad или \quad J_{yz} \neq 0$

| *тело наз. статически уравно−м*

$$X'_A = -X'_B = \frac{J_{xz}\omega^2 + J_{yz}\varepsilon}{a+b}; \qquad Y'_A = -Y'_B = \frac{J_{yz}\omega^2 - J_{xz}\varepsilon}{a+b}.$$

4.2 | $X'_A = .. = Y'_B = 0,$ *то тело назыв. динам. уравн−м*

Условие динамич. уравновешенности тела

Из (3.7)

$$x_c\omega^2 + y_c\varepsilon = 0; \qquad J_{xz}\omega^2 + J_{yz}\varepsilon = 0;$$

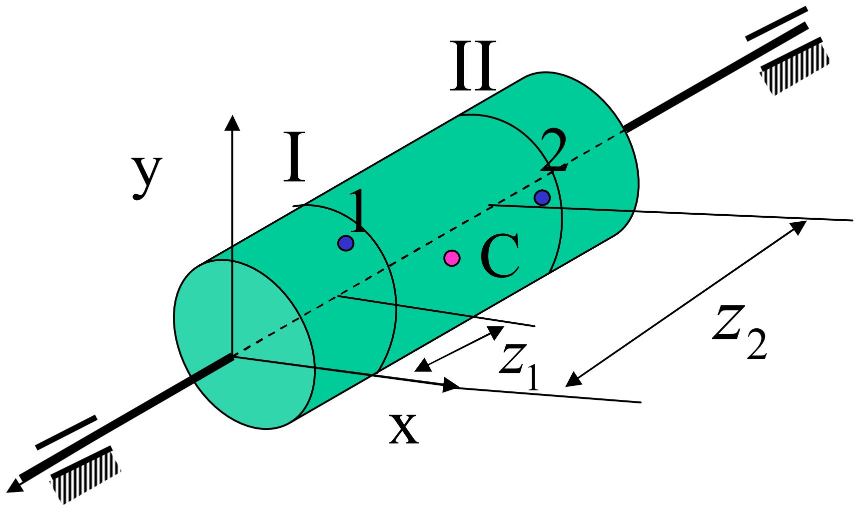
$$x_c\varepsilon - y_c\omega^2 = 0; \qquad J_{xz}\varepsilon - J_{yz}\omega^2 = 0.$$

т.к. $\Delta = \begin{vmatrix} \omega^2 & \varepsilon \\ \varepsilon & -\omega^2 \end{vmatrix} \neq 0,$ то $\boxed{x_c = y_c = 0, \quad J_{xz} = J_{yz} = 0.}$

4.3 Балансировка валов

$J_{xz} \neq 0, J_{yz} \neq 0.$

$M, x_c, y_c;$



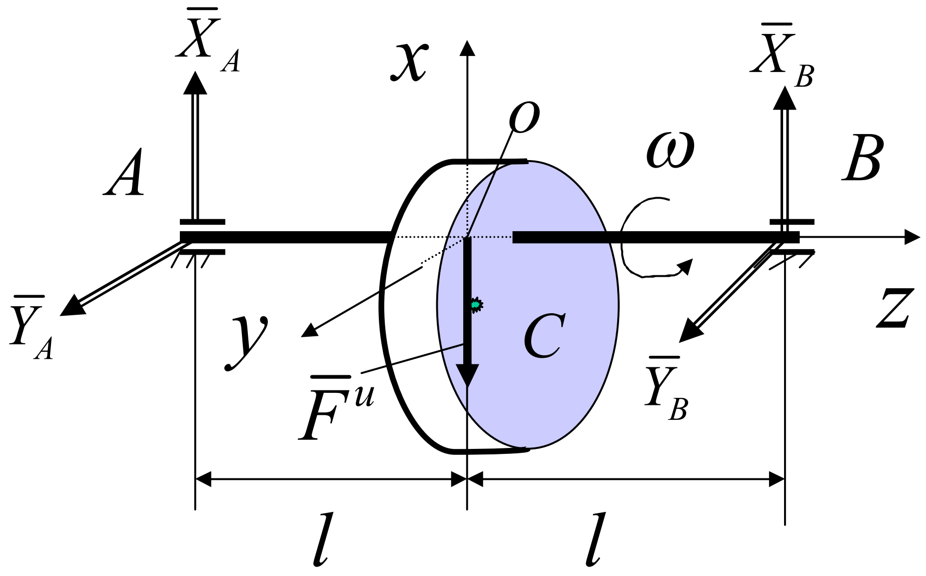
I,II-плоскости коррекции.

Коорд. т. 1: $x_1, y_1, z_1;$ Коорд. т. 2: $x_2, y_2, z_2.$

$$\boxed{\begin{aligned} &Mx_c + m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0, \quad My_c + m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0; \\ &J_{xz} + m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2 = 0, \quad J_{yz} + m_1 y_1 z_1 + m_2 y_2 z_2 = 0. \end{aligned}}$$

$m_1, m_2 -$ *корректирующие точечные массы*

Пример.



$$Дано: \; AO = OB = l, \; m = 200 \; кг$$

$$OC = e = 0,001 \; м, \quad n = 6000 \; об/мин.$$

$$F^u = ma_c = m\omega^2 e$$

$$J_{xz} = 0; \quad J_{yz} = 0. \qquad \text{Из (3.4)} \qquad M_x^u = 0; \quad M_y^u = 0.$$

$$X_A + X_B - F^u = 0; \quad Y_A + Y_B = 0;$$

$$\sum m_x = Y_A l - Y_B l = 0; \quad \sum m_y = X_B l - X_A l = 0.$$

$$Y_A = Y_B = 0; \qquad X_A = X_B = F^u / 2;$$

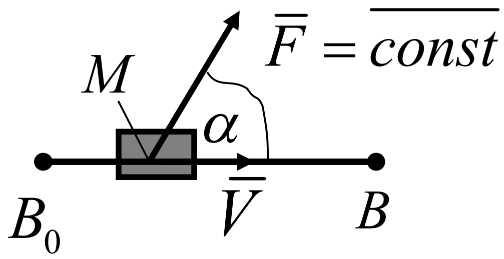
$$X_A = X_B = \frac{m\omega^2 e}{2} = \frac{200}{2}\left(\frac{2\pi \cdot 6000}{60}\right)^2 10^{-3} = 8 \cdot 10^4 \quad (H)$$

$$X_{Acm} = X_{Bcm} = mg / 2 \approx 10^3 \quad (H).$$

$$X_A / X_{Acm} = X_B / X_{Bcm} = 80.$$

Гл.IV. Общие теоремы динамики

§1.Работа и мощность силы



$$B_0 B = s$$

$$A = F \cdot s \cdot \cos\alpha$$

$$A = F_V \cdot s$$

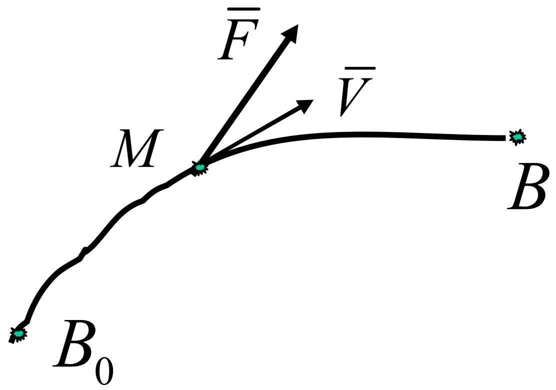
$$A = \overline{F} \cdot \overline{B_0 B}$$

$$d'A = \overline{F} \cdot d\,\overline{r} \quad - \quad \textit{элементарная работа}$$

$$d'A = \overline{F} \cdot \overline{V} \cdot dt \qquad (4.1)$$

$$d'A = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz \qquad (4.2)$$

Работа произвольной силы на любом перемещении



$$A = \int_{B_0}^{B} \overline{F} \cdot d\ \overline{r} = \int_{B_0}^{B} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \qquad (4.3)$$

$$N = \overline{F} \cdot \overline{V} = F \cdot V \cdot \cos(\overline{F},^\wedge \overline{V}) \quad - \quad \textit{мощность силы} \qquad (4.4)$$

$$N = F_V \cdot V$$

§2. Потенциальная энергия силового поля

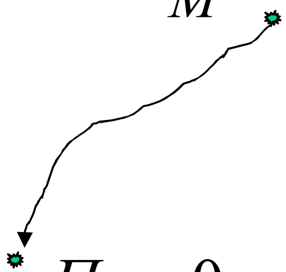
$$\overline{F}\cdot d\ \overline{r} = dU \quad U(x, y, z)\ -\ \textit{силовая функция}$$

$$\Pi = -U + const \quad \Pi\ -\ \textit{потенциальная энергия}$$

$$A = \int_{B_0}^{B} -d\Pi = \Pi_{B_0} - \Pi_B$$

$$\overline{F} = grad\ U = -grad\ \Pi$$

M $\quad \Pi \neq 0$



O $\quad \Pi_o = 0$

$$A = \Pi$$

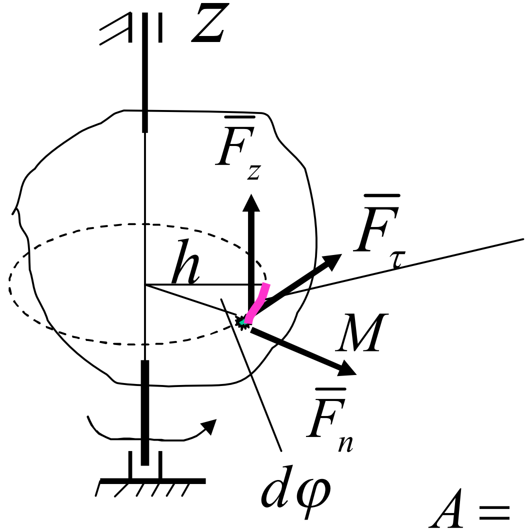
$$\boxed{\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial \Pi}{\partial x} \\ F_y &= -\frac{\partial \Pi}{\partial y} \end{aligned}} \qquad \boxed{F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}}$$

Лек. 4

§ 3. Работа и мощность сил, приложенных к А.Т.Т.

3.1 $A^i = \sum_k \int \overline{F}_k^i \cdot d\,\overline{r}_k = 0$ *или* $d'A^i = \sum_k \overline{F}_k^i \cdot d\,\overline{r}_k = 0$

3.2 *Работа и мощность сил при вращ. движ.*



$$\overline{F} = \overline{F}_n + \overline{F}_\tau + \overline{F}_z$$

$$ds = h\,d\varphi;$$

$$d'A = F_\tau \cdot h \cdot d\varphi = m_z(\overline{F}) \cdot d\varphi$$

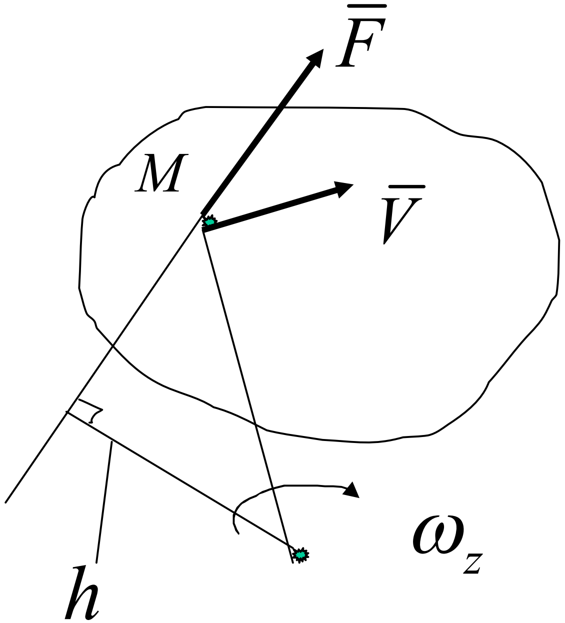
$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_z \cdot d\varphi$, *где* $M_z = m_z(\overline{F})$ *вращающий момент*

$M_z = const,$ *то* $A = M_z(\varphi - \varphi_0)$

$$N = M_z \omega_z \ (Bm) \qquad \textit{мощность момента}$$

$$1 \ Bm = 1 \ Дж / с. = 1 \ Н \cdot м / с.$$

3.3 плоское движение тела



$P - М.Ц.С.$

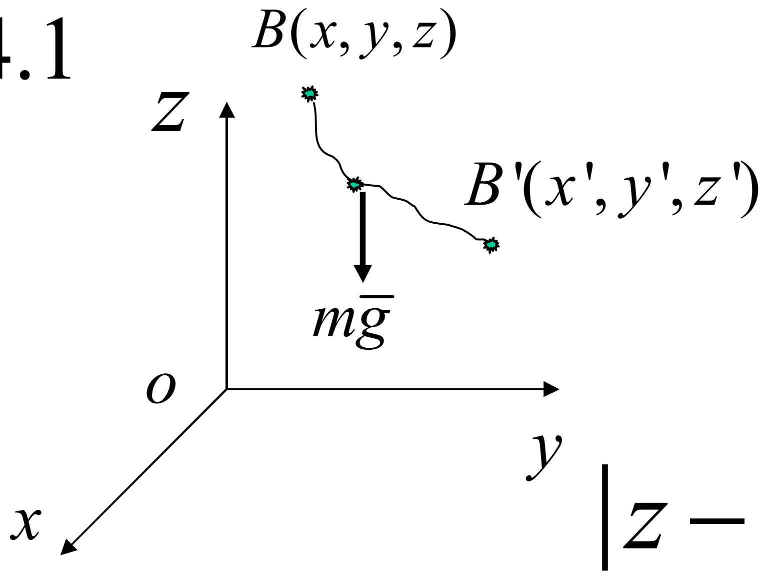
$$d'A = m_{pz}(\bar{F}) \cdot d\varphi$$

$$N = m_{pz}(\bar{F}) \cdot \omega_z$$

$$|\, m_{pz}(\bar{F}) | = F \cdot h$$

§ 4. Работа силы тяжести и упругой силы

4.1



$$F_x = F_y = 0 \ , \quad F_z = -mg$$

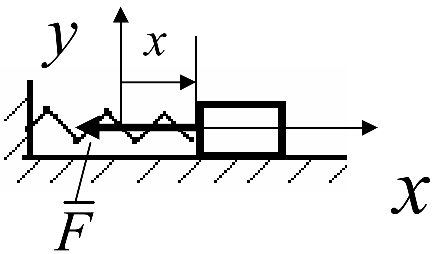
$$d'A = -mg \cdot dz$$

$$A = -mg\,(z' - z)$$

$$|z - z'| = h \quad ; \quad \boxed{A = \pm mgh}$$

$$\Pi = mgz \ ; \quad \Pi(0) = 0$$

4.2



$$F_x = -cx$$

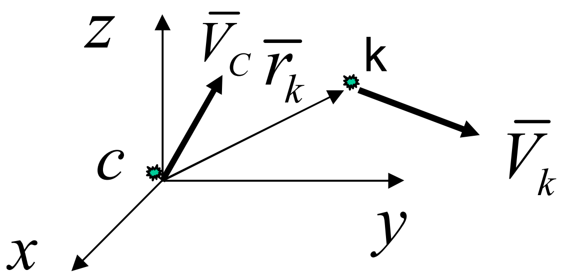
$$A = -cx^2/2$$

$$\boxed{\Pi = cx^2/2}$$

§ 5. Кинетическая энергия системы

$$T = \sum_k \frac{m_k V_k^2}{2} \qquad m_k, V_k \; - \; масса \; и \; скорость \; k-ой \; точки$$

Теорема Кенига



$$\bar{V}_k = \bar{V}_C + \bar{V}_k^r$$

$$\boxed{T = \frac{MV_C^2}{2} + T_C^r}$$

$$T_C^r = \sum_k \frac{m_k V_k^{r\,2}}{2}$$

§ 6. Кинетическая энергия А.Т.Т.

6.1 Поступательное движение

$$T = \frac{MV_C^2}{2}$$

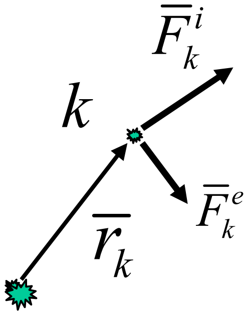
6.2 Вращательное движение

$$T = \frac{1}{2} J_z \cdot \omega^2$$

6.3 Плоское движение

$$T = \frac{1}{2} M \cdot V_C^2 + \frac{1}{2} J_C \cdot \omega^2$$

§ 7. Теорема об изменении кинетической энергии системы



$$m_k \frac{d\overline{V}_k}{dt} = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i\ , \quad (k = \overline{1, n})$$

$$d\ \overline{r}_k = \overline{V}_k \cdot dt$$

$$\boxed{d\ T = d'A^e + d'A^i}$$

$$\boxed{T - T_0 = A^e + A^i}$$

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = N^e + N^i}$$

§ 8. Закон сохранения механической энергии

Все силы являются потенциальными

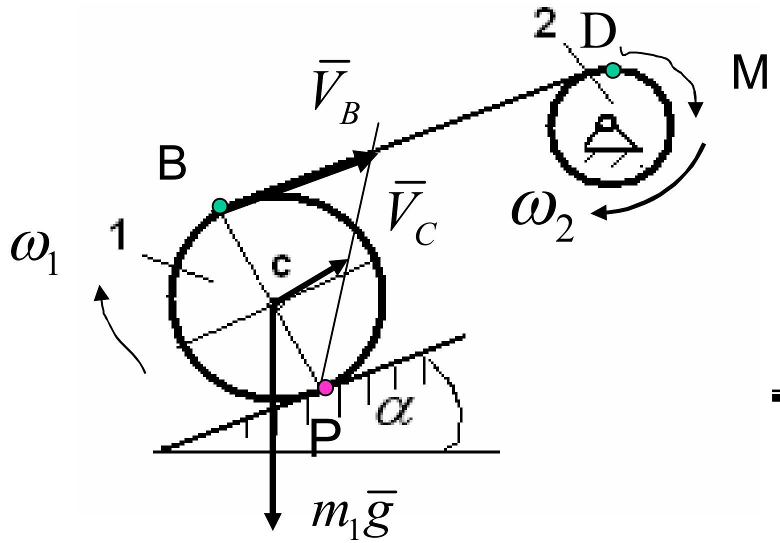
$$\bar{F}_k^e = -grad_k \Pi^e; \quad \bar{F}_k^i = -grad_k \Pi^i$$

$$d'A^e = -d\Pi^e; \quad d'A^i = -d\Pi^i$$

$$d(T + \Pi^e + \Pi^i) = 0$$

$$\boxed{T + \Pi^e + \Pi^i = const}$$

Пример



Дано: $\omega_2(0) = 0,$

$$m_1, m_2, r_1, r_2$$

Определить: $\omega_2(\varphi_2);\quad a_C.$

Искомая величина ω_2

P – мгн. центр скоростей

$$V_B = V_D = \omega_2 r_2;$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_2 r_2}{2r_1}; \qquad V_C = \omega_2 \cdot CP = \omega_2 r_2 / 2;$$

Перемещения

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_2 r_2}{2r_1}; \qquad S_C = \varphi_2 r_2 / 2.$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega_1^2 = \frac{3}{16} m_1 r_2^2 \omega_2^2; \qquad J_c = \frac{m_1 r_1^2}{2};$$

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = \frac{1}{4} m_2 r_2^2 \omega_2^2; \qquad J_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2};$$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} J_{np} \omega_2^2;$$ где $$J_{np} = \frac{3}{8} m_1 r_2^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2;$$

$$A = M\varphi_2 - m_1 g S_c \sin\alpha = M_{np}\varphi_2; \qquad M_{np} = M - m_1 g \sin\alpha \frac{r_2}{2};$$

$$T - T_0 = A; \qquad \frac{1}{2} J_{np} \omega_2^2 = M_{np} \cdot \varphi_2; \quad (*) \qquad \boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{M_{np}\varphi_2}{2J_{np}}};}$$

$$M_{np} > 0;$$

$$V_c = \omega_2 r_2 / 2; \qquad a_c = \varepsilon_2 r_2 / 2.$$

$$J_{np}\omega_2 \cdot \dot{\omega}_2 = M_{np}\dot{\varphi}_2;$$

$$\varepsilon_2 = M_{np} / J_{np};$$

$$\boxed{a_c = \frac{M_{np}}{J_{np}} \cdot \frac{r_2}{2}.}$$

§ 9. Количество движения системы

$$\bar{Q} = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \bar{V}_k; \qquad n \text{ — число точек системы.}$$

$$\bar{Q} = M \cdot \bar{V}_C; \qquad M \text{ — масса системы,}$$

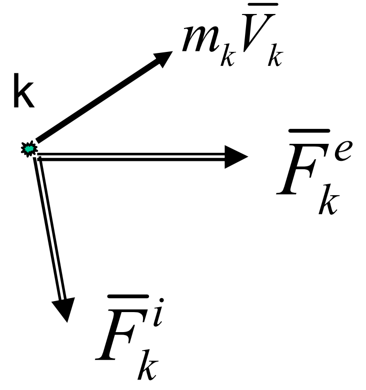
$$\bar{V}_C \text{ — скорость центра масс.}$$

$$Q_x = M\dot{x}_C; \quad Q_y = M\dot{y}_C; \quad Q_z = M\dot{z}_C.$$

Проекции количества движения на оси координат.

§ 10. Теорема об изменении количества движения системы

n-точек.



$$d(m_k\overline{V}_k) = \overline{F}_k^e dt + \overline{F}_k^i dt; \quad k = \overline{1,n}.$$

Элементарные импульсы сил

$$\boxed{d\overline{Q} = \sum_k \overline{F}_k^e dt} \qquad \overline{Q} = \sum_k m_k\overline{V}_k$$

$$\boxed{\overline{Q} - \overline{Q}_0 = \sum \int_{t_0}^{t} \overline{F}_k^e dt} \qquad \boxed{\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum \overline{F}_k^e \equiv \overline{F}^e}$$

$\int_{t_0}^{t} \overline{F}_k^e dt$ - импульс силы за время $(t - t_0)$.

§11.Теорема о движении центра масс системы.

$\bar{Q} = M \cdot \bar{V}_C$

$$\boxed{M \frac{d\bar{V}_C}{dt} = \bar{F}^e.}$$

$$M\ddot{x}_C = F_x^e; \quad M\ddot{y}_C = F_y^e; \quad M\ddot{z}_C = F_z^e.$$

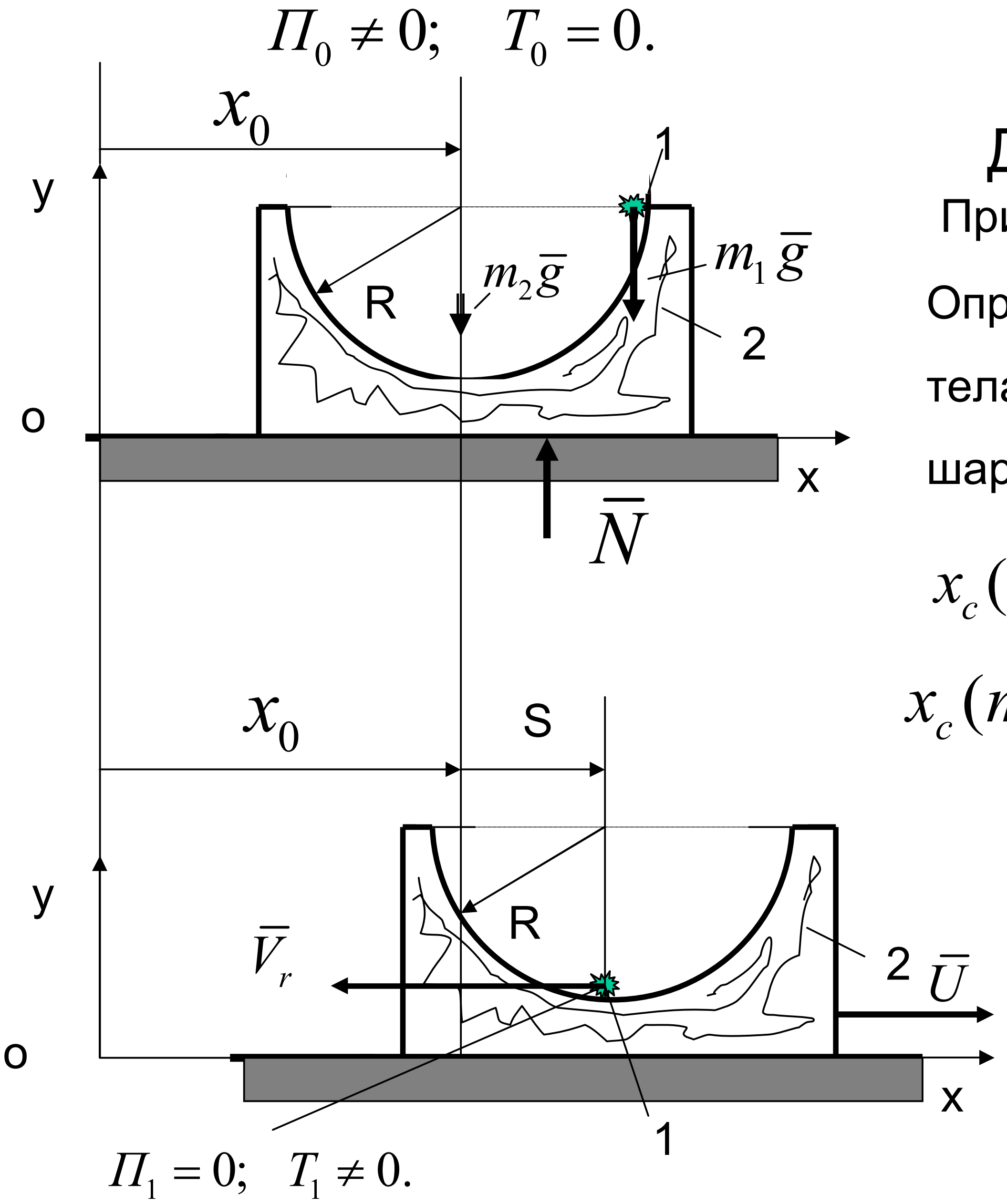
§12. Законы сохранения количества движения и движения центра масс.

1. Если $\bar{F}^e = 0, \quad то \boxed{\bar{Q} = \overline{const}, \quad \bar{V}_C = \overline{const}.}$

2. Если $\bar{F}^e \neq 0, \quad но \quad F_x^e = 0$, то $\boxed{Q_x = const, \; V_{CX} = \dot{x}_C = const}$

Если кроме этого $V_{CX}(0) = 0$, то $\boxed{x_C = const.}$

Пример.



Дано: $m_2 = 2 \cdot m_1$

При t=0 система не двигается

Определить смещение и скорость тела 2 при наинизшем положении шарика 1.

$$x_c(m_1 + m_2) = x_0 m_2 + (x_0 + R)m_1$$

$$x_c(m_1 + m_2) = (x_0 + s) \cdot (m_2 + m_1).$$

$$\boxed{S = R\frac{m_1}{m_1 + m_2};}$$

$$Q_x = m_2 U + m_1 (U - V_r) = 0; \quad (1)$$

T+П=const

$$m_1 g R = \frac{m_2 U^2}{2} + \frac{m_1 (U - V_r)^2}{2}; \quad (2)$$

Из (1) $\quad U - V_r = -\dfrac{m_2}{m_1} U;$ Подставляем в (2)

$$m_1 g R = \frac{m_2 U^2}{2} + \frac{m_1}{2} \cdot \left(\frac{m_2 U}{m_1} \right)^2 = \frac{m_1 m_2 + m_2^2}{m_1} \cdot \frac{U^2}{2};$$

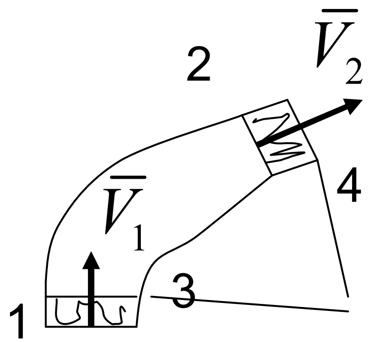
$$\boxed{U = m_1 \cdot \sqrt{\frac{2gR}{m_2 (m_1 + m_2)}}}$$

При $\quad m_2 = 2m_1;$

$$\boxed{S = R/3; \quad U = \sqrt{gR}/\sqrt{3}.}$$

§13. Теорема Эйлера о секундных количествах движения жидкости

$$Q_{mc} = \rho_1 s_1 V_1 = \rho_2 s_2 V_2$$



$t + dt$

Секундный массовый расход жидкости

$\overline{Q}_{12}$ - колич. движ. в момент t

$\overline{Q}_{34}$ - колич. движ. в момент t+dt

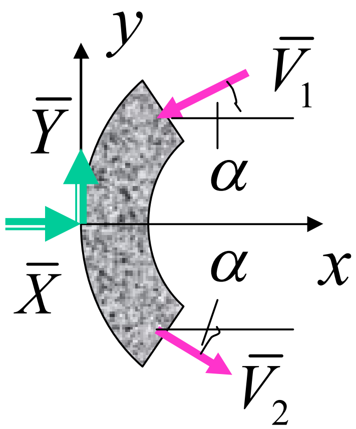
$$d\overline{Q} = \overline{Q}_{34} - \overline{Q}_{12} = (\overline{Q}_{12} + \overline{Q}_{24} - \overline{Q}_{13}) - \overline{Q}_{12} = \overline{Q}_{24} - \overline{Q}_{13}$$

$$d\overline{Q} = Q_{mc} dt \cdot \overline{V}_2 - Q_{mc} dt \cdot \overline{V}_1 \qquad \frac{d\overline{Q}}{dt} = \boxed{Q_{mc}(\overline{V}_2 - \overline{V}_1) = \sum \overline{F}_k^e}$$

$$\sum \overline{F}_k^e = \overline{F}^m + \overline{R}^{Tp} + \overline{P}_1 + \overline{P}_2 \qquad P_1 = p_1 s_1; \quad P_2 = p_2 s_2$$

Равнодействующие сил давления в сечениях 1и 2 со стор. отбр. жидк.

Пример 1. Горизонтальный участок нефтепровода имеет изогнутое колено под углом 2α . Определить при $\alpha = 45^\circ, 0^\circ$ динамическое давление нефти на колено нефтепровода, если его диаметр D=1020 мм, плотность нефти $\rho = 900 \quad кг/м^3$ и скорость её течения $V = 1 м/сек.$



Решение: Массовый сек. расход $Q_{mc} = \rho S V;$

$$S = \pi D^2 / 4 - площадь \quad сечения.$$

$V_1 = V_2 = V;$ Секундные количества движений

$$\bar{Q}_1 = Q_{mc}\bar{V}_1; \quad \bar{Q}_2 = Q_{mc}\bar{V}_2.$$

Уравнение Эйлера $\bar{Q}_2 - \bar{Q}_1 = \bar{X} + \bar{Y};$

$$Q_{mc} V \cos\alpha - (-Q_{mc} V \cos\alpha) = X; \qquad X = 2 Q_{mc} V \cos\alpha =$$

$$-Q_{mc} V \sin\alpha - (-Q_{mc} V \sin\alpha) = Y. \qquad = 2\rho S V^2 \cos\alpha;$$

$$Y = 0.$$

$$X\Big|_{\alpha=45^\circ} = 2\cdot 900\cdot 3{,}14\cdot(1{,}02^2/4)\cdot(\sqrt{2/2})\cdot 1 = 1040 \quad H.$$

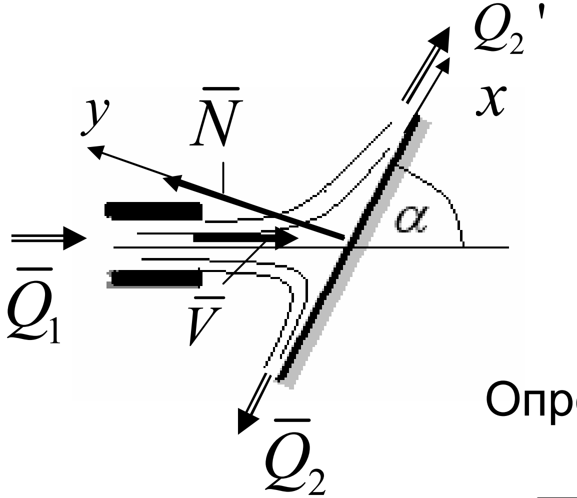
$$X\Big|_{\alpha=0^\circ} = 2\cdot 900\cdot 3{,}14\cdot\frac{1{,}02^2}{4}\cdot 1\cdot 1 = 1470 \quad H.$$

Если $V > 1$, то

$$X\Big|_{\alpha=45^\circ} = 1040\cdot V^2 \quad H;$$

$$X\Big|_{\alpha=0^\circ} = 1470\cdot V^2 \quad H.$$

Пример 2. Давление струи жидкости на стенку.



Дано: $\bar{V}$ -скорость струи;

$\rho -$ плотность жидкости;

S-сечение трубы.

Определить динамическое давление струи на стенку

$$\bar{Q}_2' + \bar{Q}_2 - \bar{Q}_1 = \bar{N}$$

Проецируем на ось y $\quad -(-Q_1 \sin\alpha) = N \quad Q_1 = Q_{mc} \cdot V = \rho s V \cdot V$

$$\boxed{N = \rho s V^2 \sin\alpha}$$

При $\alpha = \pi / 2$ получаем

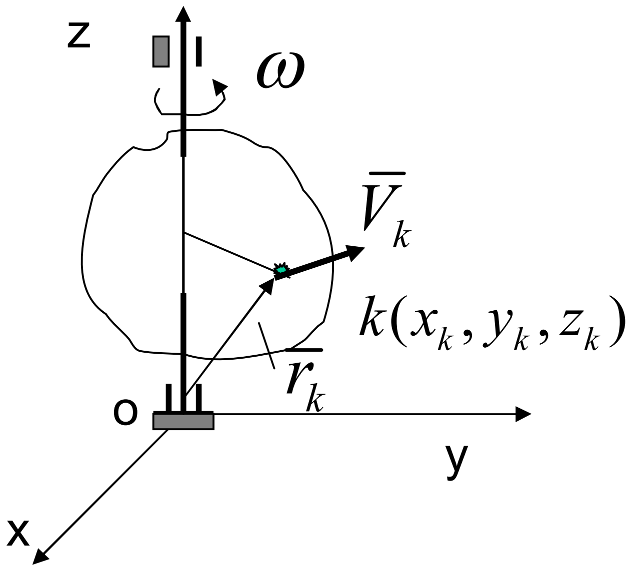
Формулу Д. Бернулли (1736 г.)

$$\boxed{N = \rho s V^2}$$

§14. Кинетический момент системы и А.Т.Т.

$$\bar{K}_o = \sum_k \bar{r}_k \times m_k \bar{V}_k$$

Кинет. момент вращающегося тела



$$\bar{V}_k = \bar{\omega} \times \bar{r}_k \qquad \bar{\omega} = \bar{\omega}(0, 0, \omega)$$

$$\bar{K}_o = -J_{xz}\omega \cdot \bar{i} - J_{yz}\omega \cdot \bar{j} + J_z\omega \cdot \bar{k};$$

$$K_x = -J_{xz} \cdot \omega \;;$$

$$K_y = -J_{yz} \cdot \omega \;;$$

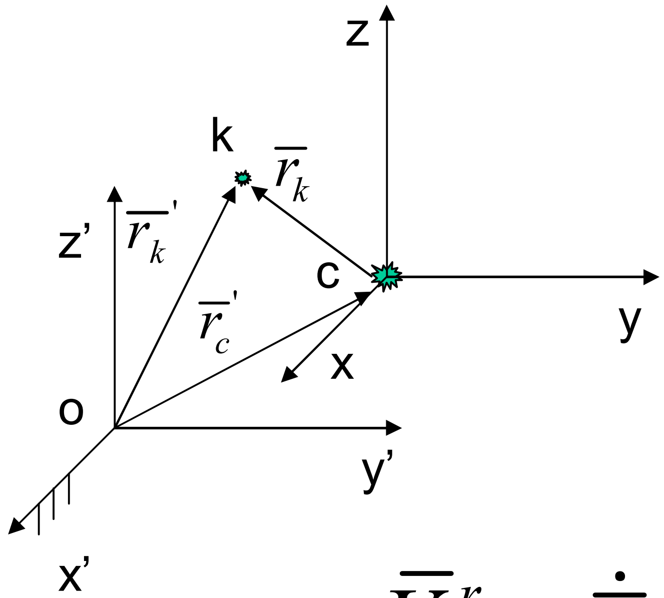
$$K_z = J_z \cdot \omega \;.$$

§15. Теорема об изменении кинетического момента системы относительно неподвижного центра

$$\boxed{\frac{d\bar{K}_o}{dt} = \sum \bar{m}_o(\bar{F}_k^e) \equiv \bar{M}_o^e.}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{K}_x &= \sum m_x(\bar{F}_k^e) \equiv M_x^e\ ; \\ \dot{K}_y &= \sum m_y(\bar{F}_k^e) \equiv M_y^e\ ; \\ \dot{K}_z &= \sum m_z(\bar{F}_k^e) \equiv M_z^e\ . \end{aligned}}$$

§16. Теорема моментов относительно центра масс



$$\overline{r}_k = \overline{r}_k^{\,'} - \overline{r}_c;$$

$$\dot{\overline{r}}_k = \overline{V}_k - \overline{V}_c.$$

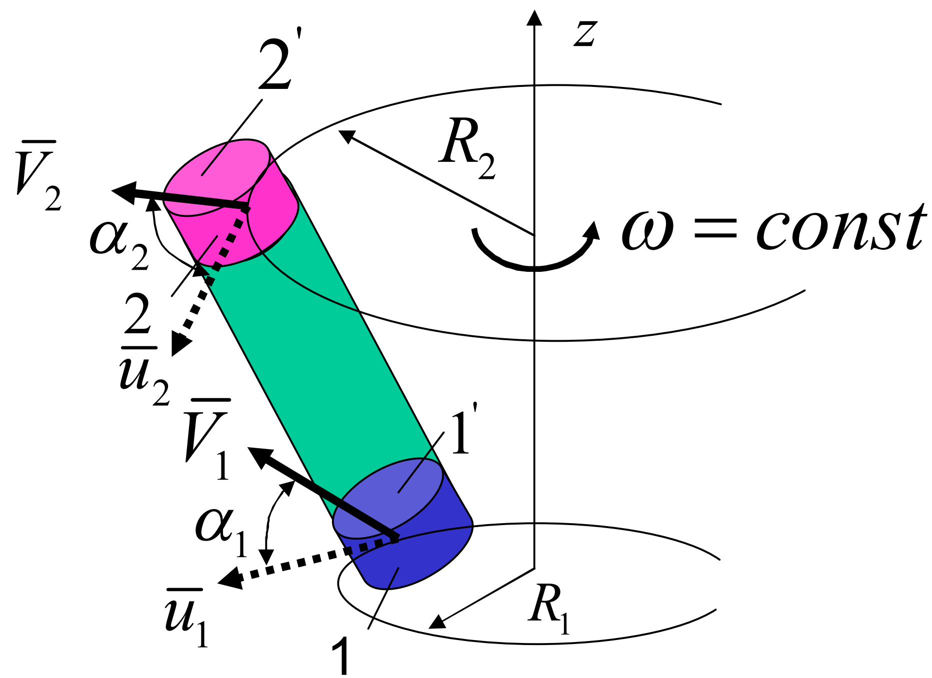
$$\boxed{\dot{\overline{K}}_c = \sum \overline{m}_c(\overline{F}_k^e) \equiv \overline{M}_c^e.}$$

$$\overline{V}_k^r = \dot{\overline{r}}_k; \quad \overline{V}_k = \overline{V}_k^r + \overline{V}_c.$$

$$\overline{K}_c = \sum \overline{r}_k \times m_k \overline{V}_k; \quad \overline{K}_c^r = \sum \overline{r}_k \times m_k \overline{V}_k^r.$$

$$\boxed{\overline{K}_c = \overline{K}_c^r.}$$

§17. Уравнение моментов для установившегося движения жидкости во вращающемся канале



Объем 1-2 во время t;

Объем $1' - 2'$ □ $t + dt$;

$$dK_z = K_{z1'2'} - K_{z12};$$

$$K_{z1'2'} = K_{z1'2} + K_{z22'};$$

$$K_{z12} = K_{z11'} + K_{z1'2};$$

$$dK_z = K_{z22'} - K_{z11'};$$

$$Q_{mc} = \rho S_1 V_{1n_1} = \rho S_2 V_{2n_2} -$$

Массовый сек. расход жидкости через сечения

$\rho -$ *плотность*;

$S_1, S_2 -$ *площади сеч.*

$V_{1n_1}, V_{2n_2} -$ *нормальные к сеч. составл. скоростей.*

Массы жидкости в объемах $1-1', 2-2'$ *равны* $Q_{mc}dt$;

$$dK_z = Q_{mc}dt(V_2 \cos\alpha_2 \cdot R_2 - V_1 \cos\alpha_1 \cdot R_1);$$

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e; \qquad \boxed{Q_{mc}(V_{u2}R_2 - V_{u1}R_1) = M_z^e;} \qquad (1)$$

$$V_{u1} = V_1 \cos\alpha_1, V_{u2} = V_2 \cos\alpha_2 -$$

окружные составл. абсолютной скорости потока

Секундное изменение момента количества движения жидкости, находящейся в замкнутом объеме вращающегося канала , равно моменту относительно оси вращения канала внешних сил, действующих на выделенный объем жидкости.

§18.Основное уравнение центробежного насоса

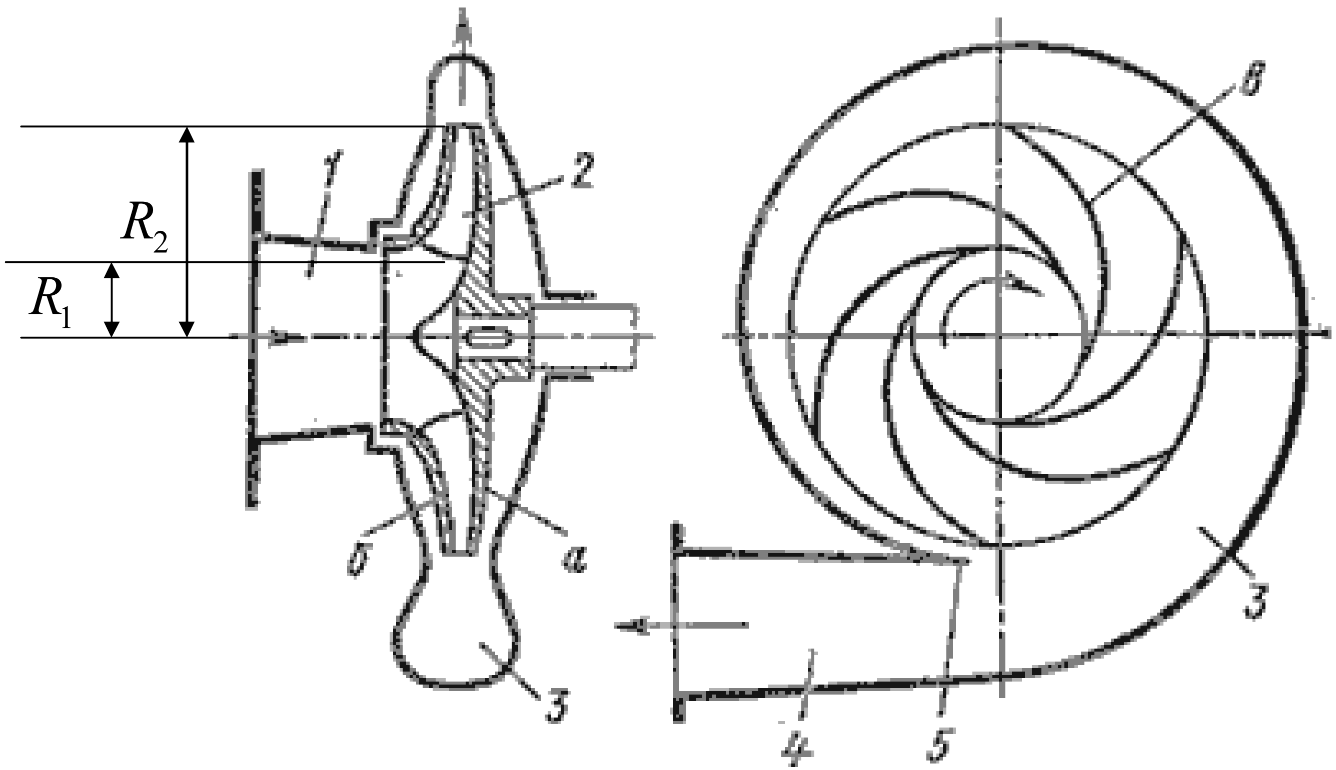
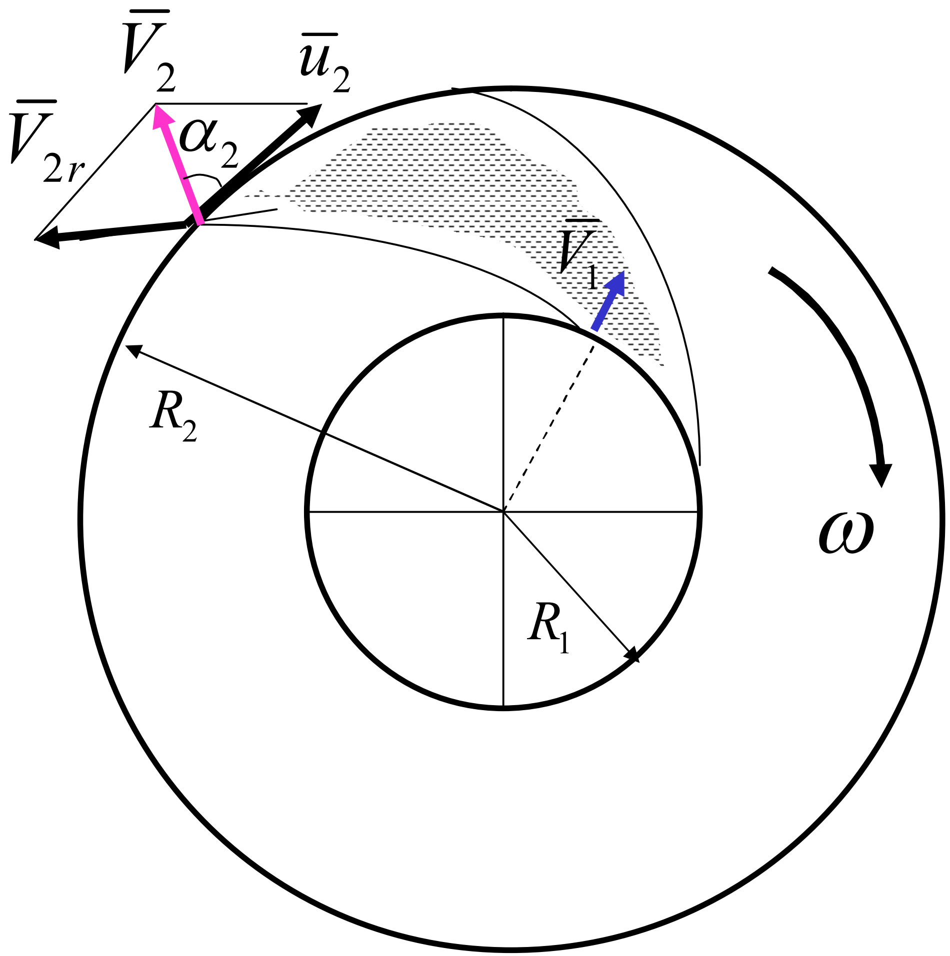


Схема центробежного насоса

1-подвод; 2- рабочее колесо; 3- отвод; 4- диффузор; 5- язык; а и *б* – ведущий и ведомый диски рабочего колеса; *в*-лопатки.

Расчетная схема $\alpha_1 = \pi/2 = 90^\circ$, то из (1)



$$M_z^e = Q_k V_2 cos\alpha_2 \cdot R_2;$$

Q_k – *массовый расход жидкости через колесо (массовая подача насоса)*;

M_z^e – *момент сил, приложенных к жидкости со стороны лопаток и дисков.*

Мощность, передаваемая колесом жидкости

$$N_T = M_z^e \omega = Q_k R_2 \omega V_2 \cos\alpha_2 = Q_k u_2 V_2 \cos\alpha_2;$$

$u_2 = R_2\omega - \textit{переносная (окружная) скорость}$

частиц жидкости на выходе из колеса;

$$H_T = \frac{N_T}{Q_k g} = \frac{u_2 V_2 \cos\alpha_2}{g} -$$

Теоретический напор колеса.

η - к.п.д. насоса

$$\boxed{H = H_T \eta = \frac{\eta}{g} u_2 V_2 \cos\alpha_2}$$

Реальный напор колеса-мощность жидкости, получаемая от колеса, отнесенная к весовому расходу.

Основное уравнение центробежного насоса

§19. Законы сохранения кинетического момента

1. $\bar{M}_c = \sum \bar{m}_c(\bar{F}_k^e) = 0,$ то $\bar{K}_c = \overline{const}.$

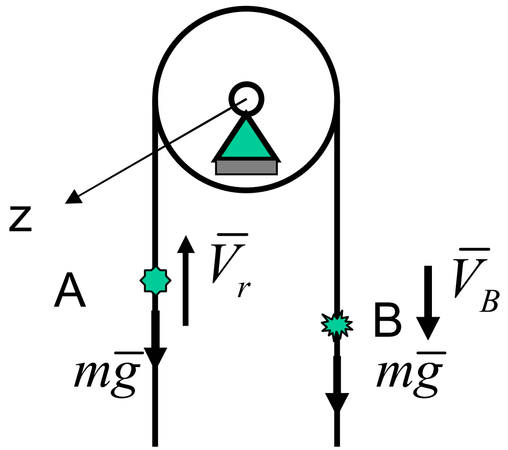
2. $\bar{M}_o \neq 0,$ *но* $\sum m_z(\bar{F}_k^e) = 0$ тогда

$$K_z = const.$$

Если $K_z = J_z \cdot \omega$, то

$$\boxed{J_z \cdot \omega = const = J_{z0} \cdot \omega_0}$$

Пример.



Дано: $m_{блока} = 0; \quad \bar{V}_r = \overline{const}$

Определить $\bar{V}_B$

$$K_z = -mV_B - m(V_r + V_B) = 0.$$

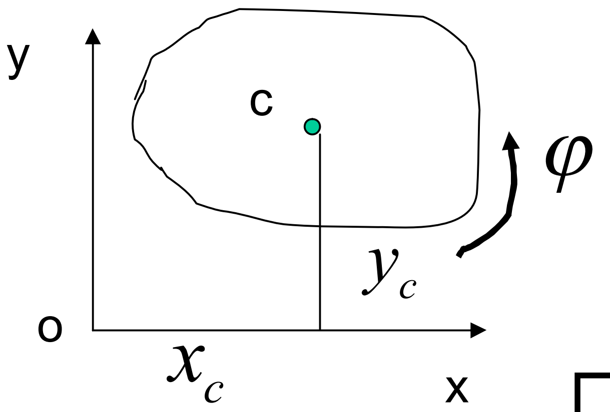
$$\underline{V_B = -V_r / 2}$$

§20. Дифференциальное уравнение вращательного движения А.Т.Т.

$$K_z = J_z\omega_z = J_z\dot{\varphi}$$

$$\boxed{J_z\ddot{\varphi} = \sum m_z(\bar{F}_k^e) \equiv M_z^e.}$$

§21. Дифференциальные уравнения плоского движения А.Т.Т.



$$Q_x = m\dot{x}_c; \quad Q_y = m\dot{y}_c.$$

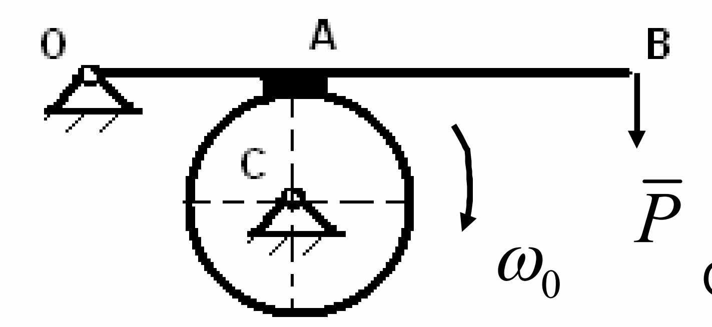
$$K_{cz} = J_c\dot{\varphi}.$$

$$m\ddot{x}_c = \sum F_{kx}^e;$$

$$m\ddot{y}_c = \sum F_{ky}^e;$$

$$J_c\ddot{\varphi} = \sum m_c(\overline{F}_k^e).$$

Пример: Тормоз.

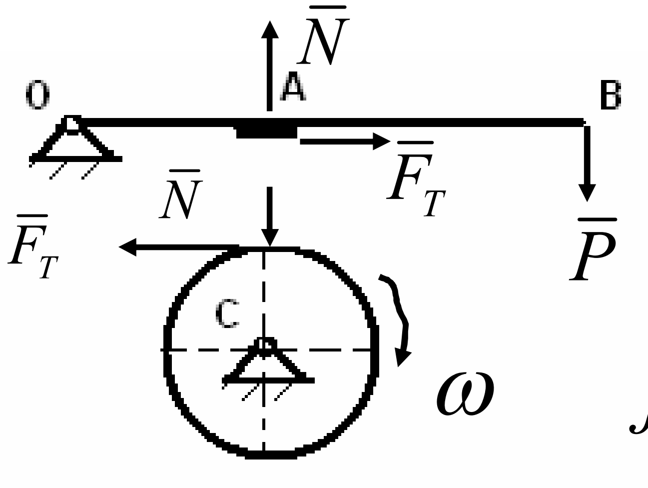


Дано: $\omega_0 = 96\ c^{-1} \approx 917\ об/мин.$

OB=3 OA; P=10 н.

Определить время торможения шкива $-\ \tau$,

если $m = 5\ кг.;\ R = 0.1\ м.\ f = 0.2 -$ коэф. тр. скольжения.



$$J_c\dot{\omega} = -F_T \cdot R; \qquad F_T = fN;$$

$$N \cdot OA = P \cdot OB \rightarrow N = 3 \cdot P \qquad F_T = 3fP$$

$$J_C = mR^2/2; \qquad \dot{\omega} = -\frac{6fP}{mR} = -24\ c^{-1} \equiv -\varepsilon;$$

Нач. условие: $\omega(0) = \omega_0 = 96\ c^{-1};$ $\quad \omega(\tau) = -\varepsilon \cdot \tau + \omega_0 = 0;$

$$\omega(t) = -\varepsilon \cdot t + \omega_0; \qquad \tau = \omega_0/\varepsilon = 96/24 = 4\ c.$$

Гл.V. Элементы аналитической механики
§ 1. Классификация связей

1.конечные, геометрические или **голономные**

$$f(x_k, y_k, z_k, t) = 0 \quad \textit{или} \quad \textit{короче} \quad f(\overline{r}_k, t) = 0$$

дифференц., кинемат. или **неголономные**

$$f(\overline{r}_k, \dot{\overline{r}}_k, t) = 0$$

2.установ., стационарные или **склерономные**

неустан., нестацион. или **реономные**

3.удержив., двухсторонние или **неосвобожд.**

неудержив., одностор. или **освобождающие**

$$f(\overline{r}_k, \dot{\overline{r}}_k) \geq 0$$

§ 2. Виртуальные и действительные перемещения точек системы

$\delta\bar{r}_k$ – вирт. перемещ. точки

$\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$ – проекции на оси коорд.

$f(x_k, y_k, z_k, t) = 0$ – уравн. связи

$$\delta f \equiv \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\delta x_k + \frac{\partial f}{\partial y_k}\delta y_k + \frac{\partial f}{\partial z_k}\delta z_k\right) = 0$$

$d\bar{r}_k, dx_k, dy_k, dz_k$ – вектор и проекции действ. перемещ.

$$df = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}dx_k + \frac{\partial f}{\partial y_k}dy_k + \frac{\partial f}{\partial z_k}dz_k\right) + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0.$$

§ 3. Степень свободы. Обобщенные координаты.

S=3n-L; число степеней свободы

L- число связей вида $f_j(x_k, y_k, z_k, t) = 0 \quad (j = \overline{1, L}).$

n-число точек механ. системы

$q_1, q_2, \dots q_s$- обобщенные координаты

Свойства обобщ. коорд.

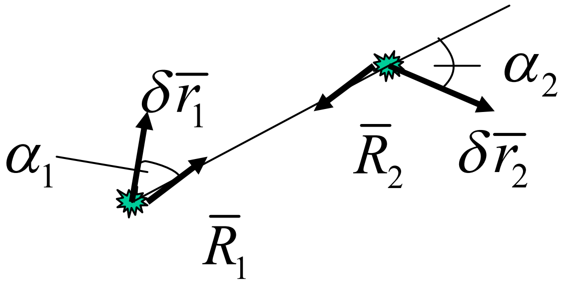
1. *Число обобщ. коорд.* $=$ *числу степ. свободы* s;

2. $\overline{r_k} = \overline{r_k}(q_1, q_2, ..q_s; t); \quad x_k, y_k, z_k \,|\, q_1, ..q_s, t$

3. $f_j(x_k(q_i), y_k(q_i), z_k(q_i), t) \equiv 0. \quad i = \overline{1, s}; \quad j = \overline{1, L}.$

§ 4. Идеальные связи.

$$\boxed{\sum_k \overline{R}_k \cdot \delta\overline{r_k} = \sum_k (R_{kx}\delta x_k + R_{ky}\delta y_k + R_{kz}\delta z_k) = 0.}$$



$$\overline{R}_1 = -\overline{R}_2$$

$$\delta r_1 \cdot \cos\alpha_1 = \delta r_2 \cdot \cos\alpha_2$$

$$\overline{R}_1 \cdot \delta\overline{r_1} + \overline{R}_2 \cdot \delta\overline{r_2} = R_1\delta r_1 \cos\alpha_1 + R_2\delta r_2 \cos(\pi - \alpha_2) = 0.$$

§ 5. Принцип виртуальных перемещений

(Принцип Лагранжа)

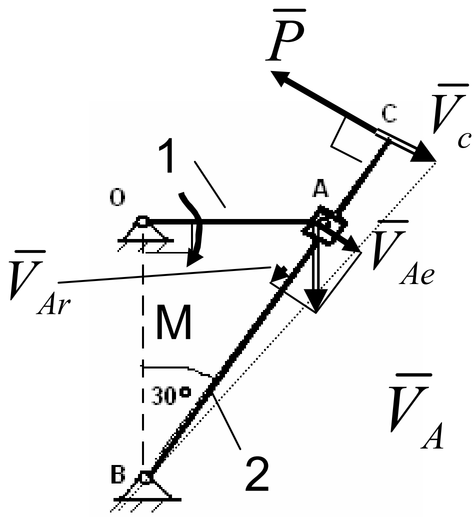
$$\delta A_F \equiv \boxed{\sum_k \overline{F}_k \cdot \delta \overline{r}_k = 0}$$

$$\delta A_F = \sum_k (F_{kx} \delta x_k + F_{ky} \delta y_k + F_{kz} \delta z_k) = 0$$

Если связи стационарные, то $\delta \overline{r}_k = \overline{V}_k^B \cdot \delta t$

$$\sum_k \overline{F}_k \cdot \overline{V}_k^B = \boxed{\sum_k F_k \cdot V_k^B \cdot \cos(\overline{F}_k, \overline{V}_k)}$$

Пример. Равновесие кривошипно - кулисного механизма



Дано: OA=r, BC=3r, сила P.

Определить момент M при равновесии механизма в горизонтальной плоскости.

Уравн. принципа: $$M \cdot \omega_1 - P \cdot V_c = 0$$

$$V_{Ae} = V_A \cdot \sin 30^\circ = \omega_1 \cdot r / 2;$$

$$V_c / V_{Ae} = CB / AB = 3/2;$$

$$V_c = \frac{\omega_1 r}{2} \cdot \frac{3}{2}$$

$$\boxed{M = \frac{3}{4} \cdot \mathrm{P} \cdot \mathrm{r}.}$$

§ 6. Уравнения равновесия механической системы в обобщенных координатах.

$$\overline{r}_k = \overline{r}_k(q_1, ..., q_s; t);$$ s — Число степеней свободы.

$$\delta \overline{r}_k = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i;$$

$$\delta A_F = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \cdot \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{s} Q_i \cdot \delta q_i = 0;$$

где $Q_i = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \cdot \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_i}$ Обобщенные силы.

$$\boxed{Q_i = 0, \qquad i = \overline{1, s}.}$$

§ 7.Вычисление обобщенных сил.

$$1.\ Q_i = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \cdot \frac{\partial \overline{r_k}}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{n} (F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i}).$$

$$2.\ \delta q_i \neq 0; \quad \delta q_j = 0, \quad j = \overline{1,n}; \quad j \neq i.$$

$$\delta A_F^i = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \cdot \frac{\partial \overline{r_k}}{\partial q_i} \delta q_i = Q_i \cdot \delta q_i. \qquad \boxed{Q_i = \delta A_F^i / \delta q_i.}$$

Для стационарных связей

$$3.\ \dot{q}_i \neq 0; \quad \dot{q}_j = 0, \quad j = \overline{1,n}; \quad j \neq i. \quad \overline{V}_k = \dot{\overline{r}}_k = \frac{\partial \overline{r_k}}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i$$

$$\delta N_F^i = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \cdot \overline{V}_k = Q_i \cdot \dot{q}_i; \qquad \boxed{Q_i = \delta N_F^i / \dot{q}_i.}$$

$$4.\ \Pi = \Pi(x_k, y_k, z_k; t) \qquad \bar{F}_k = -grad_k \Pi;$$

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_k} \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right);$$

$$\Pi = \Pi[\bar{r}_k(q_1, .., q_n; t)], \quad k = 1, .., n.$$

$$\boxed{Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}.}$$

§ 8. Общее уравнение динамики.
(Принцип Даламбера-Лагранжа)

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(\overline{F}_k - m_k\ddot{\overline{r}}_k)\cdot\delta\overline{r}_k = 0.}$$

$$\sum_k[(F_{kx} - m_k\ddot{x}_k)\delta x_k + (F_{ky} - m_k\ddot{y}_k)\delta y_k + (F_{kz} - m_k\ddot{z}_k)\delta z_k] = 0.$$

$$\delta A_F + \delta A_{F^u} = 0.$$

§ 9. Уравнения Лагранжа II-го рода

n-число точек; $f_j(\overline{r_k}, t) = 0; \quad k = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, L}. \quad (L < 3n).$

S=3n-L – число степеней свободы.

$q_1, q_2, .., q_s$ -- обобщенные координаты.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i;} \quad (i = \overline{1, s}).$$

Нач. условия.

$$q_i(0) = q_i^0;$$

$$\dot{q}_i(0) = \dot{q}_i^0.$$

$$i = 1, .., s.$$

$T = T(q_i, \dot{q}_i, t)$ -- кинетич. энергия системы.

$Q_i = Q_i(q_i, \dot{q}_i, t)$ -- обобщенные силы.

§ 9. Уравнения Лагранжа II-го рода для консервативных механических систем

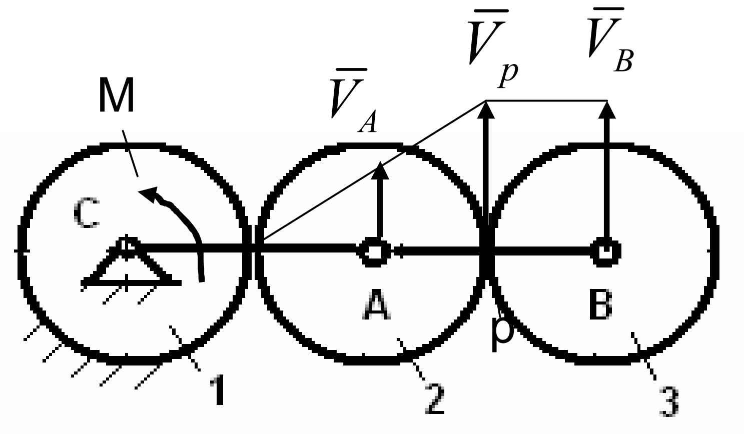
$$\bar{F}_k = -grad_k \Pi(x_k, y_k, z_k); \qquad k = \overline{1, n}.$$

$$x_k, y_k, z_k \,\Big|\; q_1, .., q_s; \qquad Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}; \quad i = \overline{1, s}.$$

$$L = T(q_i, \dot{q}_i, t) - \Pi(q_i).$$ Функция Лагранжа или кинетический потенциал.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \qquad i = \overline{1, s}.}$$

Пример 1. Планетарный механизм в горизонтальной плоскости



Дано: $m_2 = m_3 = m, \quad m_{CB} = 0.$

$$r_1 = r_2 = r_3 = r.$$

Определить угловое ускорение кривошипа СВ -- ε

За обобщенную координату примем угол поворота кривошипа-- φ

$\omega_{kp} = \omega = \dot{\varphi}.$ -- обобщенная скорость.

$$V_A = \omega \cdot 2r, \quad V_p = 2 \cdot V_A = 4\omega r; \qquad V_B = \omega \cdot CB = \omega 4r = V_p$$

$$\omega_2 = V_A / r = 2\omega, \quad \omega_3 = 0.$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m V_B^2.$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m V_A^2 + \frac{1}{2} \Im_A \omega_2{}^2. \quad \Im_A = \frac{mr^2}{2}.$$

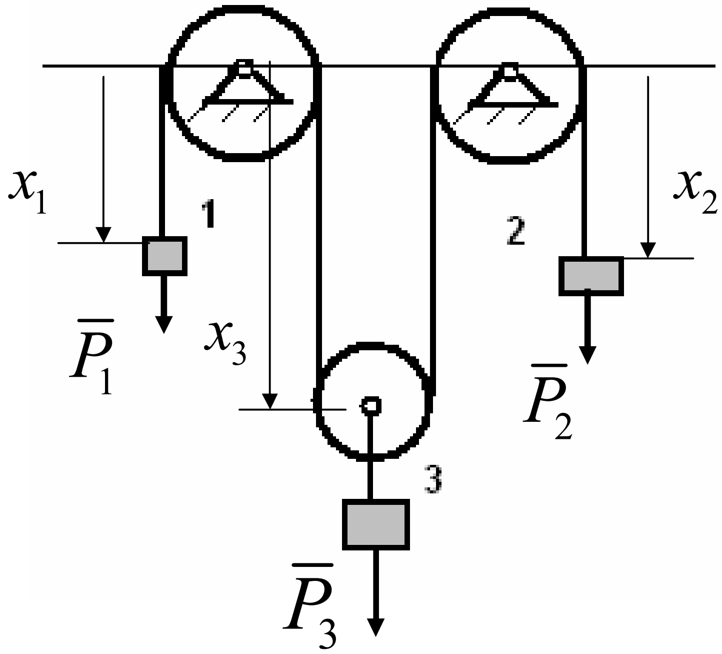
$$T = T_2 + T_3 = 11mr^2\dot{\varphi}^2; \qquad Q_\varphi = M.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

$$22mr^2\ddot{\varphi} = M.$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} = \varepsilon = \frac{M}{22mr^2}}$$

Пример 2. Система блоков



Дано: P_1, P_2, P_3

Определить ускорения грузов

Уравнение связи $x_1 + x_2 + 2x_3 = const.$

За обобщенные координаты примем - $x_1, x_2.$

$$\dot{x}_3 = -\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2}$$

$$T = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}\frac{P_3}{g}\dot{x}_3^2;$$

$$\Pi = -P_1x_1 - P_2x_2 - P_3x_3 + const.$$

Функция Лагранжа

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}\frac{P_3}{g}\frac{(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2}{4} +$$

$$+P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 \cdot (-\frac{x_1 + x_2}{2}) + const.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{P_1}{g}\dot{x}_1 + \frac{P_3}{4g}(\dot{x}_1 + \dot{x}_2);$$

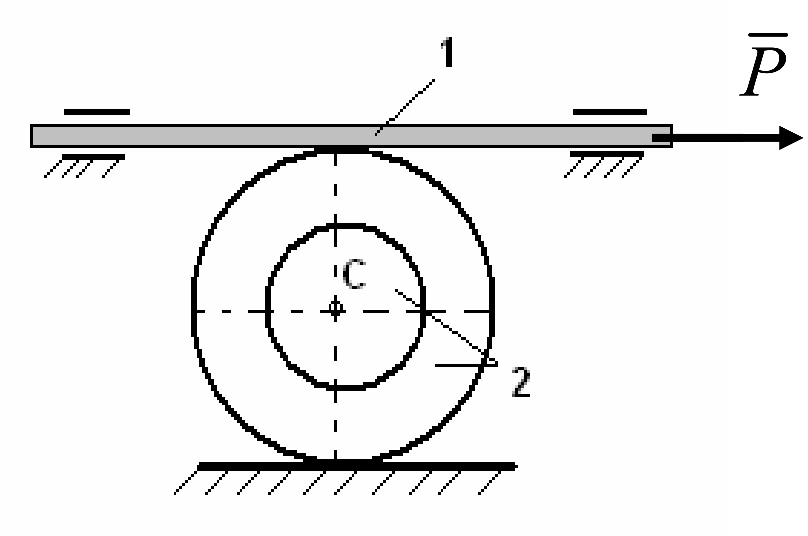
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \frac{P_2}{g}\dot{x}_2 + \frac{P_3}{4g}(\dot{x}_1 + \dot{x}_2).$$

При $P_1 = P_2 = P_3 = P$

$$\boxed{\begin{aligned} 5\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 &= 2g; \\ \ddot{x}_1 + 5\ddot{x}_2 &= 2g. \end{aligned}}$$

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \frac{1}{3}g, \qquad \ddot{x}_3 = -\frac{1}{3}g.$$

ЗАДАЧА



Дано: P-движущая сила;

$$m_1 = m, \quad m_2 = 2m;$$

$$r_2 = r, \quad R_2 = 2r;$$

$\rho_c = 2r$ -радиус инерции тела 2 относительно его центра С.

Пренебрегая трением в опорах стержня 1 и скольжением между телами 1 и 2, а также между телом 2 и опорной плоскостью, определить ускорение точки С- a_c и силы сцепления между телами- F_1 и плоскостью- $F_{сц}$.

$a_c =$

$F_1 =$

$F_{сц} =$

Ответы

$$a_c = \frac{3}{19}\frac{P}{m} \qquad F_1 = \frac{10}{19}P \qquad F_{сц} = \frac{4}{19}P$$