ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
“**ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**”

ФИЗИКА

СБОРНИК ЗАДАЧ

(с решениями)

ЧАСТЬ 2

Электричество и магнетизм

*Допущено Министерством образования и науки
Российской Федерации в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений, обучающихся
по направлениям и специальностям в области техники и технологий*

2-е издание

Издательство
Томского политехнического университета
2010

УДК 53(076)
ББК 22.3я73
Ф50

Авторы

Ю.И. Тюрин, В.В. Ларионов, И.П. Чернов, Н.А. Антропов, В.П. Борисов, А.А. Ботаки, Б.В. Горячев, Н.А. Ефремова, Е.И. Купрекова, Т.Н. Мельникова, О.Ю. Петрова, Э.В. Поздеева, В.Ф. Рудковская, Л.И. Семкина, Л.В. Сериков, Ю.А. Сивов, Е.А. Склярова, Т.В. Смекалина, Н.Д. Толмачева, Э.Б. Шошин

Ф50 **Физика. Сборник задач (с решениями). Часть 2. Электричество и магнетизм:** учебное пособие / под ред. Ю.И. Тюрина, В.В. Ларионова, И.П. Чернова; Томский политехнический университет. – 2-е изд., – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 431 с.

ISBN 5-7511-1822-7

Учебное пособие включает около 1000 задач по всем разделам II части курса физики «Электричество и магнетизм». Каждый раздел содержит краткие теоретические сведения в виде основных формул, задачи с решениями и задачи для самостоятельного внеаудиторного анализа. Основное внимание уделено методике решения задач, их подробному анализу и применению полученных решений в технических устройствах.

Предназначено для преподавателей, студентов бакалавров и магистров технических университетов, ориентировано на организацию самостоятельной индивидуальной работы.

УДК 53(076)
ББК 22.3я73

Рецензенты

член-корреспондент РАО, д.ф.-м.н., профессор *В.В. Тихомиров;*
зав. кафедрой физики Московского государственного индустриального университета, д.ф.-м.н., профессор *Н.П. Калашников;*

ISBN 5-511-1822-7

Предисловие

Сборник задач является дополнением ко 2-му тому курса «Физика, Часть 2. Электричество и магнетизм» (авторы: Ю.И.Тюрин, Ю.Ю.Крючков, И.П.Чернов). Он содержит около 1000 задач, более трети из которых имеют подробные решения и анализ. Часть задач составлена по публикациям известных российских физиков и носит оригинальный характер.

Задачи располагаются в строгой логической последовательности. Задачи для самостоятельного решения приведены в каждой главе. Некоторые разделы содержат также качественные задачи с краткими примерами ответов к ним. Такие подсказки формируют логическую базу для самостоятельного анализа, с их помощью обучение физике приносит наибольшую пользу, т.к. являет собой вид творчества, которое проявляет себя при индивидуальной работе с задачами.

Инновационное образование требует от студентов владеть навыками технических решений хотя бы в игровом варианте. Этому в немалой степени соответствует изучение физики, что хорошо проявляется при решении задач.

По отдельным темам авторами глав являются Н.А.Антропов (23), В.П.Борисов (22), А.А.Ботаки (15), Б.В.Горячев (14), Н.А.Ефремова (11), Е.И.Купрекова (27), В.В.Ларионов (1–6, 9–13, 16–18, 21, 23), Т.Н.Мельникова (12, 13), О.Ю.Петрова (21, 25), Э.В.Поздеева (5, 6), В.Ф.Рудковская (1, 10), Л.И.Семкина (7, 8), Л.В.Сериков (19), Ю.А.Сивов (24), Е.А.Склярова (16, 17, 18), Т.В.Смекалина (18), Н.Д.Толмачева (2, 3, 9, 20, 23), Ю.И.Тюрин (9, 26), И.П.Чернов (20), Э.Б.Шошин (22).

1. ЗАКОН КУЛОНА. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТОЧЕЧНЫХ И РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ЗАРЯДОВ. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ

Основные формулы и обозначения

Закон Кулона $$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\left(\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}\right) = -\mathbf{F}_2,$$

где $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная; $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9\cdot10^9$ м/Ф.

Принцип суперпозиции $$\mathbf{F} = \sum_k \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q q_k}{r_k^2}\frac{\mathbf{r}_k}{r_k} = \sum_k \mathbf{F}_k .$$

Закон сохранения зарядов $q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_n = \text{const}$.

Полезно различать три случая:

1) взаимодействие точечных зарядов;
2) взаимодействие точечных и неточечных зарядов;
3) взаимодействие неточечных зарядов с системой неточечных зарядов.

Примеры решения задач

Задача 1. Два положительных заряда q_1 и q_2 находятся на расстоянии r друг от друга. Определить местоположение, величину и знак заряда q_3, чтобы все заряды находились в равновесии.

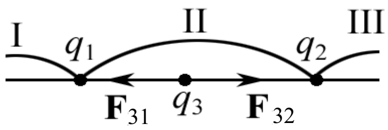


Рис. 1.1

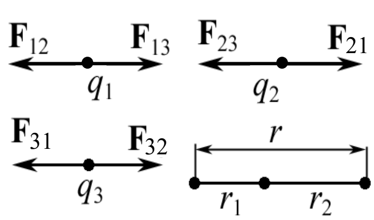


Рис. 1.2

Решение: Необходимым, но недостаточным условием равновесия зарядов q_1, q_2 и q_3 является требование расположения зарядов вдоль одной прямой. На рис. 1.1 показаны три области I, II и III. Располагая последовательно заряд q_3 в областях I, II и III, приходим к выводу, что $q_3 < 0$ и он должен быть расположен в области II (Силы $\mathbf{F}_{31}$ и $\mathbf{F}_{32}$ должны быть равны по модулю).

Кроме того, равнодействующая всех сил, действующих на любой заряд, должна быть равна нулю: $F_{12} = F_{13}$; $F_{21} = F_{23}$; $F_{31} = F_{32}$, (см. схему рис. 1.2). Тогда для заряда q_1 получим

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 (r_1 + r_2)^2} - \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = 0 \text{ или } \frac{q_2}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{q_3}{r_1^2}. \tag{1}$$

Аналогично для двух других пар зарядов

$$\frac{q_3}{r_2^2} = \frac{q_1}{(r_1 + r_2)^2}. \qquad (2)$$

$$\frac{q_2}{r_2^2} = \frac{q_1}{r_1^2}; \qquad (3)$$

Система трех уравнений (1) – (3) с тремя неизвестными имеет следующее решение:

$$r_1 = \frac{r}{1 + \sqrt{q_2/q_1}};$$

$$\frac{1}{\sqrt{q_3}} = \frac{1}{\sqrt{q_1}} + \frac{1}{\sqrt{q_2}} \quad \text{отсюда} \quad q_3 = \frac{q_1 q_2}{\left(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}\right)^2}.$$

Ответ: $r_1 = \dfrac{r}{1 + \sqrt{q_2/q_1}}$; $q_3 = \dfrac{q_1 q_2}{\left(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}\right)^2}$.

Задача 2. Два шарика одинаковых радиусов и массы подвешены на нитях так, что их поверхности соприкасаются. После сообщения шарикам заряда $q_0 = 4 \cdot 10^{-7}$ Кл они оттолкнулись друг от друга и разошлись на угол 60°. Найти массу шариков, если расстояние от точки подвеса до центра шарика равно 20 см.

Дано:
$q_0 = 4 \cdot 10^{-7}$ Кл
$\alpha = 30°$
$l = 0{,}2$ м
$g = 9{,}8$ м/с^2
m – ?

Решение: Обозначим угол между нитями 2α (рис. 1.3), где $\alpha = 30°$. На каждый шарик действуют три силы: сила тяжести $\mathbf{P}$, кулоновская сила $\mathbf{F}_K$ и сила натяжения нити $\mathbf{T}$.

Так как шарики находятся в равновесии, то

$$\mathbf{P} + \mathbf{F}_K + \mathbf{T} = 0.$$

Система уравнений в проекциях на ось x и y позволяет записать:

$$F_K = P \cdot \mathrm{tg}\alpha, \text{ где } P = mg; \; F_K = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Так как шарики одинаковые, то из закона сохранения заряда $q + q = q_0$, $q = q_0/2$.

Из треугольника (рис. 1.3) $r = 2l\sin\alpha$.

Окончательно имеем

$$m = \frac{q_0^2}{64\pi\varepsilon_0 g l^2 \sin^2\alpha \cdot \mathrm{tg}\alpha};$$

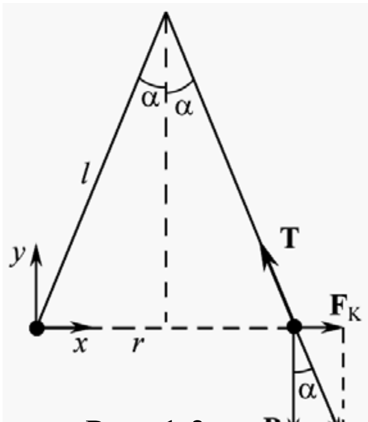


Рис. 1.3

$$m = \frac{(4\cdot 10^{-7})^2}{64\cdot\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 9{,}8\cdot 0{,}2^2\cdot \sin^2 30^\circ \mathrm{tg} 30^\circ} = 1{,}6\cdot 10^{-3} \text{ кг.}$$

Ответ: 1,6 г.

Задача 3. Заряд $q > 0$ равномерно распределен по тонкому кольцу радиусом a. На расстоянии z от оси кольца находится точечный заряд q_0. Найти силу взаимодействия кольца с зарядом q_0 как функцию z. Вычислить $F(z)$, если $q = q_0 = 1$ нКл, $a = 10$ см, $z = 30$ см.

Дано:
$q = 1\cdot 10^{-9}$ Кл
$q_0 = 1\cdot 10^{-9}$ Кл
$a = 0{,}1$ м
$z = 0{,}3$ м
F – ?

Решение: Имеет место 2-ой тип задач: взаимодействие точечного и неточечного зарядов. Для решения задачи необходимо ввести понятие линейной плотности заряда $\tau = dq/dl$, где dl – элемент кольца с зарядом dq, и, пользуясь принципом суперпозиции, найти сумму элементарных сил взаимодействия q_0 и dq

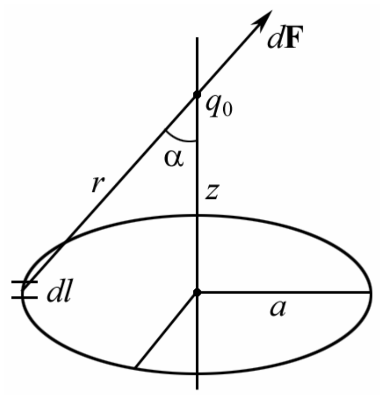


Рис. 1.4

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 dq}{r^2}.$$

При равномерном распределении заряда q по кольцу

$$\tau = q/(2\pi a);\ dq = \tau\, dl.$$

Тогда $$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 \tau dl}{r^2}.$$

Для всех элементов кольца (рис. 1.4) угол α и r будут постоянными. Составляющая силы

$$dF_z = dF\cos\alpha, \text{ где } \cos\alpha = \frac{z}{r} = \frac{z}{\left(a^2+z^2\right)^{1/2}};$$

$$dF_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0\tau dl\cdot z}{\left(a^2+z^2\right)^{3/2}}.$$

Интегрирование полученного выражения приводит к следующему простому результату:

$$F = F(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0 z}{\left(a^2+z^2\right)^{3/2}}. \qquad (1)$$

Для анализа положим, что z >> a, тогда $F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qq_0}{z^2}$ – закон Кулона взаимодействия двух точечных зарядов. Подставляя в (1) числовые значения, получим

$$F = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1 \cdot 10^{-9} \cdot 1 \cdot 10^{-9} \cdot 0{,}3}{\left(0{,}1^2 + 0{,}3^2\right)^{3/2}} = 85{,}4 \cdot 10^{-9}\ \text{Н} = 85{,}4\ \text{нН}.$$

Ответ: 85,4 нН.

Задача 4. Три одинаковых положительных заряда $q = 10^{-9}$ Кл каждый расположены по вершинам равностороннего треугольника. Какой отрицательный заряд нужно поместить в центре треугольника, чтобы сила притяжения с его стороны уравновесила силы взаимного отталкивания зарядов, находящихся в вершинах?

Дано:	
$q = 10^{-9}$ Кл $\alpha = 60°$	**Решение:** Все три заряда, расположенные по вершинам треугольника, находятся в одинаковых условиях (рис. 1.5). Поэтому достаточно рассмотреть любой из трех зарядов, например q_1, находящийся в равновесии с зарядом, помещенным в центре.
$q_4 - ?$	

В соответствии с принципом суперпозиции заряд q_1 будет находиться в равновесии, если сумма действующих на него сил равна нулю:

$$\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 = \mathbf{F} + \mathbf{F}_4 = 0, \qquad (1)$$

где $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$ – силы, с которыми соответственно действуют на заряд q_1 заряды q_2, q_3 и q_4; $\mathbf{F}$ – равнодействующая сил $\mathbf{F}_2$ и $\mathbf{F}_3$.

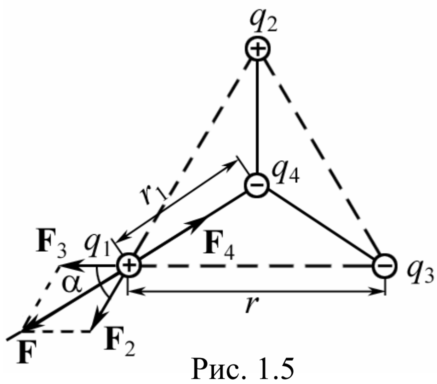


Рис. 1.5

Так как силы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}_4$ направлены по одной прямой, то векторное равенство (1) можно заменить скалярным равенством

$$F - F_4 = 0 \text{ или } F_4 = F.$$

Выразив в последнем равенстве F через F_2 и F_3 и, учитывая, что $F_3 = F_2$, получим

$$F_4 = F_3\sqrt{2(1+\cos\alpha)} = 2F_3\cos(\alpha/2). \qquad (2)$$

Подставим в (2) $F_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_4}{\varepsilon r_1^2}$ и $F_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{\varepsilon r^2}$, имея в виду, что $q_1 = q_2 = q_3 = q$,

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_4}{\varepsilon r_1^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2}{\varepsilon r^2}\cos(\alpha/2),$$

откуда

$$q_4 = 2q\frac{r_1^2}{r^2}\cos(\alpha/2).$$

Из рис. 1.5 получим $r_1 = \frac{r}{2\cos(\alpha/2)}$, тогда

$$q_4 = \frac{q}{2\cos(\alpha/2)} = \frac{10^{-9}}{2\cdot\cos(30^\circ)} = 5{,}77\cdot 10^{-10}\ \text{Кл} = 0{,}577\ \text{нКл}.$$

Ответ: $q_4 = 0{,}577$ нКл.

Задача 5. Два шарика одинаковых радиусов и массы подвешены на нитях одинаковой длины $l = 20$ см так, что их поверхности соприкасаются. После сообщения шарикам заряда q шарики разошлись на угол $2\alpha_1 = 60°$. Найти плотность ρ_1 материала шариков, если при их погружении в керосин угол расхождения стал равным $2\alpha_2 = 54°$.

Дано:
$l = 0{,}2$ м
$\alpha_1 = 30°$
$\alpha_2 = 27°$
$\varepsilon_1 = 1$
$\varepsilon_2 = 2$
$\rho_2 = 800$ кг/м^3

ρ_1 – ?

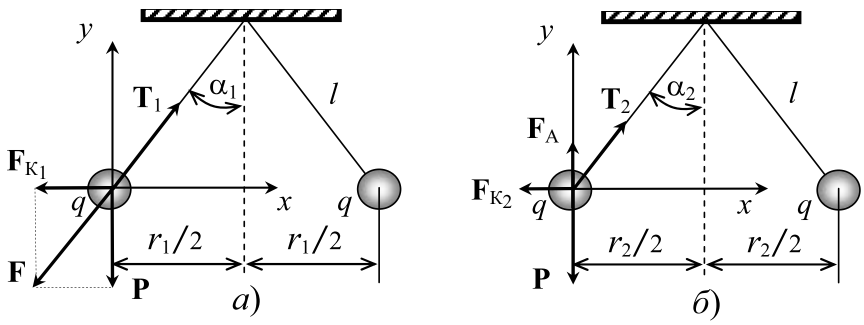


Рис. 1.6

Решение: На каждый шарик до погружения в керосин действуют три силы: сила тяжести **P**, сила кулоновского отталкивания $\mathbf{F}_{\text{К}_1}$ и сила натяжения нити $\mathbf{T_1}$. Обозначим угол между нитями $2\alpha_1$ (рис. 1.6, *а*).

Так как шарики находятся в равновесии, то

$$\mathbf{P} + \mathbf{F}_{\text{К}_1} + \mathbf{T_1} = \mathbf{F} + \mathbf{T_1} = 0,$$

где **F**– равнодействующая сил **P** и $\mathbf{F}_{\text{К}_1}$.

l

Но $$F_{\text{К}_1} = P\,\text{tg}\alpha_1 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 r_1^2} \text{ и } r_1/2 = l\sin\alpha_1.$$

Тогда окончательно

$$P = \frac{F_{\text{К}_1}}{\text{tg}\,\alpha_1} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 4l^2\sin^2\alpha_1\text{tg}\,\alpha_1}. \qquad (1)$$

При погружении шариков в керосин на каждый шарик стала дополнительно действовать архимедова сила $\mathbf{F}_\text{А}$, направленная вверх (рис. 1.6, *б*), и изменилась величина кулоновской силы. Для шарика, находящегося в керосине, имеем

$$P - F_\text{А} = \frac{F_{\text{К}_2}}{\text{tg}\,\alpha_2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 4l^2\sin^2\alpha_2\text{tg}\,\alpha_2}. \qquad (2)$$

В уравнении (2)

$$P - F_\text{А} = (\rho_1 - \rho_2)\,Vg, \qquad (3)$$

где ρ_1 – плотность материала шарика; ρ_2 – плотность керосина; V – объем шарика; g – ускорение свободного падения.

Из (1), (2) и (3) имеем

$$\frac{P-F_1}{P}=\frac{\varepsilon_1\sin^2\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_1}{\varepsilon_2\sin^2\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_2}=\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1},$$

откуда

$$\rho_1=\rho_2\Bigg/\left(1-\frac{\varepsilon_1\sin^2\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_1}{\varepsilon_2\sin^2\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_2}\right)$$

Подставляя числовые данные задачи, получим $\rho_1 = 2558$ кг/м^3.

Ответ: $\rho_1 = 2558$ кг/м^3.

Задача 6. Полусфера несет заряд, равномерно распределенный с поверхностной плотностью $\sigma = 1$ нКл/м^2. Найти силу F, действующую на заряд $q_0 = 1$ нКл, помещенный в геометрический центр полусферы.

Дано:
$\sigma = 1\cdot10^{-9}$ Кл/м^2
$q_0 = 1\cdot10^{-9}$ Кл

F – ?

Решение: Непосредственно применить закон Кулона нельзя. Полусферу разобьем (рис. 1.7) на тонкие кольца площадью dS с зарядом

$$dq = \sigma dS = 2\pi r\sigma\cdot Rd\varphi.$$

Взаимодействие q_0 с заряженным кольцом описано в задаче 3.

$$dF=\frac{q_0dqz}{4\pi\varepsilon_0R^3}.$$

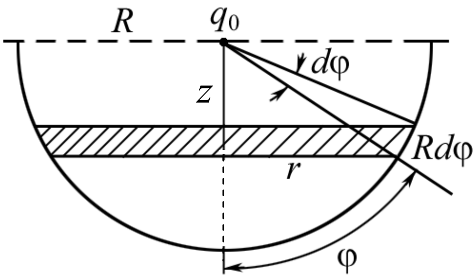


Рис. 1.7

Из рисунка $r = R\sin\varphi$, $z = R\cos\varphi$. После подстановки dq, r, z и интегрирования, получаем

$$F=\frac{\sigma q_0}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cdot\cos\varphi\,d\varphi=\frac{\sigma q_0}{4\varepsilon_0}.$$

Полезно сравнить полученное выражение с силой $F = \sigma q_0/(2\varepsilon_0)$ взаимодействия бесконечной плоскости и q_0.

Выполнив вычисления, получим

$$F=\frac{q_0\sigma}{4\varepsilon_0}=\frac{1\cdot10^{-18}}{4\cdot8{,}85\cdot10^{-12}}=2{,}8\cdot10^{-8}\text{ Н}=28\text{ нН}.$$

Ответ: $F = 28$ нН.

Задача 7. Два заряда $9q$ и $-q$ закреплены на расстоянии $l = 50$ см друг от друга. Третий заряд q_1 может перемещаться только вдоль прямой, проходящей через заряды. Определить положение заряда q_1, при котором он будет находиться в равновесии. При каком знаке заряда равновесие будет устойчивым?

Решение: Заряд q_1 будет находиться в равновесии в том случае, если геометрическая сумма сил, действующих на него, будет равна нулю. Это значит, что на заряд q_1 должны действовать две силы, равные по величине и противоположные по направлению. Рассмотрим, на каком из трех участков I, II, III (рис. 1.8) может быть выполнено это условие. Для определенности будем считать, что заряд q_1 – положительный.

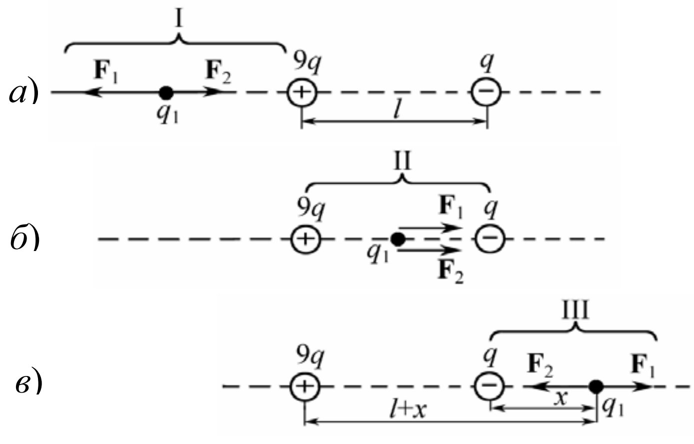


Рис. 1.8

На участке I (рис. 1.8, *а*) на заряд q_1 будут действовать две противоположно направленные силы F_1 и F_2. Сила F_1, действующая со стороны заряда $9q$, в любой точке этого участка будет больше, чем сила F_2, действующая со стороны заряда $-q$, так как бóльший (по абсолютной величине) заряд $9q$ будет находиться всегда ближе к заряду q_1, чем меньший заряд $-q$. Поэтому равновесие на этом участке невозможно.

На участке II (рис. 1.8, *б*) обе силы F_1 и F_2 направлены в одну сторону – к заряду $-q$. Следовательно, и на втором участке равновесие невозможно.

На участке III (рис. 1.8, *в*) силы F_1 и F_2 направлены в противоположные стороны, так же как и на участке I, но, в отличие от него, меньший (по абсолютной величине) заряд $(-q)$ всегда находится ближе к заряду q_1, чем бóльший заряд $(9q)$. Это значит, что можно найти такую точку на прямой, где силы F_1 и F_2 будут одинаковы по абсолютной величине, т.е. $F_1 = F_2$.

Пусть расстояние от меньшего заряда до заряда q_1 будет x, тогда от большего заряда – $(l + x)$. Выражая F_1 и F_2 в соответствии с законом Кулона (рис. 1.8, *в*), получим

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{9qq_1}{(l+x)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_1}{x^2}.$$

Сокращая на $qq_1/(4\pi\varepsilon_0)$ и извлекая из обеих частей равенства корень квадратный, найдем $l + x = \pm 3x$, откуда $x_1 = +l/2$ и $x_2 = -l/4$.

Корень x_2 не удовлетворяет физическому условию задачи (в этой точке силы F_1 и F_2 хотя и равны по абсолютной величине, но направлены в одну сторону, рис. 1.8, *б*).

Определим знак заряда, при котором равновесие будет устойчивым. Равновесие называется устойчивым, если при небольшом смещении заряда с положения равновесия возникают силы, возвращающие его в положение равновесия. Рассмотрим смещение заряда q_1 в двух случаях: когда заряд положителен и когда заряд отрицателен.

Если заряд q_1 положителен, то при смещении его влево обе силы F_1 и F_2 возрастают, но F_1 возрастает медленнее (заряд $9q$ всегда находится дальше, чем $-q$). Следовательно, F_2 (по абсолютному значению) больше, чем F_1, и на заряд q_1 будет действовать результирующая сила, направленная также влево. Под действием этой силы заряд q_1 удаляется от положения равновесия. То же происходит и при смещении заряда q_1 вправо. Сила F_2 будет убывать быстрее, чем F_1. Геометрическая сумма сил в этом случае направлена вправо. Заряд под действием этой силы также будет перемещаться вправо, т.е. удаляться от положения равновесия. Таким образом, в случае положительного заряда равновесие является неустойчивым.

Если заряд q_1 отрицателен, то смещение влево вызовет увеличение сил F_2 и F_1, но сила F_1 возрастает медленнее, чем F_2, т.е. $|F_2| > |F_1|$. Результирующая сила будет направлена вправо. Под действием этой силы заряд q_1 возвращается к положению равновесия. При смещении q_1 вправо сила F_2 убывает быстрее, чем F_1, т.е. $|F_1| > |F_2|$. Результирующая сила направлена влево, и заряд q_1 опять будет возвращаться к положению равновесия. При отрицательном заряде равновесие является устойчивым. Величина самого заряда q_1 не существенна.

Ответ: $x = l/2$; $q_1 < 0$.

Задача 8. Тонкий стержень длиной $l = 30$ см (рис. 1.9) несет равномерно распределенный по длине заряд с линейной плотностью $\tau = 1$ мкКл/м. На расстоянии $z_0 = 20$ см от стержня находится заряд $q_1 = 10$ нКл. Заряд равноудален от концов стержня. Определить силу F взаимодействия точечного заряда с заряженным стержнем.

Дано:
$l = 0{,}3$ м
$\tau = 10^{-6}$ Кл/м
$z_0 = 0{,}2$ м
$q_1 = 10^{-8}$ Кл
F – ?

Решение: Закон Кулона позволяет вычислить силу взаимодействия точечных зарядов. По условию задачи один из зарядов не является точечным, а представляет собой заряд, равномерно распределенный по длине стержня. Однако если выделить на стержне дифференциально малый участок длиной dl, то находящийся на нем заряд $dq = \tau dl$ можно рассматривать как точечный, и тогда по закону Кулона сила взаимодействия между зарядами q_1 и dq:

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \tau dl}{r^2}, \qquad (1)$$

где r – расстояние от выделенного элемента до заряда q_1.

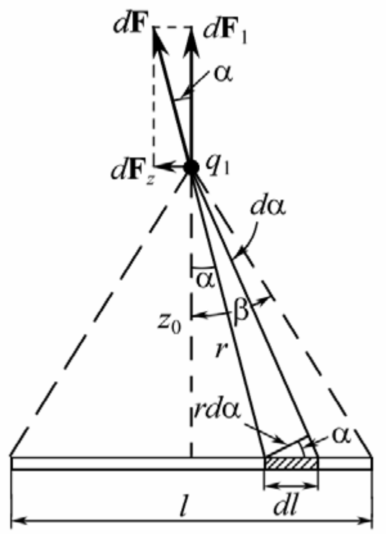


Рис. 1.9

Из рис. 1.9 следует, что $r = \dfrac{z_0}{\cos\alpha}$ и $dl = \dfrac{r d\alpha}{\cos\alpha}$, где z_0 – расстояние от заряда q_1 до стержня. Подставив эти выражения r и dl в формулу (1), получим

$$dF = \frac{q_1 \tau}{4\pi\varepsilon_0 z_0} d\alpha. \qquad (2)$$

Следует иметь в виду, что $d\mathbf{F}$ – вектор и поэтому, прежде чем интегрировать, разложим его на две составляющие: $d\mathbf{F}_1$ – перпендикулярную и $d\mathbf{F}_2$ – параллельную длине стержня.

Из рисунка видно, что $dF_1 = dF\cos\alpha$, $dF_2 = dF\sin\alpha$.

Подставляя значение dF из выражения (2) в эти формулы, найдем

$$dF_1 = \frac{q_1 \tau \cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 z_0} d\alpha; \quad dF_2 = \frac{q_1 \tau \sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 z_0} d\alpha.$$

Интегрируя эти выражения в пределах от $-\beta$ до $+\beta$, получим

$$F_1 = \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{q_1 \tau \cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 z_0} d\alpha = \frac{q_1 \tau}{4\pi\varepsilon_0 z_0} \int_{-\beta}^{+\beta} \cos\alpha d\alpha = \frac{q_1 \tau}{4\pi\varepsilon_0 z_0} \left|\sin\alpha\right|_{-\beta}^{+\beta},$$

$$F_1 = \frac{q_1 \tau}{4\pi\varepsilon_0 z_0} \left|\sin\beta - \sin(-\beta)\right| = \frac{q_1 \tau}{4\pi\varepsilon_0 z_0} 2\sin\beta, \text{ или}$$

$$F_1 = \frac{q_1 \tau}{2\pi\varepsilon_0 z_0} \sin\beta. \qquad (3)$$

В силу симметрии расположения заряда q_1 относительно стержня интегрирование второго выражения дает нуль:

$$F_2 = \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{q_1 \tau}{4\pi\varepsilon_0 z_0} \sin\alpha d\alpha = -\frac{q_1 \tau}{4\pi\varepsilon_0 z_0} \left|\cos\alpha\right|_{-\beta}^{+\beta} = -\frac{q_1 \tau}{4\pi\varepsilon_0 z_0} (\cos\beta - \cos\beta) = 0.$$

Сила, действующая на заряд q_1,

$$F = F_1 = \frac{q_1 \tau}{2\pi\varepsilon_0 z_0} \sin\beta. \qquad (4)$$

Из рис. 1.9 следует, что

$$\sin\beta = \frac{l/2}{\sqrt{z_0^2 + l^2/4}} = \frac{l}{\sqrt{4z_0^2 + l^2}}.$$

Подставив выражение $\sin\beta$ в формулу (4), получим

$$F = \frac{q_1\tau}{2\pi\varepsilon_0 z_0} \cdot \frac{l}{\sqrt{4z_0^2 + l^2}}.$$

Подставим числовые значения и произведем вычисление

$$F = \frac{10^{-8} \cdot 10^{-6}}{2\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}2} \cdot \frac{0{,}3}{\sqrt{4 \cdot 0{,}2^2 + 0{,}3^2}} = 5{,}4 \cdot 10^{-4}\ \text{Н} = 540\ \text{мкН}.$$

Ответ: F = 540 мкН.

Задача 9. Тонкая прямая нить длиной l заряжена равномерно зарядом q. Найти силу F взаимодействия нити с точечным зарядом q_0, находящимся на продолжении нити и на расстоянии l от ближайшего конца нити. Вычисления провести для l = 20 см, $q = q_0 = 2{\cdot}10^{-9}$ Кл.

Дано:
l = 0,2 м
$q = 2{\cdot}10^{-9}$ Кл
$q_0 = 2{\cdot}10^{-9}$ Кл
F – ?

Решение: По условию задачи один из зарядов вновь не является точечным. Если выделить на нити заряд $dq = \tau dx$ (где τ – линейная плотность заряда), находящийся на расстоянии x от точечного заряда q_0, то по закону Кулона сила взаимодействия (рис. 1.10) равна

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0\tau dx}{x^2}.$$

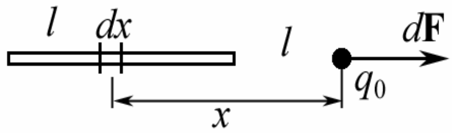


Рис. 1.10

Это выражение легко интегрируется, т.к. все силы dF направлены по одной прямой вдоль оси x

$$F = \int dF = \int_l^{2l} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{l}\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{l}\frac{1}{x}\bigg|_l^{2l} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{l}\left(\frac{1}{2l} - \frac{1}{l}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{2l^2}.$$

Подставив числовые значения, получим

$$F = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 0{,}2^2} = 4{,}5 \cdot 10^{-7}\ \text{Н} = 0{,}45\ \text{мкН}.$$

Ответ: 0,45 мкН.

Задача 10. Положительный точечный заряд q_0 = 50 мкКл находится на плоскости xy в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, где $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ – орты осей x и y. Найти модуль и направление силы $\mathbf{F}$, действующей на заряд q = 1 нКл, находящийся в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r} = 8\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$. Здесь r_0 и r даны в метрах.

Решение: Согласно закону Кулона сила взаимодействия двух точечных зарядов равна $\mathbf{F} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qq_0 \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|^3}$.

Легко видеть, что $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = 6\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$, тогда

$$\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|^3 = \left|6\mathbf{i}-8\mathbf{j}\right|^3 = 1000.$$

Итак, $\mathbf{F} = 9\cdot 10^9 \cdot \dfrac{50\cdot 10^{-6}\cdot 1\cdot 10^{-9}}{10^3}(6\mathbf{i}-8\mathbf{j}) = (2,7\mathbf{i}-3,6\mathbf{i})\cdot 10^{-6}$ Н.

$$\left|\mathbf{F}\right| = 4,5\cdot 10^{-6}\ \text{Н}.$$

Ответ: $F = 4,5$ мкН.

Задача 11. Тонкое полукольцо радиусом R равномерно заряжено с линейной плотностью τ. Определить силу взаимодействия полукольца с точечным зарядом q_0, находящимся в центре кривизны.

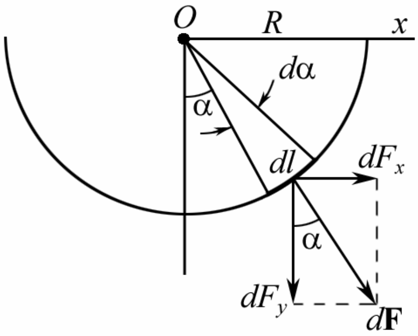


Рис. 1.11

Решение: Непосредственное применение закона Кулона невозможно. Разобьем полукольцо на элементарные заряды $dq = \tau dl$, см. рис. 1.11.

Поэтому ($dl = R\,d\alpha$)

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0\tau R d\alpha}{R^2}.$$

В силу симметрии задачи

$$\sum dF_x = 0,\ \text{а}\ dF_y = dF\cos\alpha.$$

После интегрирования имеем

$$F = 2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0\tau}{R}\cdot\cos\alpha d\alpha = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q_0\tau}{R}\cdot\int_0^{\pi/2}\cos\alpha d\alpha = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q_0\tau}{R}.$$

Ответ: $F = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_0\tau}{R}$.

Задача 12. Тонкий однородный диск радиусом R заряжен равномерно с поверхностной плотностью σ. Заряды неподвижны. Определить силу взаимодействия диска с точечным зарядом q_0, находящимся на оси диска на расстоянии z.

Решение: Разобьем диск на бесконечно тонкие кольца радиусом r и шириной dr (рис. 1.12.1). Сила взаимодействия заряженного кольца с зарядом q_0 рассмотрена в задаче 3

$$dF_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0\,dq\,z}{(r^2+z^2)^{3/2}}.$$

Из рис. 1.12.2 видно, что элементарный заряд на кольце

$$dq = \sigma dS,$$

где $dS = drdl = dr \cdot rd\alpha$.

Тогда

$$dF_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0\sigma z \cdot rdr \cdot d\alpha}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}.$$

Искомая сила взаимодействия между заряженным диском и q_0:

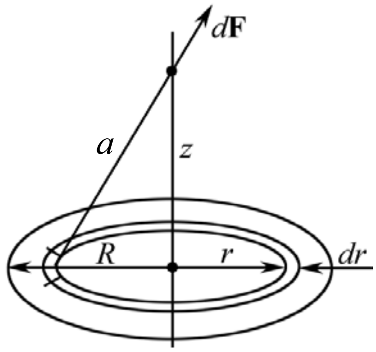


Рис. 1.12.1

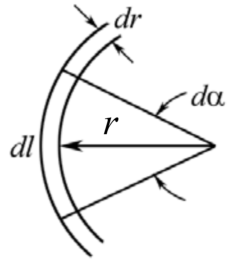


Рис. 1.12.2

$$F_z = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^R \frac{\sigma z q_0 rdr}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2+z^2\right)^{3/2}} = \frac{\sigma q_0}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right].$$

Полезно проанализировать полученное выражение. При $z \to 0$ диск для заряда q_0 представляет собой бесконечно большую плоскость, поэтому $F \cong \sigma q_0/(2\varepsilon_0)$.

Ответ: $F = \dfrac{\sigma q_0}{2\varepsilon_0}\left[1-\dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right].$

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Два маленьких шарика массами m = 0,1 г каждый подвешены в одной и той же точке на нитях длиной l = 20 см каждая. Получив одинаковый заряд, шарики разошлись так, что нити образовали между собой угол $\alpha = 60°$. Найти заряд q каждого шарика.

Ответ: $q = 4l\sin\left(\alpha/2\right)\sqrt{\pi\varepsilon_0 mg \cdot \mathrm{tg}\left(\alpha/2\right)} = 50$ нКл.

1.2. По телу объема V распределен заряд q с объемной плотностью $\rho = \rho(\mathbf{r})$; по телу объема V' – другой заряд q' с плотностью $\rho = \rho(\mathbf{r}')$. Написать выражение для силы $\mathbf{F}$, с которой заряд q' действует на заряд q. Сделать рисунок. Ответ обосновать.

Ответ: $\mathbf{F} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_V\int_{V'}\dfrac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^3}dVdV'$.

1.3. Два заряженных шарика одинакового радиуса и массы, подвешенные на нитях одинаковой длины, опускают в жидкий диэлектрик, плотность которого ρ_1 и диэлектрическая проницаемость ε. Какова должна быть плотность ρ материала шариков, чтобы углы расхождения нитей в воздухе и диэлектрике были одинаковыми?

Ответ: $\rho = \varepsilon\rho_1/(\varepsilon - 1)$.

1.4. Тонкое полукольцо радиусом R = 20 см заряжено равномерно зарядом q = 0,7 нКл. В центре кривизны полукольца находится заряд q_0 = 1 нКл. Найти силу взаимодействия зарядов.

Ответ: $F = \dfrac{2qq_0}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2} = 0{,}1$ мкН.

1.5. Два одинаковых заряженных шарика подвешены в одной точке на нитях одинаковой длины. При этом нити разошлись на угол α. Шарики погружаются в масло с плотностью ρ_0 = 800 кг/м^3. Какова диэлектрическая проницаемость ε масла, если угол расхождения нитей при погружении шариков в масло остается неизменным? Плотность материала шариков $\rho = 1{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Ответ: $\varepsilon = \rho/(\rho - \rho_0) = 2$.

1.6. Полусфера радиусом R, обращенная выпуклостью вверх (рис. 1.13), имеет заряд Q, равномерно распределенный по ее поверхности. Внутри полусферы в ее вершине закреплена легкая непроводящая нить длиной R, на конце которой находится маленький шарик с зарядом q. Пренебрегая действием силы тяжести определить натяжение нити.

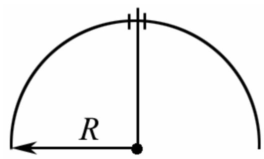


Рис. 1.13

Ответ: $F = qQ/(8\pi\varepsilon_0 R^2)$.

1.7. Два шарика с одинаковыми радиусами и массой подвешены на двух нитях так, что их поверхности соприкасаются. Какой заряд нужно сообщить шарикам, чтобы натяжение нитей стало равным T = 98 мН? Расстояние от точки подвеса до центра шарика равно l = 10 см. Масса каждого шарика m = 5 г.

Ответ: $q = \dfrac{8l}{T}\sqrt{\pi\varepsilon_0}\cdot\left[T^2 - (mg)^2\right]^{3/4} = 1$ мкКл.

1.8. Расстояние r между двумя точечными зарядами, равными по величине и противоположными по знаку (q = 1 мкКл), равно 10 см. Определить силу, действующую на точечный заряд q_0 = 0,1 мкКл, удаленный на r_1 = 6 см от первого и r_2 = 8 см от второго заряда.

Ответ: $F = \dfrac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\dfrac{1}{r_1^4} + \dfrac{1}{r_2^4} - \dfrac{2\cos\alpha}{r_1^2 r_2^2}} = 287$ мН,

где $\cos\alpha = \left(r_1^2 + r_2^2 - r^2\right)/\left(2r_1r_2\right) = 0$.

1.9. Два одинаковых металлических заряженных шара находятся на расстоянии r = 60 см ($d_ш \ll r$). Сила отталкивания шаров F_1 = 70 мкН. После того как шары привели в соприкосновение и удалили друг от друга на прежнее расстояние, сила отталкивания возросла и стала равной F_2 = 160 мкН. Вычислить заряды до соприкосновения.

Ответ: $q_1 = 2r\sqrt{\pi\varepsilon_0}\left(\sqrt{F_2} + \sqrt{F_2 - F_1}\right) = 0{,}14$ мкКл;

$q_2 = 2r\sqrt{\pi\varepsilon_0}\left(\sqrt{F_2} - \sqrt{F_2 - F_1}\right) = 20$ нКл.

1.10. Чему равна сила взаимодействия полубесконечного заряженного стержня и точечного заряда q_0, находящегося на перпендикуляре, восставленного к оси стержня, на расстоянии $a = 10$ см от его конца, если $q_0 = 1$ нКл, линейная плотность $\tau = 1\cdot10^{-7}$ Кл/м.

Ответ: $F = \dfrac{q_0\tau}{\sqrt{8}\pi\varepsilon_0 a} = 12{,}7$ мкН

1.11. Над однородным заряженным диском радиусом R (поверхностная плотность $\sigma = \text{const}$) на оси симметрии находится точечный заряд q_0. На каком расстоянии z от диска сила взаимодействия будет максимальной.

Ответ: при $z \to 0$ $F_z \cong q_0\sigma/(2\varepsilon_0)$.

1.12. Длинный прямой провод имеет заряд, равномерно распределенный по его длине. Линейная плотность заряда $\tau = 1$ нКл/м. Определить силу, действующую на заряд $q_0 = 2\cdot10^{-8}$ Кл на расстоянии $d = 1{,}5$ м от провода.

Ответ: $F = \dfrac{q_0\tau}{2\pi\varepsilon_0 d} = 240$ нН.

1.13. Два длинных параллельных провода заряжены равномерно с одинаковой линейной плотностью $\tau = 5\cdot10^{-8}$ Кл/м. Расстояние между проводами $d = 0{,}5$ м. Определить силу взаимодействия на единицу длины провода.

Ответ: $F_l = \dfrac{\tau^2}{2\pi\varepsilon_0 d} = 90$ мкН/м.

1.14. Горизонтально расположенный непроводящий диск, радиус которого $R = 0{,}5$ м, заряжен с поверхностной плотностью $\sigma = 3{,}33\cdot10^{-4}$ Кл/м^2. Маленький шарик массой $m = 3{,}14$ г, имеющий на себе заряд $q_0 = 5{,}58$ нКл, находится над центром диска в состоянии равновесия. Определить его расстояние от центра диска.

Ответ: $d = \dfrac{R}{\sqrt{\left(\dfrac{\sigma q}{\sigma q - 2\varepsilon_0 mg}\right)^2 - 1}} = 0{,}5$ м

1.15. Тонкое непроводящее кольцо радиусом R заряжено с линейной плотностью $\tau = \tau_0\cos\alpha$, где τ_0 – постоянная; α – азимутальный угол. В центре кольца расположен точечный заряд q_0. Найти силу взаимодействия кольца с зарядом q_0.

Ответ: $F = \dfrac{q_0\tau_0}{4\varepsilon_0 R}$.

1.16. С какой силой будет взаимодействовать точечный заряд q_0 и равномерно заряженная с плотностью τ_0 непроводящая нить (рис. 1.14)? Радиус закругления много меньше длины нити. Ответ обосновать.

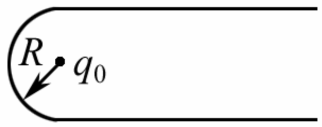


Рис. 1.14

Ответ: $F = 0$.

1.17. Сила F взаимодействия длинного непроводящего прямого стержня с точечным зарядом $q_0 = 2\cdot10^{-9}$ Кл равна 0,36 мкН. Найти расстояние d от стержня до заряда, если линейная плотность $\tau = 10$ нКл/м.

Ответ: $d = \dfrac{q_0\tau}{2\pi\varepsilon_0 F} = 1$ м.

1.18. Маленький шарик массой $m = 3{,}14$ г находится в равновесии над центром горизонтально расположенного непроводящего диска радиусом $R = 0{,}5$ м. Расстояние l от диска до шарика равно 0,5 м. Диск заряжен с поверхностной плотностью $\sigma = 3{,}33\cdot10^{-4}$ Кл/м^2. Определить заряд шарика.

Ответ: $q_0 \cong \dfrac{2\varepsilon_0 mg}{\sigma\left(1 - l\big/\sqrt{l^2 + R^2}\right)} = 5{,}59$ нКл.

1.19. С какой силой F взаимодействовали бы два медных шарика, каждый массой $m = 1$ г, находясь на расстоянии $l = 1$ м друг от друга, если бы суммарный заряд всех электронов в них отличался на $\eta = 0{,}01$ от суммарного заряда всех ядер?

Ответ: $F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{eZ\eta m N_A}{\mu_{\mathrm{Cu}} l}\right)^2 \approx 2\cdot10^{15}$ Н, где $Z = 29$.

1.20. Сила F взаимодействия заряда $q_0 = 1$ нКл и заряженного кольца радиусом $R = 0{,}2$ м равна 10 мкН. Заряд q_0 расположен в центре кольца, линейная плотность которого меняется по закону $\tau = \tau_0\cos\varphi$, где φ – азимутальный угол. Найти τ_0.

Ответ: $\tau_0 = 4\varepsilon_0 FR/q_0 = 70$ нКл/м.

1.21. Бесконечная непроводящая равномерно заряженная плоскость имеет поверхностную плотность зарядов $\sigma = 9\cdot10^{-6}$ Кл/м^2. Над ней имеется алюминиевый шарик, заряд которого $q_0 = 3{,}68\cdot10^{-7}$ Кл. Чему равен радиус r шарика, если он находится в равновесии? Воспользоваться решенной задачей 12.

Ответ: $r = \sqrt[3]{\dfrac{3q_0\sigma}{8\pi\varepsilon_0\rho_{\mathrm{Al}} g}} = 12$ мм.

1.22. Сила F взаимодействия тонкого непроводящего полукольца радиусом R = 20 см, заряженного равномерно зарядом q = 0,7 нКл, с зарядом q_0, находящимся в центре кривизны полукольца, равна 0,1 мкН. Найти заряд q_0.

Ответ: $q_0 = 2\pi^2 \varepsilon_0 R^2 F / q = 1$ нКл.

1.23. Доказать, что сила F взаимодействия между зарядом $+q$ и проводящей бесконечной плоскостью, отстоящей от заряда на расстоянии d, такая же, как между данным зарядом и зарядом $-q$, расположенным симметрично относительно плоскости. Рассмотреть картину силовых линий двух зарядов.

1.24. Доказать, что заряды каждого знака, индуцированные на проводнике A поднесенным к нему зарядом $+q$ (рис. 1.15), всегда меньше q.

Указание: Нарисовать силовые линии.

Рис. 1.15

1.25. Два одинаковых шарика радиусом r и массой m = 10 г подвешены в одной точке на непроводящих легких нитях длиной l = 20 см каждая ($r \ll l$). Шарикам сообщены одинаковые по величине и знаку заряды q, при этом они разошлись так, что нити образуют угол φ = 90°. Найти заряд q.

Ответ: $q = 2l \sin(\varphi/2)\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mg \cdot \operatorname{tg}(\varphi/2)} = 0{,}93$ мкКл.

2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ. ПОТОК ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ И ТЕОРЕМА ГАУССА

Основные формулы и обозначения

Напряженность электрического поля

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/q_0,$$

где **F** – сила, действующая на точечный положительный заряд q_0, помещенный в данную точку поля.

Напряженность электрического поля, создаваемого точечным зарядом q на расстоянии r от заряда,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Напряженность электрического поля, созданного системой точечных зарядов q_k (принцип суперпозиции)

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} = \sum_k \frac{q_k}{4\pi\varepsilon_0 r_k^2}\frac{\mathbf{r}_k}{r_k} = \sum_k \mathbf{E}_k,$$

где $\mathbf{E_k}$ – вектор напряженности электрического поля точечного q_k заряда; $\mathbf{r}_k$ – радиус-вектор, проведенный от заряда q_k в точку наблюдения.

Дипольный момент

$$\mathbf{p} = q\mathbf{l},$$

где **l** – плечо диполя.

Электрическое поле на оси диполя

$$\mathbf{E} = \frac{2\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

Электрическое поле на перпендикуляре через центр диполя

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

Момент сил, действующих на диполь в однородном поле

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}, \mathbf{E}].$$

Сила, действующая на диполь в неоднородном электрическом поле $F = p\dfrac{\partial E}{\partial x}$ и втягивающая его в область более сильного поля.

Поток вектора напряженности **E** сквозь площадку $d\mathbf{S}$

$$d\Phi_E = (\mathbf{E},\ d\mathbf{S}) = E_n dS,$$

где E_n – проекция вектора напряженности на нормаль к dS.

Теорема Гаусса в интегральной форме для электрического поля в вакууме

$$\Phi_E = \oint_S (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \frac{1}{\varepsilon_0} Q,$$

где $Q = \sum q_k$ – алгебраическая сумма зарядов, заключённых внутри замкнутой поверхности S.

Напряженность поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной нитью (цилиндром радиуса R, при $a \geq R$), на расстоянии a от оси нити (оси цилиндра).

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2\tau}{a},$$

где $\tau = dq/dl$ – линейная плотность заряда.

Напряженность электрического поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью,

$$E = \sigma/(2\varepsilon_0).$$

где $\sigma = dq/dS$ – поверхностная плотность заряда.

Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженным диском радиуса R, в точке, находящейся на перпендикуляре, восставленном из центра диска на расстоянии a от него,

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right).$$

Напряженность электрического поля воздушного конденсатора

$$E = \sigma/\varepsilon_0.$$

Примеры решения задач

Задача 1. В работе академика Г.А. Месяца с сотрудниками[*)] изучалась транспортировка низкоэнергетических (~ 20 кэВ) сильноточных (1000 А/см^2) пучков электронов значительного поперечного сечения (S > 1 см^2). Сильноточный пучок распространяется в импульсном режиме в пристеночной плазме канала диэлектрика. При этом возникает радиальное электрическое поле, создаваемое избыточным отрицательным зарядом, накапливаемым в канале транспортировки за время Δt, равное времени пролета иона плазмы от стенки диэлектрического канала до оси пучка. Определить, используя теорему Гаусса, радиальное электрическое поле пучка, если скорость изменения тока пучка

[*)] По материалам книги: Месяц Г.А., Проскуровский Д.И. Импульсный электрический разряд в вакууме. Новосибирск. Наука. 1984. 380 с.

dI/dt = 10^{11} А/с, длина канала $L = 3{\cdot}10^{-2}$ м, R = 1 см. Заряд иона e = $1{,}6{\cdot}10^{-19}$ Кл, масса $m_p = 1{,}67{\cdot}10^{-27}$ Кл.

Дано:
$dI/dt = 10^{11}$ А/с
$L = 3{\cdot}10^{-2}$ м
$R = 10^{-2}$ м
$z = 1$
$e = 1{,}6{\cdot}10^{-19}$ Кл
$m_p = 1{,}67{\cdot}10^{-27}$ Кл
E_r – ?

Решение: Запишем закон Гаусса

$$E_r \cdot 2\pi RL = \frac{\Delta q}{\varepsilon_0}, \qquad (1)$$

где E_r – напряженность радиального поля, Δq – избыточный отрицательный заряд, накапливаемый за время пролета иона Δt.

Все технические параметры задачи в уравнении (1) известны.

Решение сводится к определению Δq. Легко видеть, что

$$\Delta q = \left(\frac{dI}{dt}\right)\Delta t^2. \qquad (2)$$

Время движения иона Δt можно определить, используя уравнения движения: $s = a\Delta t^2/2$; $\Delta t^2 = 2s/a$, где s – пройденный ионами путь, $s \approx R$; $a = \dfrac{F}{m_p} = \dfrac{zeE_r}{m_p}$, где m_p – масса иона; ze – заряд иона.

В результате

$$\Delta t^2 = \frac{2m_pR}{zeE_r}. \qquad (3)$$

Решая совместно систему уравнений (1) – (3) относительно E_r, найдем

$$E_r = \left(\frac{(dI/dt)m_p}{\pi\varepsilon_0 zeL}\right)^{1/2}.$$

Подставляя в формулу численные значения, получаем

$$E_r = \left(\frac{10^{11}\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}}{\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 1\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 3\cdot 10^{-2}}\right)^{1/2} = 3{,}5\cdot 10^7 \text{ В/м} = 35 \text{ МВ/м}.$$

Ответ: E_r = 35 МВ/м.

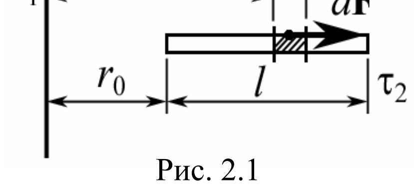


Рис. 2.1

Задача 2. Бесконечная прямая нить, равномерно заряженная с линейной плотностью $\tau_1 = 3{\cdot}10^{-7}$ Кл/м, и отрезок длины l = 20 см, с $\tau_2 = 2{\cdot}10^{-7}$ Кл/м, расположены в одной плоскости перпендикулярно друг другу на расстоянии r_0 = 10 см (рис. 2.1). Определить силу взаимодействия между ними.

Дано:	**Решение:** Заряд отрезка $Q_2 = \tau_2 l$ расположен в поле длинной нити. Рассматриваемые тела не являются точечными, поэтому формула $\mathbf{F} = Q_2\mathbf{E}$ неприменима. На различные, но равные по длине элементы dx отрезка l действуют различные силы, так как расстояние x от нити до этих элементов dx различно, а поле не является однородным.
$l = 0{,}2$ м $\tau_1 = 3\cdot10^{-7}$ Кл/м $\tau_2 = 2\cdot10^{-7}$ Кл/м $r_0 = 0{,}1$ м	
F – ?	

Напряженность поля, создаваемого длинной равномерно заряженной нитью на расстоянии x от оси нити

$$E = \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0 x}.$$

Так как заряд $dQ = \tau_2 dx$ точечный, на него действует сила

$$dF = EdQ = \frac{\tau_1\tau_2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dx}{x}, \tag{1}$$

где x – расстояние от нити до заряда dQ.

Дифференциал искомой величины найден. Все силы $d\mathbf{F}$ направлены вправо по одной прямой (рис. 2.1), следовательно, $F = F_x = \int dF$.

$$F = \int\limits_{r_0}^{r_0+l} \frac{\tau_1\tau_2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dx}{x} = \frac{\tau_1\tau_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(1+\frac{l}{r_0}\right).$$

Вычисляя, получаем

$$F = \frac{3\cdot10^{-7}\cdot2\cdot10^{-7}}{2\pi\cdot8{,}85\cdot10^{-12}}\ln\left(1+\frac{0{,}2}{0{,}1}\right) = 1{,}2\cdot10^{-3}\ \text{Н} = 1{,}2\ \text{мН}.$$

Ответ: $F = 1{,}2$ мН.

Примечание. Можно изменить условие задачи, расположив отрезок параллельно нити, под углом к нити, в плоскости, перпендикулярной нити, и т.д. Все они могут быть решены одним и тем же методом. Однако, в общем случае уравнение (1) необходимо записывать в векторной форме, учитывая, что $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$, где $F_x = \int dF_x$, $F_y = \int dF_y$.

Задача 3. Бесконечная прямая нить, равномерно заряженная с линейной плотностью $\tau_1 = 3\cdot10^{-7}$ Кл/м, расположена в центре отрезка в виде полуокружности радиуса R, заряженной с линейной плотностью $\tau_2 = 2\cdot10^{-7}$ Кл/м. Определить силу взаимодействия между ними.

Дано:
$\tau_1 = 3{\cdot}10^{-7}$ Кл/м
$\tau_2 = 2{\cdot}10^{-7}$ Кл/м
F – ?

Решение: Вновь имеем нить и отрезок. Ни одно из этих тел не является точечным.

Если разбить полуокружность на элементарные отрезки dl, то силы $d\mathbf{F}_i$, действующие на заряд dq_i на отрезке dl_i, будут равны по модулю, но направление действия этих сил изменяется в пределах угла π (рис. 2.2).

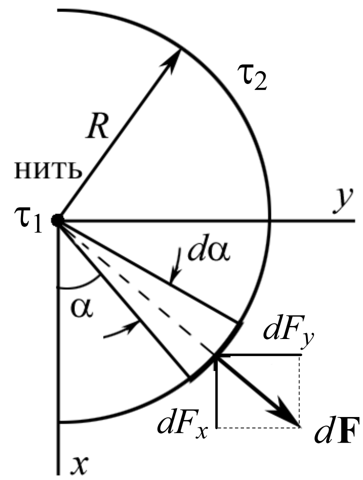


Рис. 2.2

В силу симметрии $F_x = 0$, следовательно, результирующая сила направлена вдоль оси y, т.е. $F = F_y$.

Имеем:

$$dF = E_1 dQ; \tag{1}$$

$$dF_y = E_1 dQ \sin\alpha; \tag{2}$$

$$dQ = \tau_2 dl; \tag{3}$$

$$dl = R\,d\alpha; \tag{4}$$

$$E_1 = \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0 R} = \text{const}. \tag{5}$$

Величина результирующей силы может быть найдена при интегрировании (2) после подстановки (3) – (5)

$$F = \int_0^{\pi} \frac{\tau_1\tau_2}{2\pi\varepsilon_0} \sin\alpha\, d\alpha = \frac{\tau_1\tau_2}{\pi\varepsilon_0}.$$

Вычисляя, имеем $F = \dfrac{3\cdot10^{-7}\cdot 2\cdot10^{-7}}{\pi\cdot 8{,}85\cdot10^{-12}} = 2{,}16\cdot10^{-3}$ Н $= 2{,}16$ мН.

Ответ: $F = 2{,}16$ мН.

Задача 4. В центре полусферы, равномерно заряженной электричеством с поверхностной плотностью заряда σ, расположен свободно ориентированный точечный диполь с электрическим моментом $\mathbf{p}_e$ (рис. 2.3). Определить напряженность электрического поля полусферы и период малых колебаний диполя относительно оси, перпендикулярной оси симметрии полусферы. Момент инерции диполя относительно оси вращения равен J.

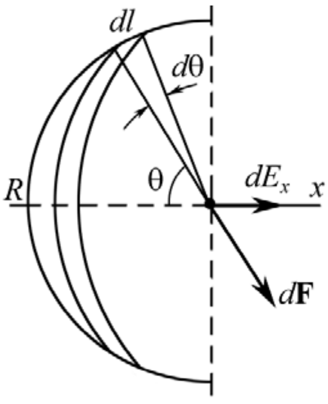


Рис. 2.3

Решение: Вращающий момент, действующий на диполь, можно рассчитать по формуле $\mathbf{M} = [\mathbf{pE}]$. Эта формула справедлива для однородного поля. Поэтому будем считать диполь точечным. В этом случае в пределах размеров диполя поле является постоянным.

Для вычисления E разобьем полусферу на тонкие кольца. Заряд кольца

$$dQ = \sigma dS = \sigma \cdot 2\pi R \sin\theta\, dl, \text{ где } dl = Rd\theta.$$

В силу симметрии $E_y = 0$. Очевидно, что $dE_x = dE\cos\theta$, где

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Тогда

$$E = E_x = \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta\, d\theta}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}.$$

Из уравнения колебательного движения твердого тела с моментом инерции J

$$J\ddot{\varphi} = -M,$$

где момент силы $|M| = pE\sin\varphi = pE\varphi$.

$$\ddot{\varphi} + \frac{pE}{J}\varphi = 0 \text{ или } \ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \text{ где } \omega_0^2 = \frac{pE}{J}.$$

Известно, что $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ или $T = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0 J}{p\sigma}}$.

Ответ: $T = \sqrt{\varepsilon_0 J/(p\sigma)}$.

Задача 5. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами q_1 = 30 нКл и q_2 = –10 нКл. Расстояние между зарядами d = 20 см. Определить напряженность электрического поля в точке, находящейся на расстоянии r_1 = 15 см от первого и на расстоянии r_2 = 10 см от второго зарядов.

Дано:	
$q_1 = 3\cdot10^{-8}$ Кл $q_2 = -1\cdot10^{-8}$ Кл $d = 0{,}2$ м $r_1 = 0{,}15$ м $r_2 = 0{,}1$ м	**Решение:** Согласно принципу суперпозиции каждый заряд создает поле независимо от присутствия в пространстве других зарядов. Поэтому напряженность **E** электрического поля двух зарядов может быть найдена как геометрическая сумма напряженностей $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ (рис. 2.4).
E – ?	

Модуль напряженности электрического поля в точке

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha},$$

где E_1 и E_2 – модули напряженностей электрического поля точечных зарядов q_1 и q_2.

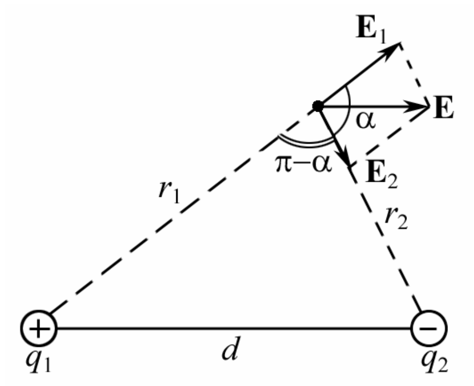


Рис. 2.4

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}; \;\; E_2 = \frac{|q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r_2}.$$

Из треугольника имеем

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\pi - \alpha)}\,.$$

Отсюда

$$\cos\alpha = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2};$$

$$\cos\alpha = \frac{0,2^2 - 0,15^2 - 0,1^2}{2\cdot 0,15\cdot 0,1} = 0,25\,.$$

Далее находим

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} + 2\frac{q_1|q_2|}{r_1^2 r_2^2}\cos\alpha}\,.$$

Подставим численные значения

$$E = 9\cdot 10^9\sqrt{\frac{(3\cdot 10^{-8})^2}{0,15^4} + \frac{(10^{-8})^2}{0,1^4} + \frac{2\cdot 3\cdot 10^{-8}\cdot 1\cdot 10^{-8}}{0,15^2\cdot 0,1^2}} = 16,7\cdot 10^3 \text{ В/м.}$$

Ответ: E = 16,7 кВ/м.

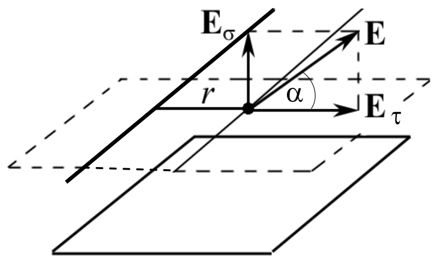


Рис. 2.5

Задача 6. Электрическое поле создано бесконечной плоскостью, заряженной с поверхностной плотностью σ = 400 нКл/м^2 и бесконечной прямой нитью, заряженной с линейной плотностью τ = 100 нКл/м (рис. 2.5). Определить величину и направление вектора **E** на расстоянии r = 0,1 м от нити.

Дано:
$\sigma = 4\cdot 10^{-7}$ Кл/м^2
$\tau = 1\cdot 10^{-7}$ Кл/м
$r = 0,1$ м
$E - ?\ \alpha - ?$

Решение: По принципу суперпозиции

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\sigma + \mathbf{E}_\tau, \text{ где}$$

$$E_\sigma = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \text{ – поле плоскости; } E_\tau = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} \text{ – поле нити.}$$

Векторы $\mathbf{E}_\tau$ и $\mathbf{E}_\sigma$ взаимно перпендикулярны (см. рис. 2.5), поэтому

$$E = \sqrt{E_\tau^2 + E_\sigma^2}\,.$$

Подставляя выражения E_τ и E_σ в последнее равенство, получим

$$E = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sqrt{\sigma^2 + \frac{\tau^2}{\pi^2 r^2}}.$$

Подставим числовые значения величин:

$$E = \frac{1}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \sqrt{\left(4 \cdot 10^{-7}\right)^2 + \frac{(10^{-7})^2}{\pi^2 (0{,}1)^2}} = 2{,}89 \cdot 10^4 \text{ В/м} = 28{,}9 \text{ кВ/м}.$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{E_\sigma}{E_\tau} = \frac{\pi r \sigma}{\tau} = 1{,}26; \quad \alpha = 51{,}5°.$$

Ответ: $E = 28{,}9$ кВ/м; $\alpha = 51{,}5°$.

Задача 7. Электрическое поле создано прямым бесконечным цилиндром радиусом $R = 0{,}01$ м, равномерно заряженным с поверхностной плотностью $\sigma = 0{,}2$ нКл/см^2. Определить электрическое поле в точках на расстояниях $r_1 = 0{,}5$ см и $r_2 = 0{,}1$ м от оси цилиндра.

Дано:	
$R = 10^{-2}$ м	
$\sigma = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2	
$r_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ м	
$r_2 = 0{,}1$ м	
$E_1 - ?$ $E_2 - ?$	

Решение: В силу бесконечной симметрии заряженного цилиндра его электрическое поле радиально. С учетом этого определим напряженности электрического поля E_1 и E_2.

Применим теорему Гаусса. Выделим в бесконечном цилиндре область высотой h и окружим его коаксиальными цилиндрами радиусом r_1 и r_2 (рис. 2.6).

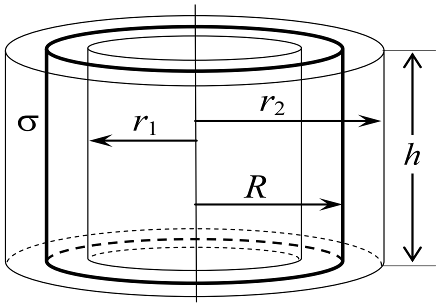


Рис. 2.6

В первом случае поверхность Гаусса проходит внутри цилиндра R, во втором случае снаружи.

Так как поле является радиальным, то поток вектора напряженности **E** через торцевые поверхности цилиндров равен нулю.

В первом случае заряд, заключённый внутри замкнутой поверхности S_1 равен нулю, поэтому $\oint_{S_1} \left(\mathbf{E}_1, d\mathbf{S}\right) = 0$, следовательно и $E_1 = 0$.

Во втором случае

$$\oint_{S_2} \left(\mathbf{E}_2, d\,\mathbf{S}\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma 2\pi R h}{\varepsilon_0};$$

$$E_2 \cdot 2\pi r_2 h = \frac{\sigma 2\pi R h}{\varepsilon_0}; \qquad E_2 = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r_2}.$$

Подставляя в формулу числовые значения, получим

$$E_2 = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}01}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}1} = 2{,}26 \cdot 10^4 \text{ В/м} = 22{,}6 \text{ кВ/м}.$$

Ответ: $E_1 = 0$; $E_2 = 22{,}6$ кВ/м.

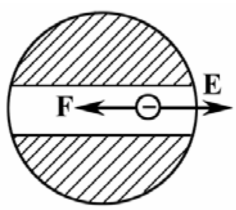


Рис. 2.7.1

Задача 8. Шар из диэлектрика ($\varepsilon = 1$) просверлен по диаметру (рис. 2.7.1). Из полости откачен воздух. В полости движется электрон. Шар заряжен с объемной плотностью $\rho = 6{,}9\cdot10^{-9}$ Кл/м^3. Радиус шара $R = 0{,}1$ м. Электрон в полости совершает гармонические колебания. Найти частоту колебаний.

Дано:
$R = 0{,}1$ м
$\rho = 6{,}9\cdot10^{-9}$ Кл/м^3
$\varepsilon = 1$

ν – ?

Решение: На электрон в полости действует сила $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ – напряженность электрического поля шара; e –элементарный заряд (рис. 2.7.2).

Для колебательного движения по второму закону Ньютона

$$m_e\ddot{x} = F_x = eE_x = -eE.$$

$$m_e\ddot{x} = -eE. \tag{1}$$

Поэтому для решения задачи необходимо вычислить поле E внутри шара. Для этой цели воспользуемся теоремой Гаусса

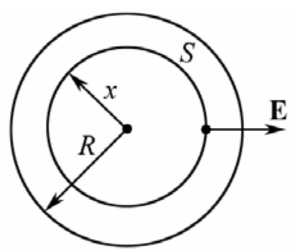


Рис. 2.7.2

$$\int_S \mathbf{E}, d\,\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi x^3\rho;$$

$$E\cdot4\pi x^2 = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0}x^3\rho \quad \text{или} \quad E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}x.$$

Заметим, что $F = -\dfrac{\rho e}{3\varepsilon_0}x$, т.е. сила F является квазиупругой. Если в системе действует только квазиупругая сила, то частица совершает гармонические колебания, уравнение движения электрона (1) примет вид

$$\ddot{x} + \frac{\rho e}{3\varepsilon_0 m_e}x = 0, \quad \text{где } \rho e/(3\varepsilon_0 m_e) = \omega_0^2.$$

Получено дифференциальное уравнение гармонического колебательного движения $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, следовательно $\omega_0 = \sqrt{\rho e/(3\varepsilon_0 m_e)}$.

Тогда
$$\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\rho e}{3\varepsilon_0 m_e}}.$$

Подставляя численные значения, получим

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{6{,}9\cdot10^{-9}\cdot1{,}6\cdot10^{-19}}{3\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot9{,}1\cdot10^{-31}}} = 1{,}08\cdot10^{6}\ \text{Гц}.$$

Ответ: $\nu = 1{,}1$ МГц.

Задача 9. Электрическое поле создано тонкой бесконечно длинной равномерно заряженной (τ = 30 нКл/м) нитью. На расстоянии a = 20 см от нити находится плоская круглая площадка радиусом r = 1 см (рис. 2.8). Определить поток вектора напряженности через эту площадку, если ее плоскость составляет угол β = 30° с линией напряженности, проходящей через середину площадки.

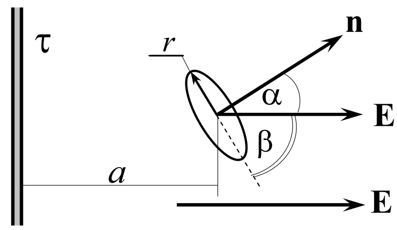


Рис. 2.8

Дано:	
$\tau = 3\cdot10^{-8}$ Кл/м $a = 0{,}2$ м $r = 10^{-2}$ м $\beta = 30°$	**Решение:** Поле бесконечно длинной заряженной нити является неоднородным, $E = \tau/(2\pi\varepsilon_0 a)$, поэтому поток напряженности **E** равен $\Phi_E = \int\limits_S E\cdot dS\cdot\cos\alpha$.
Φ_E – ?	Размеры площадки малы по сравнению с расстоянием до нити $r \ll a$.

Поэтому в пределах площадки поле **E** можно считать однородным. Следовательно,

$$\Phi_E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 a}\cdot\pi r^2\cos\alpha, \text{ где } \alpha = 90 - \beta;$$

$$\Phi_E = \frac{\tau r^2 \sin\beta}{2\varepsilon_0 a}.$$

Подставляя данные, получим

$$\Phi_E = \frac{3\cdot10^{-8}\cdot\left(10^{-2}\right)^2\cdot0{,}5}{2\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot0{,}2} = 0{,}424 \text{ В}\cdot\text{м}.$$

Ответ: Φ_E = 0,42 В·м.

Задача 10. Две бесконечные непроводящие плоскости, несущие заряды, равномерно распределенные с поверхностной плотностью σ, пересекаются под углом φ. Найти напряженность поля пластин.

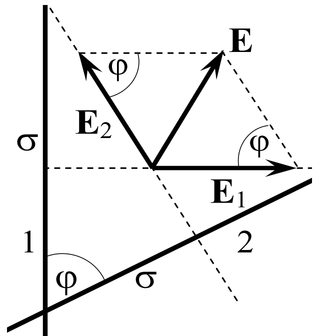


Рис. 2.9

Решение: Для решения необходимо воспользоваться принципом суперпозиции (рис. 2.9)

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2,$$

или

$$E = E_1\sin(\varphi/2) + E_2\sin(\varphi/2).$$

Задача сводится к определению углов, под которыми расположены векторы $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ и которые образуют ромб.

$$E_1 = E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}; \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Задача 11. Бесконечно длинный круговой цилиндр радиусом a заполнен положительным зарядом, распределенным с объемной плотностью ρ. Найти напряженность электрического поля внутри и вне цилиндра (а также их проекции на оси координат). Выбрать необходимые данные и вычислить эти поля.

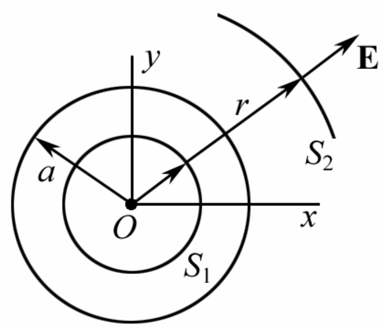


Рис. 2.10

Решение: Применим теорему Гаусса для двух случаев (рис. 2.10, вид сверху).

1) $r < a$

$$\oint_{S_1} (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \frac{\int \rho dV}{\varepsilon_0}.$$

Суммарный заряд внутри поверхности S_1 равен $\rho \cdot h \cdot \pi r^2$. Поверхность Гаусса $S_1 = 2\pi rh$. Тогда

$$E \cdot 2\pi rh = \frac{\rho h \pi r^2}{\varepsilon_0}; \quad E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r; \quad E_x = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} x; \quad E_y = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} y.$$

2) $r \geq a$

$$E \cdot 2\pi rh = \frac{\rho h \pi a^2}{\varepsilon_0}, \text{ или } E = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}.$$

Проекции электрического поля на оси координат

$$E_x = \frac{\rho \cdot a^2}{2\varepsilon_0} \frac{x}{x^2 + y^2}; \qquad E_y = \frac{\rho \cdot a^2}{2\varepsilon_0} \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Проведем соответствующие вычисления. С этой целью найдем относительно реальное значение плотности ρ. Как мы видели из предыдущих задач, заряд обычно не превышает нескольких нанокулон. Пусть выделенный участок цилиндра будет высотой $h = a = 2$ см, тогда

$$\rho = \frac{10^{-9}}{\pi \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}02} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ Кл/м}^3.$$

Подставляя численные значения, находим E на расстоянии, равном, например, удвоенному радиусу цилиндра $r = 2a$.

$$E = \frac{4 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}02^2}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 0{,}02} = 2{,}26 \cdot 10^4 \text{ В/м} = 22{,}6 \text{ кВ/м}.$$

Ответ: $\rho = 40$ мкКл/м^3; $E = 22{,}6$ кВ/м.

Задача 12. На поверхности бесконечно большой плоскости имеется равномерное распределение заряда σ. Справа от него и параллельно ему расположен бесконечно большой слой заряда толщиной d с однородной объемной плотностью ρ. Все заряды неподвижны. Определите E во всех точках пространства.

Решение: Расставим точки 1 – 4, в которых нужно найти поле E (рис. 2.11.1). Применим теорему Гаусса и принцип суперпозиции. В силу симметрии $|\mathbf{E}_1| = |\mathbf{E}_4|$.

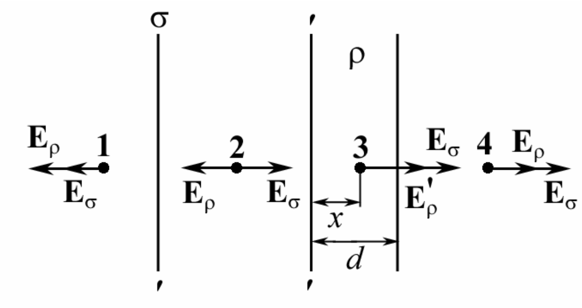


Рис. 2.11.1

Определим напряженность поля E_ρ, созданного заряженным слоем за его пределами. Выберем поверхность Гаусса S в виде прямоугольного ящика (2.11.2)

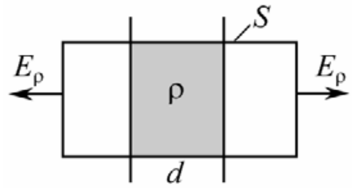


Рис. 2.11.2

$$2E_\rho S = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho S d; \quad E_\rho = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}.$$

Поэтому $E_2 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \dfrac{\rho d}{2\varepsilon_0} = \dfrac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma - \rho d).$

Согласно принципу суперпозиции $E_1 = E_4 = \dfrac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma + \rho d).$

Найдем E_3. Координата точки 3 равна x, причем $x \le d$ (рис. 2.11.1).

$$2E'_\rho S = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho x S; \qquad E'_\rho = \frac{1}{2\varepsilon_0}\rho x.$$

Окончательно (при $x \le d$) $E_3 = \dfrac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma + \rho x)$.

Задача 13. Точечный заряд q расположен в центре куба со стороной d. Чему равна величина интеграла $\int_S (\mathbf{E}, d\mathbf{S})$ по одной грани куба?

Решение: $\oint_S (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$. Прямое интегрирование затруднено, однако в силу симметрии системы имеем $\Phi_E = \dfrac{1}{8}\dfrac{q}{\varepsilon_0}$, т.е. через любую грань поток одинаков.

Ответ: $\Phi_E = q/(8\varepsilon_0)$.

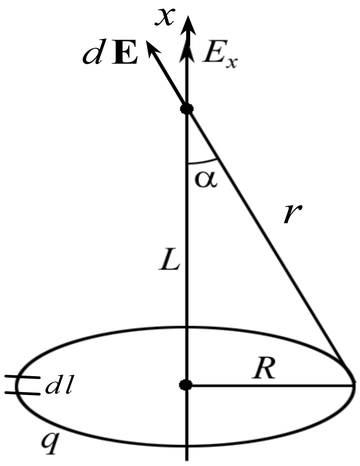


Рис. 2.12

Задача 14. Тонкое кольцо, радиус которого R = 10 см, несет заряд q = 1 нКл. Вычислить напряженность электрического поля на оси кольца, как функцию L расстояния от центра (рис. 2.12). На каком расстоянии L_m электрическое поле максимально?

Решение. Для всех элементов dl кольца (рис. 2.12) при заданном расстоянии L угол α и r будут постоянными. Составляющая напряженности поля

$$dE_x = dE\cos\alpha;$$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq\cdot L}{\left(R^2+L^2\right)^{3/2}},$$

где $\cos\alpha = \dfrac{L}{r} = \dfrac{L}{\left(R^2+L^2\right)^{1/2}}$; $dq = \tau dl$ – заряд элемента dl кольца.

Интегрирование полученного выражения приводит к следующему простому результату:

$$E_x = \frac{qL}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2+L^2\right)^{3/2}}; \qquad E = E_x, \text{ т.к. } E_y = 0.$$

Если $L = 0$, то $E = 0$.

Если $L >> R$, то $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 L^2}$, т.е. при $L \to \infty$ электрическое поле также стремится к нулю.

Чтобы найти точку с $E_{\max}$, выразим величину R и L через угол α:

$$R = r\sin\alpha,\ L = r\cos\alpha.$$

Тогда
$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha,$$

$$\frac{dE}{d\alpha} = 0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(\cos^2\alpha\cdot 2\sin\alpha - \sin^3\alpha\right),$$

или, поделив $2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$ на $\cos^2\alpha$, получим $\mathrm{tg}^2\alpha = 2$.

Из рис. 2.12 имеем $\mathrm{tg}\alpha = R/L$, тогда $L_m = \dfrac{R}{\sqrt{2}} = \dfrac{10}{\sqrt{2}} = 7{,}1$ см.

Ответ: L_m = 7,1 см.

Задачи для самостоятельного решения

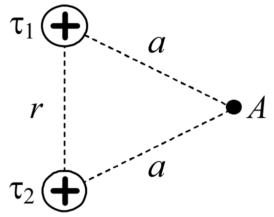


Рис. 2.13

2.1. Две длинные одноименно заряженные нити расположены на расстоянии r = 10 см друг от друга. Линейная плотность заряда на нитях $\tau_1 = \tau_2 = \tau =$ = 10 мкКл/м. Найти модуль и направление напряженности $E_р$ результирующего поля в точке A, находящейся на расстоянии a = 10 см от каждой нити (рис.2.13).

Ответ: $E_р = \sqrt{3}\tau/(2\pi\varepsilon_0 a) = 3{,}12$ МВ/м.

2.2. Показать, что электрическое поле, образованное заряженной нитью конечной длины, в предельных случаях переходит в электрическое поле а) бесконечно длинной заряженной нити; б) точечного заряда.

2.3. Прямой непроводящий стержень диаметром d = 5 см и длиной l = 4 м несет равномерно распределенный по его поверхности заряд q = 500 нКл (заряды неподвижны). Определить напряженность поля в точке, находящейся против середины стержня на расстоянии a = 1 см от его поверхности.

Ответ: $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{4q}{(d+2a)l} = 64{,}3$ кВ/м, $l >> a$.

2.4. Бесконечно длинная тонкостенная непроводящая трубка радиуса R = 2 см несет равномерно распределенный по поверхности заряд (σ = 1 нКл/м^2). Определить напряженность поля в точках, отстоящих от оси трубки на расстояниях: 1) r_1 = 1 см; 2) r_2 = 3 см.

Ответ: $E_1 = 0$ ($r_1 < R$); $E_2 = R\sigma/(\varepsilon_0 r_2) = 75{,}3$ В/м ($r_2 > R$)

2.5. Длина заряженной нити l = 25 см. При каком предельном расстоянии a от нити по нормали к середине нити электрическое поле можно рассматривать как поле бесконечно длинной заряженной нити? Ошибка при таком допущении $\delta = (E_2 - E_1)/E_2 = 0{,}05$. Здесь E_1 – напряженность поля нити конечной длины; E_2 – напряженность поля бесконечно длинной нити.

Ответ: $a = \dfrac{l}{2}\sqrt{1/(1-\delta)^2 - 1} = 4{,}11$ см.

2.6. В точке A, расположенной на расстоянии a = 5 см от бесконечно длинной заряженной нити, напряженность электрического поля E = = 150 кВ/м. При какой предельной длине нити l найденное значение напряженности будет верным с точностью до δ = 0,02, если точка A расположена на нормали к середине нити?

Ответ: $l = 2a\Big/\sqrt{1/(1-\delta)^2 - 1} = 49{,}2$ см

2.7. Медный шар радиусом R = 0,5 см помещен в масло. Найти заряд шара q, если в однородном электрическом поле (E = 3,6 МВ/м), шар оказался взвешенным.

Ответ: $q = 4\pi R^3 g\left(\rho_{\text{Cu}} - \rho_{\text{м}}\right)/(3E) = 11{,}6$ нКл.

2.8. Тонкий стержень длиной l = 12 см заряжен с линейной плотностью зарядов τ = 200 нКл/м. Найти напряженность электрического поля в точке, находящейся на расстоянии r = 5 см от стержня, против его середины.

Ответ: $E = \dfrac{\tau l}{2\pi\varepsilon_0 r\sqrt{4r^2 + l^2}} = 55{,}2$ кВ/м.

2.9. Электрическое поле создано зарядом тонкого заряженного стержня, изогнутого по трем сторонам квадрата (рис. 2.14). Вычислить напряженность поля в точке A, если τ = 500 нКл/м, a = 20 см.

Ответ: $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2\tau}{a}\left(2 - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = 69{,}9$ кВ/м.

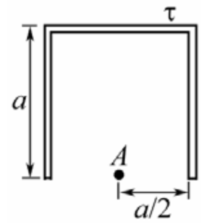


Рис. 2.14

2.10. Два прямых тонких непроводящих стержня длиной $l_1 = l_2 = l$ = 12 см заряжены с линейной плотностью τ = 400 нКл/м. Стержни образуют прямой угол. Найти напряженность E поля в точке A (рис. 2.15).

Ответ: $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\tau}{l}\cdot\left(1 + \sqrt{2}\right) = 72{,}4$ кВ/м.

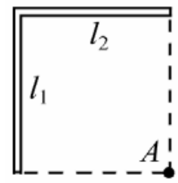


Рис. 2.15

2.11. Электрическое поле создано двумя бесконечно параллельными пластинами, несущими равномерно распределенный по площади заряд с поверхностными плотностями σ_1 = 2 нКл/м^2 и σ_2 = –5 нКл/м^2. Определить величину электрического поля E_1 вне пластин и E_2 между пластинами.

Ответ: $E_1 = (|\sigma_2| - |\sigma_1|)/(2\varepsilon_0)$ = 169,5 В/м;
$E_2 = (|\sigma_2| + |\sigma_1|)/(2\varepsilon_0)$ = 395,5 В/м.

2.12. Напряженность электрического поля на оси заряженного кольца имеет максимальное значение на расстоянии L от центра кольца. Во сколько раз напряженность электрического поля в точке, расположенной на расстоянии 0,5L от центра кольца, будет меньше максимального значения напряженности?

Ответ: $\dfrac{E_m}{E} = 2\left[\left(R^2 + L_m^2/4\right)/\left(R^2 + L_m^2\right)\right]^{3/2}$, где $L_m = R/\sqrt{2}$; E_m/E = 1,3.

2.13. Две бесконечные плоскости, несущие одинаковый заряд, равномерно распределенный с поверхностной плотностью σ = 100 нКл/м^2, пересекаются под углом $\varphi = 60°$. Найти электрическое поле E создаваемое пластинами.

Ответ. $E_1 = (\sigma/\varepsilon_0)\cdot\sin(\varphi/2) = 5{,}65$ кВ/м; $E_2 = (\sigma/\varepsilon_0)\cdot\sin(\varphi) = 9{,}78$ кВ/м.

2.14. Показать, что электрическое поле, образованное заряженным диском, в предельных случаях переходит в электрическое поле: а) бесконечно протяженной плоскости; б) точечного заряда.

2.15. Диаметр заряженного диска $D = 25$ см. При каком предельном расстоянии a от диска по нормали к его центру электрическое поле можно рассматривать как поле бесконечно протяженной плоскости? Ошибка при таком допущении не должна превышать $\delta = 0{,}05$.

Указание. Допускаемая ошибка $\delta = (E_2 - E_1)/E_2$, где E_1 – напряженность поля диска; E_2 – напряженность поля бесконечно протяженной плоскости.

Ответ: $a = \dfrac{D}{2}\dfrac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} = 0{,}63$ см

2.16. Требуется найти напряженность E электрического поля в точке A, расположенной на расстоянии $a = 5$ см от заряженного диска по нормали к его центру. При каком предельном радиусе R диска поле в точке A не будет отличаться более чем на $\delta = 0{,}02$ от поля бесконечно протяженной плоскости?

Ответ: $R = \dfrac{a}{\delta}\sqrt{1-\delta^2} = 2{,}5$ м

2.17. Два параллельных разноименно заряженных диска с одинаковой поверхностной плотностью заряда на них расположены на расстоянии $d = 1$ см друг от друга. Какой предельный радиус R могут иметь диски, чтобы между центрами дисков поле отличалось от поля плоского конденсатора не более чем на $\delta = 0{,}05$? Какую относительную ошибку δ_0 мы допускаем, принимая для этих точек напряженность поля равной напряженности поля плоского конденсатора при $R/d = 5$?

Ответ: $R = \dfrac{d}{2\delta}\sqrt{1-\delta^2} = 10$ см; $\delta_0 = 1\Big/\sqrt{4\left(R/d\right)^2+1} = 0{,}0499 = 5\%$.

2.18. Плоскопараллельная пластинка толщиной d имеет заряд, распределенный равномерно с объемной плотностью ρ_0. Выбрав начало координат посередине пластинки и направив ось $0x$ перпендикулярно поверхности пластин, установите закон изменения напряженности поля вдоль этой оси.

Ответ: $E = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}x$ $(0 \le x \le d/2)$; $E = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\dfrac{d}{2}$ $(x \ge d/2)$.

2.19. В вершине конуса с раствором телесного угла $\Omega = 0{,}5$ стерадиан находится точечный заряд $q = 30$ нКл. Вычислить поток вектора $\mathbf{E}$ через площадку, ограниченную линией пересечения поверхности конуса с любой другой поверхностью.

Ответ: $\Phi_E = q\Omega/(4\pi\varepsilon_0) = 135\ \text{В}\cdot\text{м}$.

2.20. Заряд, равномерно распределен с объемной плотностью ρ = = 10 нКл/м^3 по шару радиусом R = 5 см. Определить напряженность E в точках r_1 = 3 см и $r_2 = R$.

Ответ: $E_1 = \rho r_1/(3\varepsilon_0) = 11{,}3$ В/м; $E_2 = \rho R/(3\varepsilon_0) = 18{,}8$ В/м.

2.21. Большая плоская пластина толщиной d = 1 см несет заряд, равномерно распределенный по объему с объемной плотностью ρ = = 100 нКл/м^3. Найти напряженность электрического поля в центре пластины, вне ее, на малом расстоянии от поверхности.

Ответ: $E_1 = 0$; $E_2 = \rho d/(2\varepsilon_0) = 56{,}5$ В/м.

2.22. Физическая система образована бесконечно большой заряженной непроводящей плоскостью и пластиной толщиной d, находящейся справа от плоскости, объемная плотность заряда которой равна ρ. Сформулируйте задачу! Какие параметры электрического поля можно определить? Задайте необходимые числовые данные задачи. Ответ обосновать формулами, расчетами и рисунками.

2.23. Точечный заряд q = 40 нКл находится на расстоянии a = 30 см от бесконечной проводящей плоскости. Какова напряженность электрического поля в точке A (рис. 2.16)?

Ответ: $E = \dfrac{3q}{64\pi\varepsilon_0 a^2} = 750$ В/м.

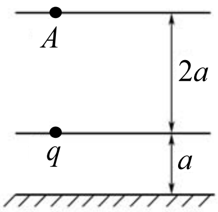


Рис. 2.16

2.24. Прямоугольная плоская площадка со сторонами a = 3 см и b = 2 см находится на расстоянии R = 1 м от точечного заряда q = 1 мкКл. Площадка ориентирована так, что линии напряженности составляют угол α = 30° с ее поверхностью. Найти поток вектора напряженности через площадку.

Ответ: $\Phi_E = \dfrac{abq\cdot\sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = 2{,}7\ \text{В}\cdot\text{м}$.

2.25. Найти электрическое поле, созданное полым бесконечно длинным заряженным цилиндром и заряженной сферой. Выбрать точку пространства, где необходимо вычислить поле **E**, определить необходимые данные, взаимное расположение цилиндра и сферы. Ответ обосновать формулами, расчетами и рисунками.

3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ. РАБОТА ПО ПЕРЕМЕЩЕНИЮ ЗАРЯДА В ПОЛЕ

Основные формулы и обозначения

Потенциал электростатического поля

$$\varphi = \frac{W}{q_0},$$

где q_0 – точечный положительный заряд, помещенный в данную точку поля, W – потенциальная энергия заряда q_0.

Работа, совершаемая силами электрического поля, при перемещении заряда q_0 по некоторому пути, соединяющему исходную (1) и конечную (2) точки поля, равна

$$A_{12} = \int_1^2 (\mathbf{F},\, d\mathbf{r}), \quad A_{12} = q_0 \int_1^2 E_l dl \quad \text{или} \quad A_{12} = q_0(\varphi_1 - \varphi_2),$$

где E_l – проекция вектора $\mathbf{E}$ на направление элементарного перемещения dl; φ_1 и φ_2 – потенциалы в точках 1 и 2 электрического поля.

Связь между напряженностью $\mathbf{E}$ и потенциалом φ электростатического поля

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi \quad \text{или} \quad \mathbf{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{k}\right).$$

Элементарное изменение потенциала, в случае поля, обладающего центральной или осевой симметрией

$$d\varphi = -(\mathbf{E}, d\mathbf{r}).$$

$$\varphi(\mathbf{r}_1) - \varphi(\mathbf{r}_2) = \int_{r_1}^{r_2} (\mathbf{E},\, d\mathbf{r}).$$

Потенциал электростатического поля, созданного в вакууме точечным зарядом q на расстоянии r от заряда

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Принцип суперпозиции (наложения) электростатических полей

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i\,; \qquad \varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i\,,$$

где $\mathbf{E}_i$, φ_i – соответственно напряженность и потенциал поля, создаваемого точечным зарядом q_i.

Потенциал поля точечного ($l << r$) диполя (рис. 3.1)

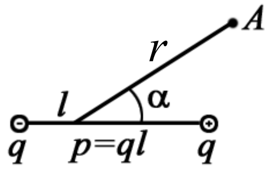


Рис. 3.1

$$\varphi_A = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha;$$

$$E_A = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1+3\cos^2\alpha}\,.$$

Механический момент, действующий на диполь,

$\mathbf{M} = [\mathbf{p},\mathbf{E}]$, или $M = pE\sin\alpha$.

Сила, действующая на диполь в неоднородном поле,

$$\mathbf{F} = p\frac{d\,\mathbf{E}}{dr}\,.$$

Задачи с решениями

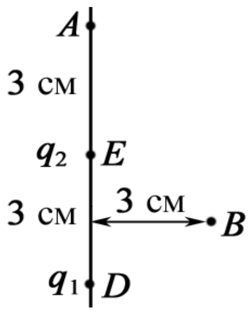


Рис. 3.2

Задача 1. Найти потенциал φ в точках A и B системы из двух точечных зарядов (рис. 3.2): q_1 = 12 нКл, q_2 = –6 нКл, если расстояние между зарядами ED = 3 см. Точка B находится на перпендикуляре, восстановленном из середины отрезка ED.

Решение: Для нахождения потенциала в точках A и B воспользуемся принципом суперпозиции электростатических полей:

$$\varphi_A = \varphi_1^A + \varphi_2^A = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 AD} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 AE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{AD} + \frac{q_2}{AE}\right);$$

$$\varphi_B = \varphi_1^B + \varphi_2^B = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 BD} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 BE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{BD} + \frac{q_2}{BE}\right).$$

Вычисления:

$$\varphi_A = 9\cdot 10^9\left(\frac{12\cdot 10^{-9}}{0{,}06} - \frac{6\cdot 10^{-9}}{0{,}03}\right) = 0;\quad \varphi_B = 9\cdot 10^9\left(\frac{12\cdot 10^{-9}}{0{,}0335} - \frac{6\cdot 10^{9}}{0{,}0335}\right) = 1612 \text{ В.}$$

Очевидно, что можно найти и другие точки, где потенциал равен 0. Обратите внимание, что если перенести какой-либо заряд из ∞ в эти точки (потенциал которых равен нулю), то работа будет равна 0. Можно убедиться, что таких точек много и что они окружают отрицательный заряд.

Ответ: $\varphi_A = 0$; φ_B = 1612 В.

Задача 2. Определить распределение потенциала φ поля, созданного бесконечно длинным заряженным проводом радиуса r_0. Выбрать точку с нулевым потенциалом.

Решение: Воспользовавшись соотношением между потенциалом и напряженностью

$$E = -\frac{d\varphi}{dr},$$

определим потенциал бесконечного, равномерно заряженного провода, проинтегрировав уравнение

$$-\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Находим

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r},$$

$$\varphi - \varphi_0 = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\frac{r}{r_0},$$

где φ_0 – потенциал на поверхности провода радиуса r_0.

Приняв, потенциал на поверхности провода равным нулю ($\varphi_0 = 0$), получим

$$\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\frac{r}{r_0}$$

– потенциал логарифмически изменяется с расстоянием при условии $r_0 \le r << l$, где l – длина провода.

Выбор координаты точки с $\varphi_0 = 0$ не влияет на вычисление напряженности поля, $E(r) = \tau/(2\pi\varepsilon_0 r)$.

Задача 3. Определить потенциал равномерно заряженного диэлектрического диска радиуса R с поверхностной плотностью σ на его оси на расстоянии z от центра. Является ли поверхность диска эквипотенциальной? Найти φ_1 в точке $z = 0$ и φ_2 на краю диска, если $R = 20$ см, $\sigma = 1$ нКл /м^2.

Дано:
$\sigma = 1\cdot10^{-9}$ Кл/м^2
$R = 0{,}2$ м
$z = 0$
φ_1 – ? φ_2 – ?

Решение: Выделим кольцевой сегмент радиусом S и шириной dS (рис. 3.3.1). Все элементы этого кольца находятся на одинаковом расстоянии $r = \sqrt{S^2 + z^2}$ от точки A.

Количество заряда на тонком кольце

$$dq = \sigma 2\pi S dS.$$

Потенциал, который создает тонкое кольцо в искомой точке A, равен

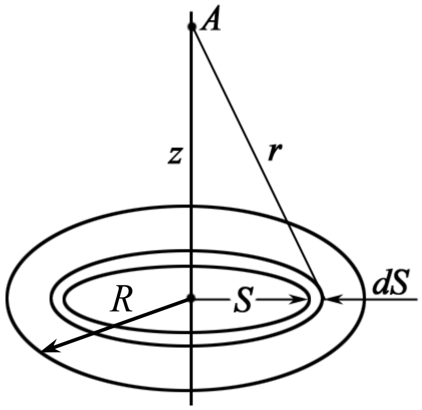


Рис. 3.3.1

$$d\varphi = \frac{2\pi\sigma S dS}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{S^2 + z^2}}.$$

Весь диск создает потенциал в т. A

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{S dS}{\sqrt{S^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + z^2} - z \right). \quad (1)$$

Можно исследовать поведение функции $\varphi(z)$.

Из (1), при $z >> R$, имеем

$$\sqrt{z^2 + R^2} - z \cong z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{z^2} \right) - 1 \right] = \frac{R^2}{2z}.$$

Тогда $\varphi = \dfrac{\sigma R^2}{4\varepsilon_0 z} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 z}$, заряженный диск при $z \to \infty$ можно рассматривать как точечный заряд, где q – заряд диска. Следовательно, при $z \to \infty$, $\varphi_\infty = 0$, что соответствует физическому смыслу.

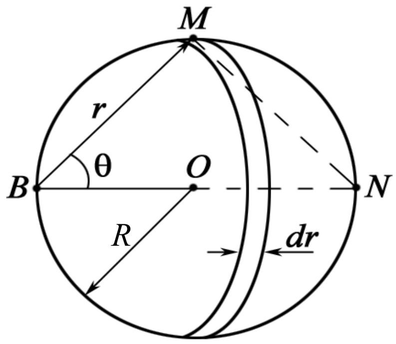


Рис. 3.3.2

Потенциал φ_1 в центре диска, т.е. при $z = 0$ из уравнения 1, равен

$$\varphi_1 = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} = \frac{1 \cdot 10^{-9} \cdot 0{,}2}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} = 11{,}3 \text{ В}.$$

Для ответа на вопрос, является ли поверхность диска эквипотенциальной, необходимо вычислить потенциал в любой другой точке диска, например, на краю диска в точке B (рис. 3.3.2) и сравнить с потенциалом φ_1 в центре диска.

Рассмотрим сегмент кольца, центр которого совпадает с точкой B.

Из рисунка видно, что площадь сегмента равна $ds = 2\theta r dr$.

Потенциал заряженного сегмента в точке B равен

$$d\varphi_B = \frac{2\theta\sigma}{4\pi\varepsilon_0} dr.$$

Чтобы интегрировать, необходимо установить связь между r и θ. Из прямоугольного треугольника BMN $r = 2R\cos\theta$, тогда $dr = -2R\sin\theta d\theta$.

$$\varphi_B = -\int_0^{\pi/2} \frac{\theta\sigma R \, \sin\theta d\theta}{\pi\varepsilon_0} = \frac{\sigma R}{\pi\varepsilon_0},$$

т.к. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \theta \sin\theta d\theta = \left(\sin\theta - \theta\cos\theta \right)\Big|_0^{\pi/2} = 1$.

Вычисления: $\varphi_2 = \varphi_B = \dfrac{\sigma R}{\pi\varepsilon_0} = \dfrac{1\cdot 10^{-9}\cdot 0{,}2}{\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} = 7{,}2$ В, т.е. потенциал φ_2 на краю диска меньше потенциала φ_1 в центре диска.

Таким образом, поверхность диска не является эквипотенциальной. Для того чтобы поверхность была эквипотенциальной, диск должен быть проводящим.

Ответ: не является, $\varphi_1 = 11{,}3$ В; $\varphi_2 = 7{,}2$ В.

Задача 4. Тонкий стержень имеет длину $2a$ и равномерно заряжен с линейной плотностью τ. Определите потенциал поля на оси стержня на расстоянии a от конца стержня и на конце стержня, если $a = 20$ см; $\tau = 1\cdot 10^{-9}$ Кл/м.

Дано:	
$\tau = 1\cdot 10^{-9}$ Кл/м	
$a = 0{,}2$ м	
φ_A – ?	

Решение: Разобьем стержень на участки dx. Каждый из них имеет заряд $dq = \tau dx$ и расположен на расстоянии x от точки A (рис. 3.4). Тогда потенциал, который создает стержень, в точке A равен

$$\varphi_A = \int_{x_0}^{x_0+2a} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 x} = \int_{x_0}^{x_0+2a} \frac{\tau dx}{4\pi\varepsilon_0 x} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{x_0+2a}{x_0}.$$

Если $x_0 = 0$, т.е. точка расположена на конце стержня, потенциал $\varphi \to \infty$.

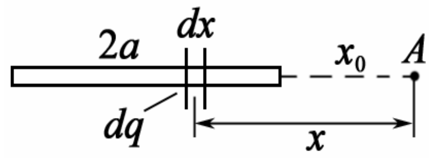


Рис. 3.4

Это не должно нас удивлять, т.к. тот же результат получается для точечного заряда $\varphi = q/(4\pi\varepsilon_0 r)$ при $r = 0$.

Это так называемые особые точки электрических полей. Иногда говорят, что $x_0 \neq 0$, т.к. в этой точке расположен заряд, т.е. точка занята.

При $x_0 = a$ $\varphi_A = \dfrac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{3}{1} = 9\cdot 10^9\cdot 10^{-9}\cdot 1{,}1 \approx 10$ В.

Ответ: $\varphi_A = 10$ В.

Задача 5. Электрическое поле создано тонким стержнем, несущим равномерно распределенный по длине заряд $\tau = 0{,}15$ мкКл/м. Определить потенциал поля в точке, удаленной от концов стержня на расстояние, равное длине стержня (рис. 3.5).

Дано:	
$\tau = 1{,}5\cdot 10^{-7}$ Кл/м	
φ – ?	

Решение: Непосредственное применение формулы $\varphi = q/(4\pi\varepsilon_0 r)$ недопустимо, т.к. расстояние до точки наблюдения сравнимо с размерами стержня.

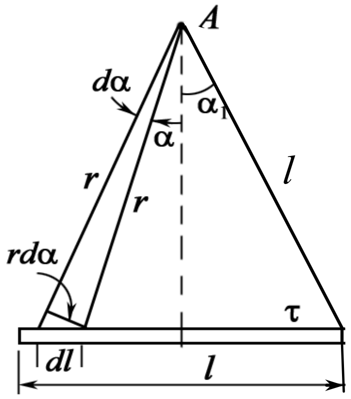


Рис. 3.5

Поэтому нужно применять метод дифференцирования (разбиение стержня на участки dl) и последующего интегрирования.

После разбиения $dq = \tau dl$ и $d\varphi = \dfrac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r}$ задача становится математической, т.к. для интегрирования нужно свести все величины к одной переменной, удобной для интегрирования.

Из рисунка следует, что $dl = \dfrac{rd\alpha}{\cos\alpha}$, т.е.

$$d\varphi = \frac{\tau d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 \cos\alpha};$$

$$\varphi = 2\int_0^{\alpha_1} \frac{\tau \cdot d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 \cos\alpha} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{\alpha_1} \frac{d\alpha}{\cos\alpha}.$$

Из геометрии рисунка $\alpha_1 = \pi/6$, а удвоение появляется в силу симметрии положения точки A.

$$\int_0^{\pi/6} \frac{d\alpha}{\cos\alpha} = \ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]\Bigg|_0^{\pi/6}.$$

Подставляя пределы интегрирования, получим

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}.$$

Полезно обратиться к предельному случаю. Если $\alpha \to \pi/2$, т.е. стержень бесконечно длинный, то $\varphi \to \infty$. Этот результат не должен нас удивлять, т.к. конечной будет разность потенциалов. При интегрировании не учитывается, что на бесконечности потенциал равен нулю.

После подстановки числовых значений найдем

$$\varphi = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}55 = 1483 \text{ В}.$$

Ответ: $\varphi = 1483$ В.

Задача 6. Сфера радиусом R заряжена равномерно с поверхностной плотностью σ. Чему равен потенциал φ электрического поля внутри сферы.

Решение: Внутри сферы напряженность электрического поля $E = 0$. Следовательно, $d\varphi/dr = 0$, откуда $\varphi(r) = \text{const}$, при $r < R$.

Потенциал вне сферы эквивалентен потенциалу поля точечного заряда, помещенного в центр сферы, т.е.

$$\varphi_0(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{4\pi R^2 \sigma}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} \text{ при } r \geq R.$$

По условию непрерывности потенциала $\varphi(r) = \varphi_0(R)$. Тогда $\varphi = \sigma R/\varepsilon_0$, при $r = R$. Потенциал внутри заряженной сферы постоянен и равен потенциалу на ее поверхности. Это соответствует тому, что если напряженность поля равна 0, то и работа по перемещению заряда равна нулю, поэтому $\varphi = \text{const}$ внутри шара.

Задача 7. Тонкое кольцо радиусом R, равномерно заряженное зарядом Q, и проводящая сфера расположены так, что центр сферы O находится на оси кольца на расстоянии l от плоскости кольца (рис. 3.6). Определить потенциал сферы.

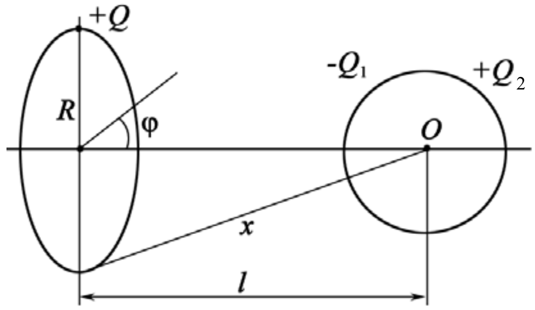


Рис. 3.6

Решение: Физическая система зарядов не является симметричной, поэтому применение теоремы Гаусса не приведет к быстрым результатам.

Прямое использование связи между полем **E** и потенциалом φ представляется сомнительным. Поэтому применим принцип суперпозиции. На проводящей сфере индуцируются заряды $-Q_1$ и Q_2. Результирующее поле создается тремя зарядами: Q, $-Q_1$ и Q_2. Следовательно, потенциал сферы равен $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$, где φ_1, φ_2, φ_3 – потенциалы полей, созданных зарядами Q, $-Q_1$ и Q_2. Потенциал проводника, расположенного в электрическом поле, постоянен. Поэтому мы можем взять удобную точку, например центр сферы (т. O). Величина зарядов Q, $-Q_1$ и Q_2 неизвестна, неизвестна также плотность распределения зарядов $-\sigma_1$ и $+\sigma_2$ по поверхности сферы. Однако ясно, что индуцированные заряды равны по модулю $|Q_1| = |Q_2|$ и находятся на одинаковом расстоянии от центра. Общий потенциал этих зарядов в центре сферы $\varphi_2 + \varphi_3 = 0$.

Осталось рассчитать потенциал φ_1 поля кольца в т. O. По принципу суперпозиции $\varphi = \int \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 x}$ Так как $x = \sqrt{R^2 + l^2}$, то

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + l^2}}.$$

Если заряд Q на кольце распределен неравномерно, например, по закону $Q = Q_0\cos\varphi$, то результат останется тем же.

Ответ: $\varphi = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + l^2}}$.

Задача 8. Внутри шарового металлического слоя внутренний и внешний радиусы равны r и R, на расстоянии $l < r$ от центра находится точечный заряд q. Найдите потенциал поля в центре шара, если q = 1 нКл; r = 0,1 м; R = 0,12 м; l = 0,05 м. Как изменится этот потенциал, если слой заземлить?

Дано:	
$q = 1\cdot10^{-9}$ Кл	
r = 0,1 м	
R = 0,12 м	
l = 0,05 м	
φ – ? φ' – ?	

Решение: Для решения задачи обязателен рисунок. На проводящей сфере индуцируются заряды $q_1 < 0$ и $q_2 > 0$ (рис. 3.7). По абсолютной величине все заряды равны, т.е.

$$q = |\,q_1| = |\,q_2|.$$

В силу симметрии индуцированные заряды равномерно распределены на внутренней и внешней поверхности сферы.

Эти заряды создают внутри сферы постоянные потенциалы.

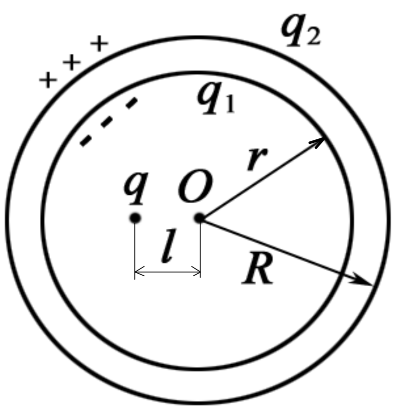


Рис. 3.7

Согласно принципу суперпозиции

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3,$$

где φ_1 – потенциал, создаваемый зарядом q_1; $\varphi_2 - q_2$; $\varphi_3 - q$.

Потенциал точечного заряда q, находящегося на расстоянии l от точки O, равен

$$\varphi_3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}.$$

В силу сферической симметрии

$$\varphi_1 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}; \quad \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Итак,

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right) = 1\cdot10^{-9}\cdot9\cdot10^{9}\cdot\left(\frac{1}{0{,}05} - \frac{1}{0{,}1} + \frac{1}{0{,}12}\right) = 165 \text{ В}.$$

Вторая часть задачи решается весьма просто. При заземлении заряды $+q_2$ стекают с внешней оболочки сферы, поэтому потенциал оставшихся зарядов равен $\varphi' = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{l} - \dfrac{1}{r}\right) = 90\,\text{В}.$

Ответ: φ = 165 В; φ' = 90 В.

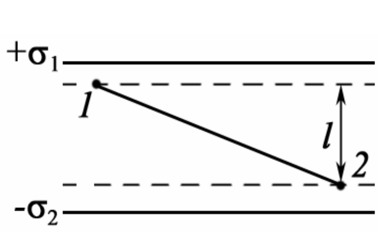


Рис. 3.8.1

Задача 9. Найти работу перемещения заряда q = 1 нКл из точки 1 в точку 2 (рис. 3.8.1), находящиеся между двумя разноименно заряженными с поверхностной плотностью σ_1 = 0,4 мкКл/м^2 и σ_2 = –0,2 мкКл/м^2

бесконечными параллельными плоскостями, если l = 3 см.

Дано:
$\sigma_1 = 4\cdot10^{-7}$ Кл/м^2
$\sigma_2 = -2\cdot10^{-7}$ Кл/м^2
$q = 1\cdot10^{-9}$ Кл
$l = 0{,}03$ м

A – ?

Решение: Работу по перемещению заряда в электрическом поле вычислим по формуле

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (1)$$

Электрическое поле E найдем, применив принцип суперпозиции $E = E_1 + E_2$ (рис. 3.8.2).

Разность потенциалов находим, используя универсальную формулу

$$d\varphi = -(\mathbf{E},d\mathbf{r}) = -E\cdot dl. \qquad (2)$$

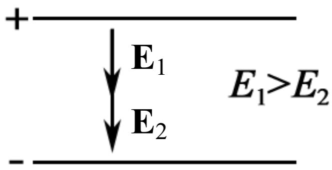


Рис. 3.8.2

Интегрируя (2), имеем

$$\int_1^2 d\varphi = -\int_0^l \left(E_1 + E_2\right) dl,$$

откуда $\varphi_1 - \varphi_2 = (E_1 + E_2)\,l$.

Так как $E_1 = \sigma_1/(2\varepsilon_0)$ и $E_2 = |\sigma_2|/(2\varepsilon_0)$, то

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \left(\frac{\sigma_1 + |\sigma_2|}{2\varepsilon_0}\right) l. \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (1) и учитывая, что знаки σ_1 и σ_2 учтены ранее (рис. 3.8.2), получим

$$A = ql\left(\frac{\sigma_1 + |\sigma_2|}{2\varepsilon_0}\right) = 10^{-9}\cdot 0{,}03\cdot\left(\frac{6\cdot10^{-7}}{2\cdot 8{,}85\cdot10^{-12}}\right) = 1\cdot10^{-6}\ \text{Дж} = 1\ \text{мкДж}.$$

Ответ: A = 1 мкДж.

Задача 10. Может ли существовать в вакууме электрическое поле, вектор напряженности которого **E** во всем объеме поля одинаково направлен, но по величине изменяется по линейному закону $E = E_0 + ky$, если переходить от точки к точке по нормальному к полю направлению (рис. 3.9)?

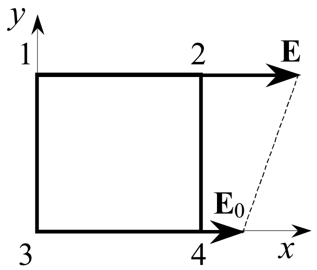


Рис. 3.9

Решение: Условие потенциальности поля: $\oint_L (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = 0$ – циркуляция вектора **E** по любому замкнутому контуру L равна нулю.

Выбираем контур L в виде квадрата со стороной l (контур 12341), как показано на рис. 3.9. Тогда

$$\oint_L (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = \left(E_0 + kl\right)l + 0 - E_0 l + 0 = kl^2 \neq 0.$$

В ы в о д о д н о з н а ч е н. В связи с тем, что циркуляция по произвольному контуру не равна 0, данное поле не является потенциальным и, следовательно, электростатическим.

Ответ: нет.

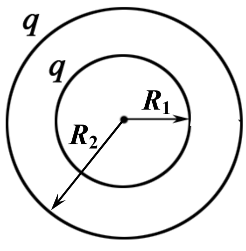


Рис. 3.10

Задача 11. Две проводящие концентрические сферы имеют радиусы R_1 = 10 см и R_2 = 20 см (рис. 3.10). На каждой из них равномерно распределен заряд $q = 5\cdot10^{-9}$ Кл. Чему равна разность потенциалов между ними?

Дано:
$R_1 = 0{,}1$ м
$R_2 = 0{,}2$ м
$q = 5\cdot10^{-9}$ Кл
$\Delta\varphi$ – ?

Решение: Система зарядов абсолютно симметрична. Кроме того, сфера радиусом R_1 имеет (по принципу суперпозиции) всюду внутри себя потенциал

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}.$$

Потенциал второй сферы $\varphi_2 = \dfrac{2q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$.

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Здесь: φ_1 = потенциал первой сферы внутри и на поверхности + потенциал второй сферы; φ_2 = потенциал заряда q первой сферы на расстоянии R_2 + потенциал второй сферы.

Вычисления: $\Delta\varphi = 5\cdot10^{-9}\cdot9\cdot10^{9}\cdot\left(\frac{1}{0{,}1} - \frac{1}{0{,}2}\right) = 225$ В.

Ответ: $\Delta\varphi$ = 225 В.

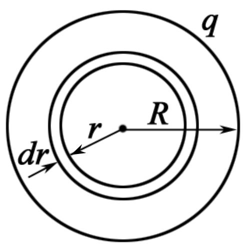


Рис. 3.11

Задача 12. Заряд q = 1 нКл распределен равномерно по объему шара радиусом R = 10 см (рис. 3.11). Найти потенциал в центре шара.

Дано:
$q = 1\cdot10^{-9}$ Кл
$R = 0{,}1$ м
φ – ?

Решение. Известна величина напряженности E равномерно заряженного шара $E = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0} r$,

где ρ – объемная плотность заряда.

Казалось бы, что, применяя простую формулу $E = -d\varphi/dr$, можно вычислить неизвестную величину. Однако следует заметить, что $E = 0$ при $r = 0$.

Поэтому нужно использовать принцип суперпозиции и первоначально определить потенциал сферы радиуса r и толщины dr

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho \cdot 4\pi r^2 dr}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Интегрируя, приняв потенциал $\varphi = 0$ при $r \to \infty$, получим

$$\varphi = \int_0^R \frac{\rho r dr}{\varepsilon_0} = \frac{\rho r^2}{2\varepsilon_0}\bigg|_0^R = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}, \text{ где } \rho = \frac{q}{V_{\text{шара}}} = \frac{q}{(4/3)\pi R^3}.$$

Или $$\varphi = \frac{qR^2}{2\varepsilon_0(4/3)\pi R^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3q}{2R}.$$

Вычислим φ, подставив численные данные:

$$\varphi = 9\cdot 10^9 \cdot 3\cdot 10^{-9}/0{,}2 = 135 \text{ В}.$$

Ответ: $\varphi = 135$ В.

Задача 13. Диполь с электрическим моментом p = 2 нКл·м находится в однородном электрическом поле напряженностью E = 30 кВ/м. Вектор **p** составляет угол $\alpha_0 = 60°$ с направлением силовых линий поля (рис. 3.12). Определить произведенную внешними силами работу поворота диполя на угол $\beta = 30°$.

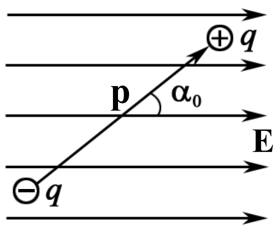


Рис. 3.12

Дано:	
$p = 2\cdot 10^{-9}$ Кл·м	
$E = 3\cdot 10^4$ В/м	
$\alpha_0 = 60°$	
$\beta = 30°$	
A – ?	

Решение: Элементарная работа dA при повороте на угол $d\alpha$ выразится формулой

$$dA = M d\alpha = pE\sin\alpha\, d\alpha,$$

где M – механический момент, действующий на диполь.

Полная работа при повороте от угла α_0 до α

$$A = \int_{\alpha_0}^{\alpha} pE\sin\alpha d\alpha = pE\int_{\alpha_0}^{\alpha}\sin\alpha d\alpha = pE(\cos\alpha_0 - \cos\alpha).$$

Задача не совсем определена, т.к. диполь можно повернуть на угол $\beta = 30° = \pi/6$ двумя способами: по часовой стрелке до угла

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \beta = \pi/3 - \pi/6 = \pi/6$$

или против часовой стрелки до угла

$$\alpha_2 = \alpha_0 + \beta = \pi/3 + \pi/6 = \pi/2.$$

При повороте по часовой стрелке

$$A_1 = pE(\cos\alpha_0 - \cos\alpha_1) = 2\cdot10^{-9}\cdot3\cdot10^4\cdot(0{,}5 - 0{,}866) = -2{,}2\cdot10^{-5} \text{ Дж}.$$

Диполь будет поворачиваться под действием сил электрического поля, поэтому работа A_1 внешних сил отрицательна.

При повороте диполя против часовой стрелки работу A_2 совершают внешние силы.

$$A_2 = pE(\cos\alpha_0 - \cos\alpha_2) = 2\cdot10^{-9}\cdot3\cdot10^4\cdot(0{,}5 - 0) = 3\cdot10^{-5} \text{ Дж}.$$

Ответ: $A_1 = -22$ мкДж; $A_2 = 30$ мкДж.

Задача 14. Точечный диполь с электрическим моментом $p = 2\cdot10^{-12}$ Кл·м свободно установился в поле, созданном бесконечной непроводящей прямой нитью, заряженной с линейной плотностью заряда $\tau = 5\cdot10^{-7}$ Кл/м на расстоянии $r = 20$ см от нее. Определить степень неоднородности поля в направлении силовой линии и силу F, действующую на диполь.

Дано:
$p = 2\cdot10^{-12}$ Кл·м
$\tau = 5\cdot10^{-7}$ Кл/м
$r = 0{,}2$ м

dE/dr – ?
F – ?

Решение: Степень неоднородности поля предполагает, что величина $dE/dr \neq 0$. Напряженность E, создаваемая бесконечно заряженной нитью на расстоянии r от оси нити

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\tau}{r}; \quad \left|\frac{dE}{dr}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\tau}{r^2}.$$

Сила, действующая на диполь в неоднородном поле

$$F = p\frac{dE}{dr} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\tau}{r^2}.$$

Произведем вычисления:

$$\frac{dE}{dr} = 9\cdot10^9\cdot\frac{2\cdot5\cdot10^{-7}}{0{,}04} = 2{,}25\cdot10^5 \text{ В/м}^2;$$

$$F = 2\cdot10^{-12}\cdot2{,}25\cdot10^5 = 4{,}5\cdot10^{-7} \text{ Н} = 0{,}45 \text{ мкН}.$$

Ответ: $dE/dr = 225$ кВ/м^2; $F = 0{,}45$ мкН.

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Определить потенциал φ электрического поля, созданного двумя зарядами $q_1 = -0{,}2$ мкКл и $q_2 = 0{,}5$ мкКл, в точке, отстоящей соответственно на $r_1 = 15$ см и $r_2 = 25$ см. Найти минимальное и максимальное расстояние, при котором возможно данное решение.

Ответ: $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right) = 6$ кВ;

$d_{min} = (r_2 - r_1) = 10$ см; $d_{max} = (r_1 + r_2) = 40$ см.

3.2. Какова потенциальная энергия системы четырех одинаковых зарядов q = 10 нКл, расположенных в вершинах квадрата со стороной a = 0,1 м?

Ответ: $U = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\sqrt{32}q^2}{a} = 50$ мкДж.

3.3. Два бесконечно длинных коаксиальных цилиндра с радиусами R_1 = 10 мм и R_2 = 10,5 мм заряжены одноименными зарядами, причем поверхностная плотность зарядов на внешнем цилиндре σ_2 = $= (2/3)\cdot 10^{-6}$ Кл/м^2, а на внутреннем $\sigma_1 = (1/3)\cdot 10^{-6}$ Кл/м^2. Найти разность потенциалов между цилиндрами.

Ответ: При $\Delta R << R$ $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \approx \left(\dfrac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\varepsilon_0}\right)(R_2 - R_1) = 9{,}4$ В.

3.4. Три одинаковые пластины площадью S = 0,1 м^2 каждая расположены параллельно друг другу на расстоянии a = 1 мм одна от другой ($a << \sqrt{S}$). Какова разность потенциалов между пластинами φ_{12} и φ_{23}, если на первой находится заряд q_1 = 1 мкКл, на второй q_2 = 0,5 мкКл, на третьей q_3 = –0,25 мкКл?

Ответ: $\varphi_{12} = (q_1 - q_2 + |q_3|)\dfrac{a}{2\varepsilon_0 S} = 424$ В; $\varphi_{23} = (q_1 + q_2 + |q_3|)\dfrac{a}{2\varepsilon_0 S} = 988$ В.

3.5. Находящаяся в вакууме бесконечная тонкая прямая нить заряжена с постоянной линейной плотностью τ = 2 мкКл/м. Вычислить разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между точками на перпендикуляре, восставленном к оси нити. Расстояние точек от нити равны r_1 = 1 м и r_2 = 10 м.

Ответ: $\varphi_1 - \varphi_2 = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\dfrac{r_2}{r_1} = 82{,}8$ кВ.

3.6. По находящейся в вакууме круглой тонкой пластинке радиусом R = 120 мм равномерно распределен заряд q = 1,8 мкКл. Приняв ось пластинки за x, вычислить φ в точке x = 8 см.

Ответ: $\varphi = \dfrac{q}{2\varepsilon_0\pi R^2}\left(\sqrt{R^2 + x^2} - x\right) = 1{,}44\cdot 10^5$ В.

3.7. Заряд q = 2,0 мкКл распределен равномерно по объему шара радиусом R = 4 см. Найти потенциал φ в центре шара, если ε = 1.

Ответ. $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{3q}{2R} = 6{,}75\cdot 10^5$ В.

3.8. Найти потенциал электрического поля в центре полусферы радиусом R = 20 см, заряженной равномерно с поверхностной плотностью $\sigma = 2\cdot 10^{-6}$ Кл/м^2.

Ответ: $\varphi = \sigma R/(2\varepsilon_0)$ = 22,6 кВ.

3.9. Имеются два тонких проволочных кольца радиусом R = 0,2 м, оси которых совпадают. Заряды колец равны: $q_1 = 10^{-9}$ Кл, $q_2 = -10^{-9}$ Кл. Найти разность потенциалов $\Delta\varphi$ между центрами колец, отстоящими друг от друга на расстоянии a = 0,4 м.

$$\text{Ответ: } \Delta\varphi = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\left(a/R\right)^2}}\right) \approx 50 \text{ В}.$$

3.10. Тонкий стержень длиной l = 10 см несет равномерно распределенный заряд q = 1 нКл. Определить потенциал электрического поля в точке A, лежащей на оси стержня на расстоянии a = 20 см от ближайшего его конца.

$$\text{Ответ: } \varphi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{l}\ln\frac{l+a}{a} = 36{,}5 \text{ В}.$$

3.11. Тонкие стержни образуют квадрат со стороной a. Стержни заряжены с линейной плотностью τ = 1,33 нКл/м. Найти потенциал φ в центре квадрата.

$$\text{Ответ: } \varphi = \frac{2\tau}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}\right) = 84{,}5 \text{ В}.$$

3.12. Бесконечно длинная тонкая прямая нить несет равномерно распределенный по длине заряд с линейной плотностью $\tau = 10^{-8}$ Кл/м. Определить разность потенциалов двух точек, удаленных от нити на r_1 = 2 см, r_2 = 4 см; r_1' = 4 см и r_2' = 8 см; r_1'' = 20 см и r_2'' = 40 см. Объясните результат.

$$\text{Ответ: } \Delta\varphi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\frac{r_2}{r_1} = 125 \text{ В}; \Delta\varphi' = \Delta\varphi'' = \Delta\varphi.$$

3.13. Имеются две концентрические металлические сферы радиусом R_1 = 3 см и R_2 = 6 см. Заряд внутренней сферы q_1 = –1 нКл, внешней – q_2 = 2 нКл. Найти потенциал электрического поля на расстоянии r_1 = 1 см и r_2 = 5 см от центра сфер.

$$\text{Ответ: } \varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_2}{R_2} - \frac{|q_1|}{R_1}\right) = 0 \text{ В}; \ \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_2}{R_2} - \frac{|q_1|}{r_2}\right) = 120 \text{ В}.$$

3.14. Заряд распределен равномерно по бесконечной плоскости с поверхностной плотностью $\sigma = 10^{-8}$ Кл/м^2. Определить разность потенциалов двух точек поля, одна из которых находится на плоскости, а другая удалена от плоскости на расстояние a = 10 см.

$$\text{Ответ: } \Delta\varphi = aE = \frac{a\sigma}{2\varepsilon_0} = 56{,}5 \text{ В}.$$

3.15. Тонкий диск радиусом R = 0,2 м имеет заряд $\sigma = 2\cdot10^{-8}$ Кл/м^2. Заряд равномерно распределен по поверхности. Найти разность потенциалов между центром и краем диска.

Ответ: $\Delta\varphi = \dfrac{\sigma R(\pi - 2)}{2\pi\varepsilon_0} = 82$ В.

3.16. Найти потенциал на краю диска (R = 0,2 м), по одной стороне которого равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 10^{-8}$ Кл/м^2.

Ответ: $\varphi = \sigma R/(\pi\varepsilon_0) = 72$ В.

3.17. По находящейся в вакууме круглой тонкой пластинке радиусом R = 120 мм равномерно распределен заряд $q = 1{,}8\cdot10^{-6}$ Кл. Потенциал φ в точке A, расположенной по оси x, равен 140 кВ. Найти координату точки x.

Ответ: $x = a - \dfrac{R^2}{4a} = 8{,}5$ см; где $a = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varphi} = 11{,}6$ см.

3.18. Определить потенциал в центре кольца с внешним диаметром D = 0,8 м и внутренним диаметром d = 0,4 м, если на нем равномерно распределен заряд $q = 3\cdot10^{-7}$ Кл.

Ответ: $\varphi = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0(R_1 + R_2)} = 9$ кВ.

3.19. Сплошной шар из диэлектрика (ε = 1) радиусом R = 0,1 м заряжен с объемной плотностью ρ = 50 нКл/м^3. Вычислить разность потенциалов $\Delta\varphi$ между центром шара и поверхностью.

Ответ: $\Delta\varphi = \rho R^2/(6\varepsilon_0) = 9{,}4$ В.

3.20. Тонкий стержень согнут в кольцо радиусом R = 0,1 м. Он заряжен с линейной плотностью заряда τ = 0,3 мкКл/м. Какую работу надо совершить, чтобы перенести заряд q = 5 нКл из центра кольца в точку A, расположенную на оси кольца на расстоянии a = 0,2 м от его центра?

Ответ: $A = \dfrac{q\tau}{2\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{1 + (a/R)^2}}\right) = 47$ мкДж.

3.21. Тонкий стержень согнут в кольцо. Чтобы перенести заряд q = –6,7 нКл из центра кольца в бесконечность, затратили работу A = 25,2 мкДж. Чему равна линейная плотность заряда τ стержня?

Ответ: $\tau = -2\varepsilon_0 A_3/q = 66{,}7$ нКл/м.

3.22. Определить напряженность E и потенциал φ поля, созданного точечным диполем в точках A и B. Электрический момент диполя p = $= 1\cdot10^{-12}$ Кл·м, а расстояние от точек A и B до центра диполя r = 10 см.

Точка A находится на перпендикуляре к середине диполя, а точка B – на оси диполя.

Ответ: $E_A = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = 9$ В/м; $E_B = 2E_A = 18$ В/м; $\varphi_A = 0$; $\varphi_B = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0{,}9$ В.

3.23. Диполь с электрическим моментом $p = 1\cdot10^{-10}$ Кл·м свободно устанавливается в однородном поле $E = 10$ кВ/м. Определите изменение ΔU потенциальной энергии при его повороте на угол $\beta = 60°$.

Ответ: $\Delta U = pE(1 - \cos\beta) = 0{,}5$ мкДж.

3.24. Точечный диполь с электрическим моментом $p = 5$ нКл·м свободно установился в поле точечного заряда $q = 100$ нКл на расстоянии $r_0 =$ $= 10$ см от него. Определить степень неоднородности $|dE/dr|$ поля для этой точки и силу F, действующую на диполь.

Ответ: $\left|\dfrac{dE}{dr}\right|_{r=r_0} = \dfrac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r_0^3} = 1{,}8$ МВ/м^2; $F = p\left|\dfrac{dE}{dr}\right| = 9$ мН.

3.25. Определить взаимную потенциальную энергию U диполей, соответствующую их устойчивому равновесию, лежащих на одной прямой на расстоянии $r = 10$ см друг от друга и равных по величине: $p_1 =$ $= 20$ нКл·м, $p_2 = 50$ нКл·м.

Ответ: $U = \dfrac{p_1 p_2}{2\pi\varepsilon_0 r^3} = 18$ мДж.

4. ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Основные формулы и обозначения

Напряженность электрического поля в однородном диэлектрике

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma_{своб} - \sigma_{пол}}{\varepsilon_0}\mathbf{n},$$

где $\sigma_{своб}$ – плотность на обкладках металлических пластин, создающих электрическое поле; $\sigma_{пол}$ – поверхностная плотность поляризационных зарядов; $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности.

Поток вектора $\mathbf{P}$ через замкнутую поверхность S

$$\oint_S (\mathbf{P}, d\mathbf{S}) = -q_{пол},$$

где $q_{пол}$ – поляризационный заряд.

Объемная плотность поляризационных зарядов

$$\operatorname{div}\mathbf{P} = -\rho_{пол}.$$

Вектор поляризации в однородном диэлектрике

$$\mathbf{P} = \chi\varepsilon_0\mathbf{E},\ P = \sigma_{пол},$$

где $\chi = (\varepsilon - 1)$ – диэлектрическая восприимчивость диэлектрика; ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды.

Связь между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}_0$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\frac{1}{1+\chi} = \frac{\mathbf{E}_0}{\varepsilon},$$

где $\mathbf{E}$ – поле в диэлектрике; $\mathbf{E}_0 = (\sigma_{своб}/\varepsilon_0)\mathbf{n}$ – электрическое поле, созданное между плоскопараллельными пластинами вне диэлектрика.

Вектор электрической индукции

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

В простейшем случае, когда связь между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ линейна

$$\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}.$$

Поток вектора $\mathbf{D}$ через замкнутую поверхность S

$$\oint_S (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = q_{своб}.$$

Поле $\mathbf{E}_{лок}$ в свободной полости диэлектрика

$$\mathbf{E}_{лок} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}.$$

Поле внутри поляризованного шара

$$\mathbf{E}' = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}.$$

Формула Клаузиуса – Моссотти

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3}\alpha N,$$

где α – атомная поляризуемость; N – полное число молекул в единице объема.

Связь между диэлектрической восприимчивостью χ и поляризуемостью молекул α

$$\frac{\chi}{\chi + 3} = \frac{1}{3}\alpha N,$$

при $N\alpha << 1$ (число N молекул газах в единице объема мало)

$$\chi \approx \alpha N.$$

Задачи с решениями

Задача 1. Найти поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma_{пол}$ на границе однородного диэлектрика с проводником, если известна поверхностная плотность $\sigma = 3{\cdot}10^{-6}$ Кл/м^2 зарядов на проводнике и диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 3$.

Дано:
$\sigma = 3{\cdot}10^{-6}$ Кл/м^2
$\varepsilon = 3$
$\sigma_{пол}$ – ?

Решение: Обращаем внимание на ключевые слова задачи: однородный диэлектрик, заряженный проводник.

Воспользуемся понятием потока вектора **P** через замкнутую поверхность S, где S – поверхность Гаусса

$$\oint_S (\mathbf{P}, d\mathbf{S}) = -q_{пол},$$

где $q_{пол}$ – поляризационный заряд.

Так как $\mathbf{P} = \chi\varepsilon_0\mathbf{E}$, то $\chi\varepsilon_0 \oint_S (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = -q_{пол}.$

В последнем выражении **E** – электрическое поле, созданное свободными и поляризационными зарядами внутри замкнутой поверхности S, поэтому $\oint (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \frac{1}{\varepsilon_0}(q + q_{пол})$, или окончательно

$$q_{пол} = -\frac{\chi}{1+\chi}q = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}q, \text{ где } \chi = \varepsilon - 1.$$

В этом выражении q можно заменить на dq. При этом

$$dq = \sigma dS,\ dq_{пол} = \sigma_{пол} dS.$$

Получаем окончательное выражение для расчета $\sigma_{пол}$

$$\sigma_{пол} = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma = -\frac{(3-1)}{3}\cdot 3\cdot 10^{-6} = -2\cdot 10^{-6}\ \text{Кл/м}^2.$$

Ответ: $\sigma_{пол} = -2$ мкКл/м^2.

Задача 2. Определите условия, при которых в диэлектрике объемная плотность зарядов $\rho_{пол} = 0$.

Решение: Для решения задачи воспользуемся соотношением между избыточным связанным зарядом $q_{пол}$ и сторонним зарядом q

$$q_{пол} = -\frac{\chi}{\chi + 1}q. \qquad (1)$$

Это соотношение справедливо для любого объема внутри диэлектрика, в частности и для физически бесконечно малого, когда $q_{пол} \to \to dq_{пол} = \rho_{пол}\, dV$ и $q \to dq = \rho dV$.

Формула (1) после подстановки принимает вид

$$\rho_{пол} = -\frac{\chi}{\chi + 1}\rho. \qquad (2)$$

Отсюда следует, что если в произвольное электрическое поле поместить однородный изотропный диэлектрик какой угодно формы, можно определенно сказать, что при его поляризации появятся только поверхностные связанные заряды. Объемные избыточные заряды во всех точках такого диэлектрика будут равны 0.

Задача 3. На металлической пластине (рис. 4.1) с зарядом q = = 5 мкКл расположен однородный слой диэлектрика ($\varepsilon = 5$). Найти поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma_{пол}$, считая, что заряд на пластине распределен равномерно.

Дано:
$q_{своб} = 5\cdot 10^{-6}$ Кл
$\varepsilon = 5$
$\sigma_{пол}$ – ?

Решение: Выберем поверхность S, как указано на рис. 4.1. Запишем теорему Гаусса для вектора **E**

$$\oint_S \mathbf{E}, d\mathbf{S} = \frac{q_{своб} - q_{пол}}{\varepsilon_0}, \qquad (1)$$

где **E** – вектор электрического поля в диэлектрике. Учитывая, что через боковые грани S поток E равен нулю, а внутри проводника $E = 0$ (рис. 4.1), уравнение (1) перепишем в виде

$$ES = \frac{q_{своб} - q_{пол}}{\varepsilon_0} \text{ или } E = \frac{\sigma_{своб} - \sigma_{пол}}{\varepsilon_0}. \qquad (2)$$

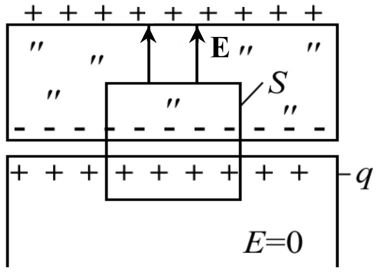


Рис. 4.1

Электрическое поле внутри диэлектрика

$$E = E_0/\varepsilon. \qquad (3)$$

Внешнее электрическое поле E_0 создано заряженной металлической плоскостью. Величина напряженности этого поля, с учетом, что внутри пластины поле $E = 0$,

$$E_0 = \sigma_{своб}/\varepsilon_0. \qquad (4)$$

Комбинируя уравнения (2) – (4), получим

$$\frac{\sigma_{своб} - \sigma_{пол}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{своб}}{\varepsilon\varepsilon_0} \text{ или } \frac{\sigma_{своб}}{\varepsilon} = \sigma_{своб} - \sigma_{пол}. \qquad (5)$$

Из уравнения (5) находим

$$\sigma_{пол} = \sigma_{своб}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Так как $\sigma_{пол} = \dfrac{q_{пол}}{S}$; $\sigma_{своб} = \dfrac{q_{своб}}{S}$, то

$$q_{пол} = q_{своб}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = 5 \cdot 10^{-6}\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}.$$

Ответ: $q_{пол}$ = 4 мкКл.

Задача 4. Плоская пластина из однородного диэлектрика (ε = 2) помещена во внешнее электрическое поле напряженностью $8{\cdot}10^5$ В/м. Найти поверхностную плотность зарядов на диэлектрике.

Дано:
$E_0 = 8{\cdot}10^5$ В/м
$\varepsilon = 2$
$\sigma_{пол}$ – ?

Решение: Известно, что вектор поляризации **P** равен по модулю поверхностной плотности зарядов

$$|\mathbf{P}| = \sigma_{пол}. \qquad (1)$$

С другой стороны, $P = \chi\varepsilon_0 E$, где $\chi = \varepsilon - 1$; E – электрическое поле в диэлектрике, $E = E_0/\varepsilon$.

Подставляя в (1), получаем

$$\sigma_{пол} = \chi\varepsilon_0\frac{E_0}{\varepsilon} = (2-1)\cdot 8.85\cdot 10^{-12}\cdot\frac{8\cdot 10^5}{2} = 3.54\cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2.$$

Ответ: $\sigma_{пол}$ = 3,54 мкКл/м^2.

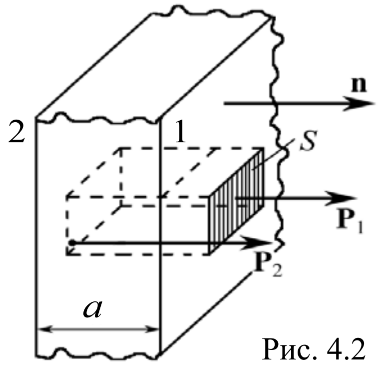


Рис. 4.2

Задача 5. Бесконечная пластина толщиной a из изотропного диэлектрика поляризована так, что поляризованность вблизи одной границы пластины $\mathbf{P}_1 = P_1\mathbf{n}$, а вблизи другой границы $\mathbf{P}_2 = P_2\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ – единичный вектор, перпендикулярный к пластине и направленный от второй границы к первой (рис. 4.2). Найти среднюю по объему пластины объемную плотность связанных зарядов $\langle\rho\rangle$.

Решение: Поток вектора **P** сквозь произвольную замкнутую поверхность S равен взятому с обратным знаком избыточному связанному заряду диэлектрика в объеме, охватываемом поверхностью S

$$\oint_S \mathbf{P}, d\mathbf{S} = -q_{\text{пол}}. \quad (1)$$

Поскольку пластина плоская, то поверхность S можно выбрать в виде прямоугольного «ящика», рис. 4.2. Тогда

$$\oint_S \mathbf{P}, d\mathbf{S} = P_1 S - P_2 S = (P_1 - P_2)\cdot S = q_{\text{пол}}, \quad (2)$$

знак « – » в выражении (1) всегда означает, что связанные заряды, и заряды, являющиеся источником поля, имеют противоположные знаки.

В нашей задаче разность потоков двух векторов P_1 и P_2 через торцовые поверхности S равна величине заряда, сосредоточенного в объеме $S{\cdot}a$. Уравнение (2) разделим на $V = Sa$

$$\frac{(P_1 - P_2)S}{Sa} = \frac{q_{\text{пол}}}{V} = \langle\rho\rangle.$$

Окончательно получаем $\langle\rho\rangle = \dfrac{P_1 - P_2}{a}$.

Ответ: $\langle\rho\rangle = (P_1 - P_2)/a$.

Задача 6. В зазор между разноименно заряженными плоскостями ввели пластину из диэлектрика, не несущую сторонних зарядов (рис. 4.3). Штриховой линией на рисунке показана воображаемая замкнутая поверхность, частично проходящая внутри диэлектрика, частично вне его. Чему равен поток вектора **D** через эту поверхность?

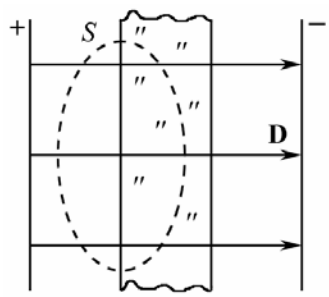


Рис. 4.3

Решение: Поток вектора **D** сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме сторонних зарядов, охватываемых этой поверхностью.

Сторонними называют свободные заряды, которые являются источниками поля. По условию задачи на пластине диэлектрика они отсутствуют, поэтому

$$\oint_S (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = q_{\text{своб}} = 0.$$

Из рисунка видно, что число силовых линий **D**, вошедших в S и вышедших из нее, одинаково в силу непрерывности линий вектора **D**. Следовательно, поток вектора **D** через замкнутую поверхность равен 0.

Ответ: поток равен нулю.

Задача 7. Точечный сторонний заряд q находится в центре шара R из однородного диэлектрика с проницаемостью ε. Найти поляризованность **P** как функцию радиуса-вектора r относительно центра шара, а также связанный заряд q внутри сферы, радиус которой меньше радиуса шара.

Решение: 1. Выбираем ключевые слова из текста задачи. Таковыми являются два: однородный диэлектрик и вектор **P**. Поэтому можно записать

$$\mathbf{P} = \chi\varepsilon_0\mathbf{E},$$

где $\chi = \varepsilon - 1$; **E** – электрическое поле в диэлектрике.

Поле в шаре известно $\mathbf{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}\mathbf{r}$.

Цепочка рассуждений позволяет записать ответ в виде формулы: $\mathbf{P} = \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\varepsilon_0 \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathbf{r}$. Окончательно $\mathbf{P} = \left(\dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right)\dfrac{q}{4\pi r^3}\mathbf{r}$.

2. Из основного свойства поля вектора **P** следует, что в случае однородного диэлектрика можно записать

$$\oint_S \mathbf{P}, d\mathbf{S} = \chi\varepsilon_0 \oint_S \mathbf{E}, d\mathbf{S} = -q_{\text{пол}},$$

$$\oint_S \mathbf{E}, d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(q_{\text{пол}} + q\right).$$

Отсюда $\chi(q_{\text{пол}} + q) = -q_{\text{пол}}$, и окончательно

$$q_{\text{пол}} = -\left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right)q.$$

Ответ: $\mathbf{P} = \left(\dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right)\dfrac{q}{4\pi r^3}\mathbf{r}$; $q_{\text{пол}} = -\left(\dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right)q$.

Задача 8. Точечный заряд q находится в центре сферического слоя неоднородного изотропного диэлектрика, проницаемость которого изменяется только в радиальном направлении по закону $\varepsilon = \alpha/r$, где α – постоянная; r – расстояние от центра системы. Найти объемную плотность $\rho_{\text{пол}}$ связанных зарядов как функцию r внутри слоя.

Решение: Вычислим поток вектора P через замкнутую поверхность S в виде сферы, т.к. в задаче речь идет о сферически симметричном распределении заряда

$$4\pi r^2\mathbf{P} = -q_{\text{пол}}(\mathbf{r}) \text{ или } 4\pi r^2 P = -q_{\text{пол}}(r), \qquad (1)$$

где **P** – радиально направленный вектор поляризации; $q_{пол}(\mathbf{r})$ – поляризационный заряд внутри выбранной сферы S.

Так как ε является функцией r, нельзя $\rho_{пол}$ вычислять простым делением заряда $q_{пол}$ на объем. Поэтому выражение (1) нужно дифференцировать:

$$4\pi\left(r^2\frac{dP}{dr}+2rP\right)=-\frac{dq_{пол}}{dr}. \quad (2)$$

Элементарный заряд сферического слоя толщиной dr

$$dq_{пол} = \rho_{пол}\cdot 4\pi r^2 dr. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получаем

$$r^2\frac{dP}{dr}+2rP=-\rho_{пол}r^2.$$

$$\rho_{пол}=-\left(\frac{dP}{dr}+\frac{2}{r}P\right). \quad (4)$$

Функцию P необходимо выразить в явном виде, как функцию от r.

$$P=\chi\varepsilon_0 E=(\varepsilon-1)\varepsilon_0\frac{E_0}{\varepsilon}\equiv\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\frac{q}{4\pi r^2}=\frac{(\alpha/r)-1}{\alpha/r}\frac{q}{4\pi r^2}=\frac{q}{4\pi r^2}-\frac{q}{4\pi\alpha r}.$$

Или

$$P=\frac{q}{4\pi r^2}-\frac{q}{4\pi\alpha r};\qquad \frac{dP}{dr}=\frac{q}{4\pi\alpha r^2}-2\frac{q}{4\pi r^3}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), окончательно получаем

$$\rho_{пол}=\frac{q}{4\pi\alpha r^2}.$$

Ответ: $\rho_{пол}=q/\left(4\pi\alpha r^2\right)$.

Задача 9. Бесконечно большая пластина из однородного диэлектрика с проницаемостью ε = 6 заряжена равномерно сторонним зарядом с объемной плотностью $\rho = 1\cdot10^{-6}$ Кл/м^3. Толщина пластины $2a$ (рис. 4.4). Найти поверхностную и объемную плотности связанного заряда, если $a = 1$ см.

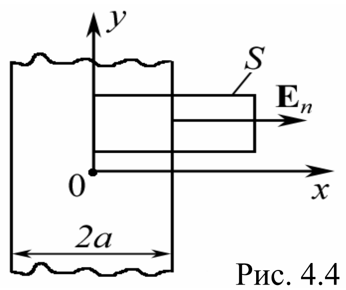


Рис. 4.4

Решение: Решение может быть найдено достаточно просто, если записать формулу поляризованности однородного диэлектрика

$$\sigma_{пол} = P_n = \chi\varepsilon_0 E_n, \quad (1)$$

где $\chi = \varepsilon - 1$ – диэлектрическая восприимчивость диэлектрика.

Эта формула удовлетворяет условию задачи об однородном диэлектрике. Из соображений симметрии ясно, что в точке 0 $E = 0$.

Для определения E_n воспользуемся теоремой Гаусса для вектора **D**, т.к. известно распределение свободных зарядов ρ

$$\oint_S (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = q_{\text{своб}}.$$

Вид поверхности S в виде «ящика» показан на рис. 4.4. Площадь торца равна S_0. Так как поток вектора $\mathbf{E}_n$ через боковые грани S равен нулю и $E = 0$ при $x = 0$, то

$$DS_0 = \rho S_0 a.$$

Учтем, что внутри слоя $2a$ $D = \varepsilon\varepsilon_0 E_n$, тогда

$$\varepsilon\varepsilon_0 E_n = \rho a \text{ или } E_n = \frac{\rho a}{\varepsilon\varepsilon_0}. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), окончательно получаем

$$\sigma_{\text{пол}} = \chi\varepsilon_0 \frac{\rho a}{\varepsilon\varepsilon_0} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \frac{\rho a}{\varepsilon\varepsilon_0}; \qquad \sigma_{\text{пол}} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\rho a.$$

Чтобы вычислить объемную плотность $\rho_{\text{пол}}$ поляризационных зарядов, запишем формулу $\operatorname{div}\mathbf{P} = -\rho_{\text{пол}}$. В нашем случае $\operatorname{div}\mathbf{P} = \frac{\partial P}{\partial x}$.

Ясно, что P зависит от x следующим образом:

$$P = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\rho x; \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\rho.$$

Итак, формула для $\rho_{\text{пол}}$ найдена и имеет простой вид

$$\rho_{\text{пол}} = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\rho.$$

Вычислим $\sigma_{\text{пол}}$ и $\rho_{\text{пол}}$:

$$\sigma_{\text{пол}} = \frac{6 - 1}{6} \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-2} = 8{,}3 \cdot 10^{-7} \text{ Кл/м}^2 = 83 \text{ мкКл/м}^2;$$

$$\rho_{\text{пол}} = -\frac{6 - 1}{6} \cdot 1 \cdot 10^{-6} = -8{,}3 \cdot 10^{-5} \text{ Кл/м}^3 = -0{,}83 \text{ мкКл/м}^3.$$

Ответ: $\sigma_{\text{пол}} = 83$ мкКл/м^2; $\rho_{\text{пол}} = -0{,}83$ мкКл/м^3.

Задача 10. Однородный диэлектрик имеет вид сферического слоя, внутренний и внешний радиусы которого равны a и b. Найти напряженность E электрического поля в диэлектрике как функцию расстояния от центра системы, если диэлектрику сообщили положительный заряд, распределенный равномерно по объему слоя с плотностью ρ.

Решение: По условию задачи задан свободный заряд q, поэтому наиболее рационально применить теорему Гаусса для **D**

$$\oint_S (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = q, \text{ где } q = \frac{4}{3}\pi\left(r^3 - a^3\right)\rho,$$

т.к. поверхность S проведена внутри слоя $a < r < b$. В силу симметрии

$$4\pi r^2 D = (4/3)\pi(r^3 - a^3)\rho,$$

а $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$ внутри слоя диэлектрика. Тогда

$$E = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0\varepsilon}\frac{r^3 - a^3}{r^2}.$$

Задача 11. Найти напряженность $|\mathbf{E}_0|$ поля в сферической полости внутри безграничного однородного диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon = 3$, если вдали от полости напряженность E в диэлектрике равна $1{,}2\cdot10^3$ кВ/м.

Дано:
$\varepsilon = 3$
$E = 1{,}2\cdot10^6$ В/м
E_0 – ?

Решение: Вещество поляризовано. Чтобы создать полость, нужно удалить шарик из поляризованного вещества. Электрическое поле такого шарика равно

$$\mathbf{E}' = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}.$$

По принципу суперпозиции $\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \mathbf{E}_0$, или $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E} - \mathbf{E}'$. Тогда

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}.$$

Вектор $\mathbf{P} = \chi\varepsilon_0\mathbf{E}$. Таким образом,

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E} + \frac{1}{3}\chi\mathbf{E} = (2+\varepsilon)\frac{\mathbf{E}}{3}.$$

Модуль вектора $|\mathbf{E}_0|$ численно равен

$$E_0 = (2+\varepsilon)\frac{E}{3} = (2+3)\cdot\frac{1{,}2\cdot10^6}{3} = 2\cdot10^6 \text{ В/м}.$$

Ответ: $E_0 = 2$ МВ/м.

Задача 12. Определить поверхностную плотность поляризационных зарядов шара из однородного диэлектрика $\varepsilon = 3$, если в нем равномерно распределены сторонние заряды с плотностью $\rho = 1\cdot10^{-6}$ Кл/м^3. Радиус шара $R = 0{,}12$ м.

Дано:
$\varepsilon = 3$
$\rho = 1\cdot10^{-6}$ Кл/м^3
$R = 0{,}12$ м
$\sigma_{\text{пол}}$ – ?

Решение: Для случая $r = R$ имеем по теореме Гаусса для диэлектриков $\oint_S (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = q_{\text{своб}}$. Из соображений симметрии $D\cdot4\pi R^2 = (4/3)\pi R^3\rho$, откуда $D = \frac{\rho R}{3}$.

Известно, что в однородном диэлектрике

$$\sigma_{\text{пол}} = P = \chi\varepsilon_0 E, \text{ а } D = \varepsilon\varepsilon_0 E.$$

Тогда $\sigma_{\text{пол}} = \dfrac{\chi\varepsilon_0 D}{\varepsilon\varepsilon_0} = \dfrac{\chi\rho R}{3\varepsilon}$ или $\sigma_{\text{пол}} = \left(\dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right)\dfrac{\rho R}{3}$.

Подставляя численные значения, имеем

$$\sigma_{\text{пол}} = \frac{(3-1)}{3} \cdot \frac{10^{-6} \cdot 0{,}12}{3} = 2{,}77 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/м}^2 = 27{,}7 \text{ нКл/м}^2.$$

Ответ: $\sigma_{\text{пол}} = 27{,}7$ нКл/м^2.

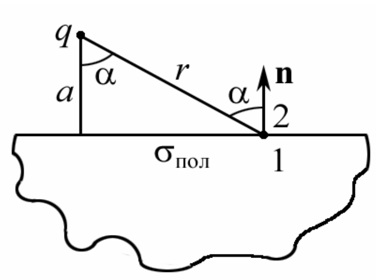


Рис. 4.5

Задача 13. В вакууме на расстоянии $a = 1$ см от плоской поверхности однородного диэлектрика ($\varepsilon = 3$), заполняющего полупространство, находится точечный заряд $q = 1$ нКл. Найти поверхностную плотность $\sigma_{\text{пол}}$ поляризационных зарядов в зависимости от расстояния r (рис. 4.5). Определить $\sigma_{\text{пол}}$ для случая $r = 2$ см.

Дано:
$\varepsilon = 3$
$a = 0{,}01$ м
$r = 0{,}02$ м
$q = 1 \cdot 10^{-9}$ Кл
$\sigma_{\text{пол}}$ – ?

Решение: Нормальная составляющая вектора **D** на границе вакуум – диэлектрик является непрерывной $D_{2n} = D_{1n}$ следовательно,

$$E_{2n} = \varepsilon E_{1n} \tag{1}$$

(точки 1 и 2 указаны на рис. 4.5).

Очевидно, что $\sigma_{\text{пол}} < 0$.

$$E_{2n} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cos\alpha + \frac{\sigma_{\text{пол}}}{2\varepsilon_0}; \tag{2}$$

$$E_{1n} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cos\alpha - \frac{\sigma_{\text{пол}}}{2\varepsilon_0}. \tag{3}$$

В уравнениях (2) и (3) $\sigma_{\text{пол}}/(2\varepsilon_0)$ – поле бесконечной заряженной с поверхностной плотностью $\sigma_{\text{пол}}$ плоскости.

Система уравнений (1) – (3), с учетом, что $\cos\alpha = a/r$, позволяет найти $\sigma_{\text{пол}}$. Подставляя (2) и (3) в (1), получим

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qa}{r^3} + \frac{\sigma_{\text{пол}}}{2\varepsilon_0} = \varepsilon\left(-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qa}{r^3} - \frac{\sigma_{\text{пол}}}{2\varepsilon_0}\right);$$

$$\frac{\sigma_{\text{пол}}}{2\varepsilon_0}(1+\varepsilon) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qa}{r^3}(1-\varepsilon);$$

$$\sigma_{\text{пол}} = -\left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\right)\frac{qa}{2\pi r^3}.$$

Обратим внимание на следующий результат. При $a \to 0$ ($r \neq 0$), $\sigma_{пол} \to 0$, т.е. поверхностный заряд на плоскости отсутствует, если заряд q находится на поверхности диэлектрика.

Подставляя числовые значения, находим

$$\sigma_{пол} = -\left(\frac{3-1}{3+1}\right) \cdot \frac{1 \cdot 10^{-9} \cdot 0{,}01}{2\pi \cdot 0{,}02^3} = -9{,}95 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/м}^2 = -99{,}5 \text{ нКл/м}^2.$$

Ответ: $\sigma_{пол} = -99{,}5$ нКл/м^2.

Задача 14. Между обкладками плоского конденсатора помещен диэлектрик, диэлектрическая проницаемость которого изменяется по закону $\varepsilon = \varepsilon(x)$, где x направлена перпендикулярно пластинам. У положительной обкладки $\varepsilon = \varepsilon_1$, у отрицательной – $\varepsilon = \varepsilon_2$. Заряд пластин $\pm q$. Найти объемную плотность поляризационных зарядов $\rho_{пол} = \rho_{пол}(x)$, а также суммарный поляризационный заряд $Q_{пол}$, возникающий во всем объеме диэлектрика.

Решение: Направим ось x в направлении от «+» к «–» (рис. 4.6). Объемный заряд $\rho_{пол} \neq 0$, т.к. диэлектрик неоднородный, то $E = E(x)$, а из теоремы Гаусса следует, что $E(x) = \dfrac{q}{S\varepsilon_0\varepsilon(x)}$.

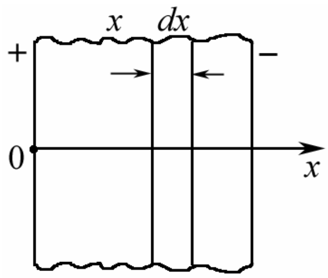


Рис. 4.6

Выберем поверхность Гаусса в виде прямоугольного «ящика», стенки которого параллельны обкладкам. Толщина ящика равна dx, площадь основания S.

Поток, вытекающий через плоскость (x), равен $\Phi(x) = E(x) \cdot S$; поток вытекающий через поверхность ($x + dx$), равен

$$\Phi(x+dx) = \Phi(x) + \frac{d\Phi}{dx}dx = \Phi(x) + \frac{dE}{dx}S\ dx.$$

По теореме Гаусса результирующий поток $d\Phi$ равен

$$\frac{dE}{dx}S\ dx = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_{пол}(x) \cdot S\ dx.$$

Отсюда получаем

$$\rho_{пол}(x) = \varepsilon_0 \frac{dE}{dx} = \varepsilon_0 \frac{d}{dx}\left(\frac{q}{S\varepsilon_0\varepsilon(x)}\right) = -\frac{q}{S\varepsilon^2}\frac{d\varepsilon}{dx}.$$

Очевидно, что суммарный объемный заряд равен

$$Q_{пол} = \int \rho_{пол}(x)dV = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{q d\varepsilon}{\varepsilon^2} = q \cdot \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}.$$

Задача 15. Длинный круглый цилиндр из однородного и изотропного диэлектрика с диэлектрической постоянной ε расположен в однородном поле $\mathbf{E}_0$ так, что ось цилиндра совпадает с направлением $\mathbf{E}_0$ (рис. 4.7). Определить напряженность электрического поля вблизи цилиндра (внутри и вне цилиндра).

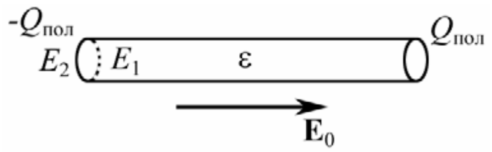


Рис. 4.7

Решение: Применяя теорему Гаусса, получаем тривиальное тождество $D_1 = D_2$, выражающее непрерывность нормальных составляющих вектора электрического смещения на поверхности диэлектрика. Применим метод суперпозиции. Обозначим E_1 – напряженность поля внутри цилиндра и E_2 – вне его. Вследствие явления поляризации диэлектрика на основаниях цилиндра образуются поляризационные заряды $-Q_{пол}$ и $+Q_{пол}$ с плотностью $\sigma_{пол}$. Результирующие напряженности E_1 и E_2 являются геометрическими суммами напряженности E_0 внешнего поля и напряженностей полей, созданных поляризационными зарядами.

Будем считать, что поле заряда $Q_{пол}$ мало в области заряда $-Q_{пол}$, и наоборот. Таким образом,

$$E_1 = E_0 - E', \quad E_2 = E_0 + E',$$

где E' – напряженность поля заряда $Q_{пол}$ и $-Q_{пол}$.

Определим E'. Заряды $\pm Q_{пол}$ находятся на поверхности основания цилиндра, поэтому E' – это поле диска. Электрическое поле, созданное диском, в любой точке x на его оси равно (см. гл.2, задача 12, где напряженность $E = F/q_0$)

$$E_x = E' = \frac{\sigma_{пол}}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right],$$

где R – радиус диска.

Вблизи основания цилиндра $x = 0$ и $E' = \sigma_{пол}/(2\varepsilon_0)$.

Так как $\sigma_{пол} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E_1$, находим, что $E_1 = E_0 - E' = \dfrac{2}{1+\varepsilon}E_0$.

Легко видеть, что $E_2 = \dfrac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}E_0$.

Ответ: $E_1 = \dfrac{2}{1+\varepsilon}E_0$; $E_2 = \dfrac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}E_0$.

Задачи для самостоятельного решения

4.1. В однородное электрическое поле с напряженностью E_0 = 100 В/м помещена плоскопараллельная пластина из однородного и изотропного диэлектрика с проницаемостью ε = 2. Пластина расположена перпендикулярно к $\mathbf{E}_0$. Определить поверхностную плотность $\sigma_{\text{пол}}$ связанных зарядов.

Ответ: $\sigma_{\text{пол}} = \dfrac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}\varepsilon_0 E_0 = 0{,}44$ нКл/м^2.

4.2. Точечный заряд q находится на плоскости, отделяющий вакуум от бесконечного однородного диэлектрика с проницаемостью ε. Доказать, что поверхностная плотность поляризационных зарядов $\sigma_{\text{пол}} = 0$. Указание: Воспользоваться условием непрерывности нормальной составляющей вектора **D**: $E_{2n} = \varepsilon E_{1n}$, где $E_{2n} = \sigma_{\text{пол}}/(2\varepsilon_0)$.

4.3. Точечный заряд q = 1 нКл находится в вакууме на некотором расстоянии от плоской поверхности однородного диэлектрика (ε = 5), заполняющего все полупространство. Найти суммарный связанный заряд $q_{\text{пол}}$ на поверхности диэлектрика.

Ответ: $q_{\text{пол}} = -\dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} q = -0{,}67 \cdot 10^{-9}$ Кл.

4.4. Вблизи точки A (рис. 4.8) границы раздела диэлектрик – вакуум напряженность электрического поля в вакууме равна E_0 = 10 кВ/м, причем вектор $\mathbf{E}_0$ составляет угол α = 45 ° с нормалью к поверхности раздела в данной точке. Проницаемость диэлектрика ε = 3. Найти напряженность E поля внутри диэлектрика вблизи точки A.

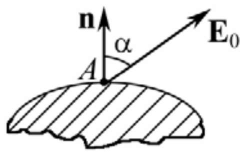


Рис. 4.8

Ответ: $E = E_0\sqrt{\sin^2\alpha + \dfrac{\cos^2\alpha}{\varepsilon^2}} = 7{,}45 \cdot 10^3$ В/м.

4.5. В некоторой точке изотропного диэлектрика с проницаемостью ε = 7 модуль вектора электрического смещения $D = 1{,}4 \cdot 10^{-9}$ Кл/м^2. Чему равен модуль вектора поляризации в этой точке?

Ответ: $P = (1 - 1/\varepsilon)D = 1{,}2 \cdot 10^{-9}$ Кл/м^2.

4.6. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком (ε = 3). На пластинах разность потенциалов Δφ = 4 кВ. Расстояние между пластинами 5 мм. Найти поверхностную плотность $\sigma_{\text{пол}}$ поляризационных зарядов.

Ответ: $\sigma_{\text{пол}} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \Delta\varphi / d = 7{,}1 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2.

4.7. Бесконечная пластина из изотропного диэлектрика помещена в перпендикулярное к ней однородное внешнее поле напряженностью E_0 = = 100 кВ/м (рис. 4.9). Проницаемость изменяется линейно от значения $\varepsilon_1 = 2$ на левой границе до $\varepsilon_2 = 6$ на правой границе. Вне пластины $\varepsilon = 1$. Найти вектор Φ_E через воображаемую цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси x, основания цилиндра расположены на границах пластины в точках $x_1 = -a/2$ и $x_2 = +a/2$, площадь основания равна 1 см^2.

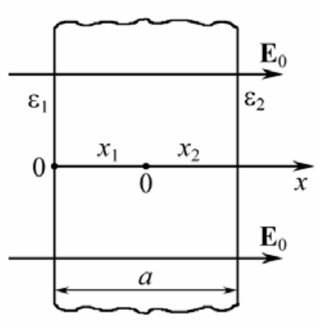


Рис. 4.9

Ответ: $\Phi_E = SE_0\left[\dfrac{2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}-1\right] = -750$ В/м.

4.8. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено стеклом. Расстояние d между пластинами равно 4 мм. На пластины подано напряжение $\Delta\varphi = 1200$ В. Найти электрическое поле в стекле.

Ответ: $E = \Delta\varphi/(\varepsilon d) = 50$ кВ/м.

4.9. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено трансформаторным маслом. Расстояние между пластинами $d = 1$ мм. Поверхностная плотность поляризационных зарядов $\sigma_{пол} = 6{,}2\cdot10^{-6}$ Кл/м^2. Найти разность потенциалов на пластинах конденсатора.

Ответ: $\Delta\varphi = \dfrac{\sigma_{пол} d}{\varepsilon_0(\varepsilon-1)} = 584$ В.

4.10. Между пластинами конденсатора площадью $S = 100$ см^2 находится стекло. Пластины притягиваются друг к другу с силой, равной F = = 4,9 мН. Найти поверхностную плотность $\sigma_{пол}$ связанных зарядов.

Ответ: $\sigma_{пол} = (\varepsilon-1)\sqrt{2\varepsilon_0 F/(\varepsilon S)} = 6{,}0\cdot10^{-6}$ Кл/м^2.

4.11. Пластины плоского конденсатора, расстояние между которыми равно $d = 3$ см, находятся под напряжением 1 кВ. Найти поверхностную плотность поляризационных зарядов, если пространство между пластинами заполнено стеклом.

Ответ: $\sigma_{пол} = (\varepsilon-1)\varepsilon_0\Delta\varphi/d = 1{,}48$ мкКл/м^2.

4.12. Диэлектрическое тело заряжено однородно с объемной плотностью $\rho_0 = 1$ мкКл/м^3. Какова будет объемная плотность заряда ρ, если тело привести в движение со скоростью $v = 0{,}5c$, где c – скорость света в вакууме?

Ответ: $\rho = \rho_0\Big/\sqrt{1-v^2/c^2} = 1{,}15$ мкКл/м^3.

4.13. Внутри шара из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon = 5$ создано однородное электрическое поле напряженностью $E = 100$ В/м. Найти поверхностную плотность поляризационных зарядов.

Ответ: $\sigma_{\text{пол}} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E = 3{,}54$ нКл/м^2.

4.14. В воде электрическое поле напряженности $E = 1000$ кВ/м создает поляризацию, эквивалентную правильной ориентации только одной из N молекул. Найти N, если дипольный момент молекул воды $p = 6{,}2 \cdot 10^{-30}$ Кл·м. n_0 – концентрация молекул воды при нормальных условиях.

Ответ: $N = \dfrac{n_0 p}{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E} = 3 \cdot 10^3$.

4.15. В точке C на границе стекло – вакуум напряженность электрического поля в вакууме $E_0 = 10$ В/м. Электрическое поле направлено так, что между векторами $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{n}$ угол $\alpha = 30°$. Найти напряженность E поля в стекле.

Ответ: $E = \dfrac{E_0}{\varepsilon}\sqrt{\cos^2\alpha + \varepsilon^2 \sin^2\alpha} = 5{,}2$ В/м.

4.16. Внутри шара, заряженного с постоянной плотностью $\rho = 3 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^3, имеется сферическая полость, в которой заряды отсутствуют. Центр полости смещен относительно центра шара на расстояние $a = 1$ см. Найти напряженность E внутри полости, если $\varepsilon = 2$.

Ответ: $E = \rho a / (3\varepsilon\varepsilon_0) = 560$ В/м.

4.17. Внутри шара из однородного изотропного диэлектрика с $\varepsilon = 5$ создано однородное электрическое поле $E = 200$ В/м. Найти максимальную плотность $\sigma_{\text{пол}}$ поляризационных зарядов.

Ответ: $\sigma_{\text{пол}} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E = 7$ нКл/м^2.

4.18. Модуль поляризации P в некоторой точке изотропного диэлектрика ($\varepsilon = 7$) равен $1{,}2 \cdot 10^{-9}$ Кл/м^2. Найти модуль вектора $\mathbf{D}$ электрического смещения в этой точке.

Ответ: $D = P/(\varepsilon - 1) = 2 \cdot 10^{-10}$ Кл/м^2.

4.19. Суммарный поляризационный заряд $q_{\text{пол}}$ на поверхности диэлектрика ($\varepsilon = 5$) равен $7 \cdot 10^{-10}$ Кл. Найти величину точечного заряда q, который, находясь вблизи поверхности рассматриваемого диэлектрика, создает поляризационный заряд данной величины.

Ответ: $q = \left|\dfrac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1}\right| q_{\text{пол}} = 1{,}05$ нКл.

4.20. Поверхностная плотность поляризационных зарядов на диэлектрике ($\varepsilon = 3$), расположенном между пластинками плоского конденсатора, $\sigma_{пол} = 7{,}1 \cdot 10^{-6}$ Кл/м. Расстояние между пластинами $d = 5$ мм. Чему равна разность потенциалов $\Delta\varphi$ внешнего поля?

Ответ: $\Delta\varphi = \sigma_{пол} d / [\varepsilon_0(\varepsilon - 1)] = 4$ кВ.

4.21. Длинный диэлектрический цилиндр круглого сечения поляризован так, что вектор $\mathbf{P} = \alpha\mathbf{r}$, где α – положительная постоянная; $\mathbf{r}$ – расстояние от оси. Найти объемную плотность $\rho_{пол}$ поляризационных зарядов как функцию расстояния r от оси. Указание: использовать формулу $\rho_{пол} = \operatorname{div} \mathbf{P}$.

Ответ: $\rho_{пол} = -2\alpha$.

4.22. Бесконечно длинный диэлектрический цилиндр круглого сечения поляризован однородно и статически, причем вектор поляризации $\mathbf{P}$ перпендикулярен оси цилиндра. Найти напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля в диэлектрике. Указание: Использовать теорему Гаусса для диэлектриков.

Ответ: $\mathbf{E} = -\mathbf{P}/(2\varepsilon_0)$.

4.23. Разность потенциалов $\Delta\varphi$ между пластинами конденсатора, опущенного в трансформаторное масло, равна 1750 В. Расстояние между пластинами $d = 1$ см. Определить поверхностную плотность зарядов на масле.

Ответ: $\sigma_{пол} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \Delta\varphi / d = 1{,}86 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2.

4.24. Одной из пластин плоского конденсатора площадью $S = 0{,}2$ м^3 сообщили заряд $q = 10^{-9}$ Кл. Другая пластина соединена с землей (рис. 4.10). Между пластинами находится стеклянная и фарфоровая пластинки. Определить напряженности электрического поля в стекле и фарфоре.

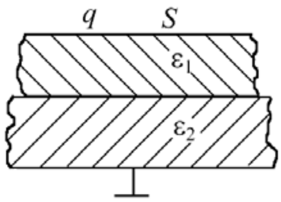


Рис. 4.10

Ответ: $E_1 = q/(\varepsilon_0\varepsilon_1 S) = 94$ В; $E_2 = q/(\varepsilon_0\varepsilon_2 S) = 113$ В.

4.25. Первоначально пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено воздухом. В этом случае напряженность поля равна E, а электрическое смещение – D. Затем половину зазора заполнили диэлектриком с проницаемостью ε (рис. 4.11). Найти E_1 и D_1, а также E_2 и D_2. Напряжение между обкладками остается постоянным.

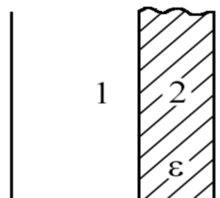


Рис. 11

Ответ: $E_1 = E_2 = E$; $D_1 = D$; $D_2 = \varepsilon D$.

5. ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ. КОНДЕНСАТОРЫ

Основные формулы и обозначения

Емкость проводящего шара радиусом R

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R,$$

где ε – диэлектрическая проницаемость.

Емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

где d – расстояние между обкладками конденсатора; S – площадь его пластин.

Емкость сферического конденсатора

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1},$$

где R_1 и R_2 – радиусы концентрических сфер.

Емкость цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon L}{\ln\left(R_2/R_1\right)},$$

где R_1 и R_2 – радиусы коаксиальных цилиндров длиной L.

Емкость системы конденсаторов:

при последовательных соединениях $\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{C_k};$

при параллельных соединениях $C = \sum_{i=1}^{k} C_k.$

Емкость плоского конденсатора, заполненного n слоями диэлектриков толщиной d_i каждый с диэлектрическими проницаемостями ε_i,

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} + \ldots + \frac{d_n}{\varepsilon_n}}.$$

Задачи с решениями

Задача 1. Площадь пластин плоского конденсатора $S = 0{,}01$ м^2, расстояние между ними $d = 1$ см. К пластинам приложена разность потенциалов $U = 300$ В. В пространстве между пластинами находятся плоскопараллельная пластинка стекла толщиной $d_1 = 0{,}5$ см и плоскопараллельная пластинка парафина толщиной $d_2 = 0{,}5$ см

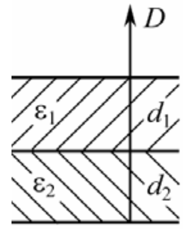


Рис. 5.1

(рис. 5.1). Найти напряженности E_1 и E_2 электрического поля и падения потенциала U_1 и U_2 в каждом слое. Каковы будут при этом емкость C конденсатора и поверхностная плотность заряда σ на пластинах?

Дано:
$S = 0{,}01$ м^2
$U = 300$ В
$d = 1\cdot10^{-2}$ м
$d_1 = 5\cdot10^{-3}$ м
$d_2 = 5\cdot10^{-3}$ м
$\varepsilon_1 = 6$
$\varepsilon_2 = 2$

E_1 – ? E_2 – ?
U_1 – ? U_2 – ?
C – ? σ – ?

Решение: Из условия непрерывности силовых линий D на границе диэлектрика $D_1 = D_2$, или

$$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2, \tag{1}$$

где E_1 и E_2 – напряженность электрического поля в слоях 1 и 2; ε_1 и ε_2 – диэлектрическая проницаемость стекла и парафина соответственно.

Кроме того, общее напряжение U между обкладками равно сумме напряженностей в слоях

$$U_1 + U_2 = U. \tag{2}$$

Уравнение (2) можно записать так:

$$E_1 d_1 + E_2 d_2 = U. \tag{3}$$

Из (1) и (3) имеем

$$E_1 = \varepsilon_2 U/(\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1) = 15 \text{ кВ/м}; \;\; E_2 = \varepsilon_1 E_1/\varepsilon_2 = 45 \text{ кВ/м}.$$

Падение потенциалов в каждом слое:

$$U_1 = E_1 d_1 = 75 \text{ В}, \;\; U_2 = E_2 d_2 = 225 \text{ В}.$$

Емкость C находится по формуле

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, \text{ где } C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{d_1}, \;\; C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{d_2}. \tag{4}$$

Решая совместно (4), получим

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 S/(\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1) = 26{,}6 \text{ пФ}.$$

Заряд на одной из пластин $q = \sigma S = C_1 U_1 = C_2 U_2 = CU$; отсюда

$$\sigma = CU/S = 0{,}8 \text{ мкКл/м}^2.$$

Ответ: $E_1 = 15$ кВ/м; $E_2 = 45$ кВ/м; $U_1 = 75$ В;
$U_2 = 225$ В; $C = 26{,}6$ пФ; $\sigma = 0{,}8$ мкКл/м^2.

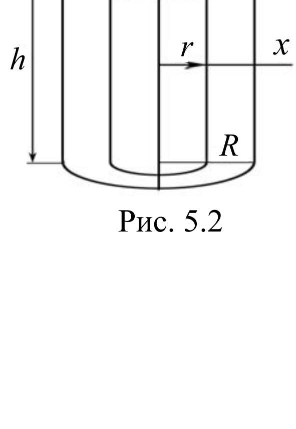


Рис. 5.2

Задача 2. Цилиндрический конденсатор состоит из внутреннего цилиндра радиусом $r = 3$ мм, двух слоев диэлектрика и внешнего цилиндра радиусом R = 1 см. Первый слой диэлектрика толщиной $d_1 = 3$ мм примыкает к внутреннему цилиндру. Найти отношение падений потенциала U_1/U_2 в этих слоях. $\varepsilon_1 = 2{,}5$; $\varepsilon_2 = 5$.

Дано:	
$r = 3$ мм	
$R = 10$ мм	
$d_1 = 3$ мм	
$\varepsilon_1 = 2{,}5$	
$\varepsilon_2 = 5$	
$U_1/U_2 - ?$	

Решение: Для решения задачи необходимо уметь вычислить разность потенциалов между двумя коаксиальными цилиндрами (рис. 5.2).

По теореме Гаусса $\oint\limits_S (\mathbf{E}, d\mathbf{S}) = \dfrac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}$,

где q – заряд на внутреннем цилиндре; $q = \sigma \cdot S_1 h$, $S_1 = 2\pi r$.

Иначе, с учетом рис. 5.2, поле в диэлектриках

$$E \cdot 2\pi x \cdot h = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sigma \cdot 2\pi r h;\ E = \frac{\sigma r}{\varepsilon\varepsilon_0 x}.$$

Изменение потенциала в первом слое $\Delta\varphi_1 = U_1$; ($d\varphi = -Edx$)

$$U_1 = -\int\limits_r^{r+d_1} \frac{\sigma r dx}{\varepsilon_1\varepsilon_0 x} = \frac{\sigma r}{\varepsilon_1\varepsilon_0}\ln\left[\frac{r+d_1}{r}\right].$$

Изменение потенциала во втором слое $\Delta\varphi_2 = U_2$

$$U_2 = -\int\limits_{r+d_1}^{R} \frac{\sigma r dx}{\varepsilon_2\varepsilon_0 x} = \frac{\sigma r}{\varepsilon_0\varepsilon_2}\ln\left[\frac{R}{r+d_1}\right];$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{\ln[(r+d_1)/r]}{\ln[R/(r+d_1)]} = \frac{5}{2{,}5}\frac{\ln[6/3]}{\ln[10/6]} = 2{,}7\ .$$

Ответ: $U_1/U_2 = 2{,}7$.

Задача 3. Плоский конденсатор состоит из двух слоев диэлектриков: фарфора толщиной $d_1 = 2$ мм и плексигласа толщиной $d_2 = 1{,}5$ мм. Площадь пластин $S = 100$ см^2. Определить емкость C конденсатора.

Дано:
$d_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ м
$d_2 = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ м
$\varepsilon_1 = 5$
$\varepsilon_2 = 3{,}5$
$S = 1 \cdot 10^{-2}$ м^2
$C - ?$

Решение: Емкость конденсатора

$$C = q/U,$$

где q – заряд на пластинах конденсатора; U – разность потенциалов.

Заряд $q = \sigma \cdot S$, где σ – поверхностная плотность свободных зарядов.

$$U = U_1 + U_2,$$

где U_1 – напряжение на 1-м слое диэлектрика; U_2 – на 2-м слое; ε_1 и ε_2 – диэлектрическая проницаемость фарфора и плексигласа соответственно..

Так как электрическое поле однородно, то

$$U_1 = E_1 d_1; \qquad U_2 = E_2 d_2.$$

Для вектора $\mathbf{D}_n$ поле является однородным: $D_1 = D_2 = D$, поэтому

$$E_1 = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}; \qquad E_2 = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_2}.$$

Комбинируя записанные уравнения, учитываем, что $D = \sigma$ (по закону Гаусса для диэлектрика), $C = \dfrac{\sigma S}{\dfrac{\sigma d_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} + \dfrac{\sigma d_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_2}} = \dfrac{\varepsilon_0 S}{\dfrac{d_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_2}}$.

Подставляя численные значения величин, находим

$$C = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-3}/5 + 1{,}5 \cdot 10^{-3}/3{,}5} = 1{,}07 \cdot 10^{-10} \text{ Ф} \cong 107 \text{ пФ}$$

Ответ: $C = 107$ пФ.

Задача 4. На нижней пластине плоского конденсатора лежит диэлектрик ($\varepsilon = 3$) толщиной $d_1 = 3$ мм. Расстояние между пластинами конденсатора $d = 5$ мм. Определить емкость конденсатора, если площадь пластин $S = 10^{-2}$ см^2.

Дано:
$d_1 = 3 \cdot 10^{-3}$ м
$d = 5 \cdot 10^{-3}$ м
$\varepsilon_1 = 3$
$S = 10^{-2}$ м^2

C – ?

Решение: Конденсатор состоит из пластин и двух слоев диэлектрика d_1, ε_1 и d_2, ε_2, где $d_2 = (d - d_1)$. В качестве второго слоя – воздух. Используем формулу из задачи 3

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1/\varepsilon_1 + d_2/\varepsilon_2}.$$

Вычисляем:

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1/\varepsilon_1 + d_2/\varepsilon_2} = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 10^{-3}/3 + 2 \cdot 10^{-3}/1} = 2{,}95 \cdot 10^{-11} \text{ Ф} = 29{,}5 \text{ пФ}.$$

Ответ: $C = 29{,}5$ пФ.

Задача 5. Плоский воздушный конденсатор заряжен до некоторой разности потенциалов U и отключен от источника. Во сколько раз изменится емкость конденсатора, разность потенциалов между пластинами, напряженность электрического поля при увеличении расстояния между пластинами от b до $(b + x)$?

Решение: При решении задачи важно обратить внимание, на то что конденсатор отключен от источника, и сделать вывод о том, что в таких условиях заряд на обкладках конденсатора остается неизменным, q = const. $C = q/U$. Очевидно, что $U = E \cdot b$. Однако, при q = const E = const.

$$C_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{b}; \qquad C_2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{b+x}.$$

Делаем вывод о том, что физическая система при отключенном источнике является простейшей.

$$E_1 = E_2; \quad U_1 = E_1 b; \; U_2 = E_2(b+x).$$

Поэтому ответ очевиден $\frac{C_1}{C_2} = \frac{b+x}{b} > 1; \qquad \frac{U_1}{U_2} = \frac{b}{b+x} < 1.$

Задача 6. Металлический шар радиусом a = 5 мм окружен примыкающим к нему шаровым слоем однородного диэлектрика с наружным радиусом b = 8 мм и проницаемостью ε = 7. Найти емкость C данной системы.

Дано:
$a = 5\cdot10^{-3}$ м
$\varepsilon = 7$
$b = 12\cdot10^{-3}$ м
C – ?

Решение: По определению емкости $C = q/\Delta\varphi$.

Потенциал φ определим, мысленно сообщив металлическому шару заряд q:

$$\Delta\varphi = \int E dr = \int \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2} dr. \tag{1}$$

Следует принять во внимание, что шар создает электрическое поле за пределами $r \geq a$, аналогичное полю точечного заряда. Важным обстоятельством является отсутствие второй пластины привычного конденсатора. Воображаемая пластина, очевидно, может быть расположена на бесконечности или может быть реальной, но заземленной. Поэтому пределы интегрирования в (1) нужно определить следующим образом. Имеем два слоя диэлектриков от a до b и от b до ∞. Во втором случае диэлектриком является воздух $\varepsilon_в = 1$. Интеграл (1) распадается на два интеграла

$$\Delta\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_a^b \frac{dr}{r^2} + \int_b^\infty \frac{dr}{r^2}\right) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varepsilon r}\bigg|_a^b + \frac{1}{r}\bigg|_b^\infty\right) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} - \frac{\varepsilon}{b}\right);$$

$$\Delta\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{a} + \frac{\varepsilon - 1}{b}\right).$$

Искомое значение емкости $C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a}{1 + (\varepsilon - 1)\cdot a/b}$.

Подставим численные значения:

$$C = \frac{4\pi\cdot 8{,}85\cdot10^{-12}\cdot 7\cdot 5\cdot 10^{-3}}{1 + (7-1)\cdot 5\cdot 10^{-3}/12\cdot10^{-3}} = 1{,}11\cdot10^{-12}\ \text{Ф} = 1{,}11\ \text{пФ}.$$

Ответ: C = 1,11 пФ.

Задача 7. Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен диэлектриком, проницаемость которого изменяется в направлении, перпендикулярном к обкладкам, по линейному закону от значения $\varepsilon_1 = 2{,}00$ вблизи одной обкладки до $\varepsilon_2 = 5{,}44$ вблизи другой. Определить емкость конденсатора, если площадь каждой обкладки $S = 0{,}1$ м^2, расстояние между ними $d = 5$ мм.

Дано:
$\varepsilon_1 = 2{,}00$
$\varepsilon_2 = 5{,}44$
$S = 0{,}1$ м^2
$d = 5\cdot 10^{-3}$ м
C – ?

Решение: Стандартные формулы для вычисления емкости применять нельзя. Необычным является наличие зависимости $\varepsilon = \varepsilon(x)$, рис. 5.3.

Поэтому начинать решение приходится с определения емкости $C = q/\Delta\varphi$, где $q = \sigma \cdot S$; σ – поверхностная плотность зарядов на обкладках конденсатора.

$$\Delta\varphi = \int_0^d E\,dx.$$

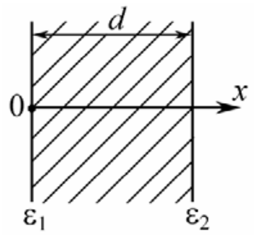


Рис. 5.3

Определим E. Очевидно, что нужно использовать основные формулы и понятия:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}, \text{ где } \varepsilon = \varepsilon_1 + kx.$$

Параметр k определим из граничных условий: при $x = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_1$, при $x = d$, , $\varepsilon = \varepsilon_2$. Поэтому $k = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/d$. Тогда

$$\Delta\varphi = \int_0^d \frac{\sigma dx}{\varepsilon_0(\varepsilon_1 + kx)} = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} \ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

Легко видеть, что
$$C = \frac{\sigma S}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon_0\left(\varepsilon_2 - \varepsilon_1\right)S}{\ln\left(\varepsilon_2/\varepsilon_1\right)d}.$$

Подставляя численные значения, имеем

$$C = \frac{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot(5{,}44 - 2{,}00)\cdot 0{,}1}{\ln(5{,}44/2{,}00)\cdot 5\cdot 10^{-3}} = 6{,}09\cdot 10^{-10}\ \Phi = 609\ \text{п}\Phi.$$

Ответ: 609 пФ.

Задача 8. Изотропный диэлектрик, которым заполнен сферический конденсатор, является неоднородным. Его диэлектрическая проницаемость зависит от расстояния r до центра системы $\varepsilon = \alpha/r$, здесь α – постоянная. Радиусы концентрических обкладок конденсатора a и b. Найти емкость C такого конденсатора.

Решение: Неприменимость стандартной формулы очевидна. Поэтому решение сводится к выводу формулы, что заставляет обратиться к начальному определению емкости

$$C = q/\Delta\varphi, \qquad \Delta\varphi = \int_a^b E dr.$$

Напряженность электрического поля E можно определить по теореме Гаусса или воспользоваться формулой E точечного заряда, зная, что сферически распределенный заряд создает поле, аналогичное точечному заряду при $r > a$. Тогда

$$\Delta\varphi = \int_a^b \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{dr}{\alpha / r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \alpha} \int_a^b \frac{dr}{r}, \text{ или } \Delta\varphi = \frac{q \ln(b/a)}{4\pi\varepsilon_0 \alpha}.$$

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{4\pi\varepsilon_0\alpha}{\ln(b/a)}.$$

Задача 9. Пространство между обкладками плоского конденсатора наполовину заполнено диэлектриком ($\varepsilon = 3$) (рис. 5.4.1). Расстояние между пластинами много меньше размеров пластин и равно $d = 1$ мм. Найти емкость C конденсатора, если площадь каждой пластины $S_0 = 0{,}18$ м^2.

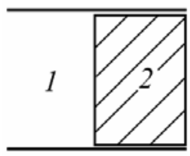


Рис. 5.4.1

Дано:
$S_0 = 0{,}18$ м^2
$d = 1 \cdot 10^{-3}$ м
$\varepsilon = 3$
$C - ?$

Решение: Решение будет стандартным, если учесть, что физическая система, указанная на рисунке, представляет собой два конденсатора, включенных параллельно. Эквивалентная схема такого конденсатора имеет вид (рис. 5.4.2)

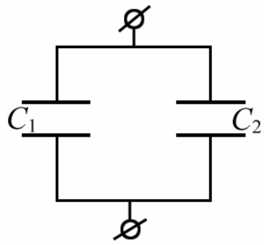


Рис. 5.4.2

$$C = C_1 + C_2,$$

где $C_1 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$; $C_2 = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$.

Тогда $$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}(1+\varepsilon), \text{ где } S = S_0/2.$$

Подставляя численные значения, получим

$$C = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}09}{1 \cdot 10^{-3}}(1+3) = 3{,}2 \cdot 10^{-9} \text{ Ф} = 3{,}2 \text{ нФ}.$$

Ответ: $C = 3{,}2$ нФ.

Задача 10. В зазор между обкладками плоского конденсатора положили слой диэлектрика ($\varepsilon = 3$) толщиной $d_1 = 1$ мм (рис. 5.5.1). Диэлектрик занимает половину площади пластин, каждая из которых имеет площадь $S_0 = 0{,}2$ м^2. Определить емкость C такого кон-

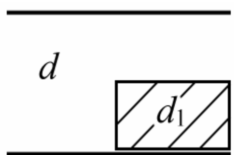


Рис. 5.5.1

денсатора, если $d = 2$ мм.

Дано:
$\varepsilon = 3$
$d_1 = 1\cdot10^{-3}$ м
$S_0 = 0{,}2$ м^2
$d = 2\cdot10^{-3}$ м
$C - ?$

Решение: Решение можно найти очень легко, если предложить следующую эквивалентную схему нарисованного конденсатора (рис. 5.5.2).

В этой схеме

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S_0}{2d}; \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S_0}{2(d-d_1)}; \quad C_3 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S_0}{2d_1}.$$

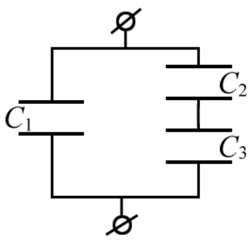


Рис. 5.5.2

Полная емкость конденсатора

$$C = C_1 + \frac{C_2\cdot C_3}{C_2 + C_3}.$$

Для упрощения производим поэтапные вычисления:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S_0}{2d} = \frac{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot0{,}2}{2\cdot2\cdot10^{-3}} = 442{,}5 \text{ пФ};$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 S_0}{2(d-d_1)} = \frac{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot0{,}2}{2\cdot1\cdot10^{-3}} = 885 \text{ пФ};$$

$$C_3 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S_0}{2d_1} = \frac{3\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot0{,}2}{2\cdot1\cdot10^{-3}} = 2655 \text{ пФ};$$

$$C = C_1 + \frac{C_2\cdot C_3}{C_2 + C_3} = 442{,}5 + \frac{885\cdot2655}{885+2655} = 1106 \text{ пФ} \cong 1{,}1 \text{ нФ}.$$

Ответ: $C = 1{,}1$ нФ.

Задача 11. Определить емкость C участка единичной длины двухпроводной линии.

Решение: Этот тип задач относится к тем, что поставлены не полностью, а именно не подчеркнуто, что проводники заряжены. Предполагается, что они могут быть заряжены. Поэтому, чтобы конкретизировать расчетные формулы, придадим проводникам линейную плотность зарядов $+\tau$ и $-\tau$.

Путь упрощения заставляет предположить, что проводники одинакового радиуса и что $r_0 << l$, где l – расстояние между проводниками.

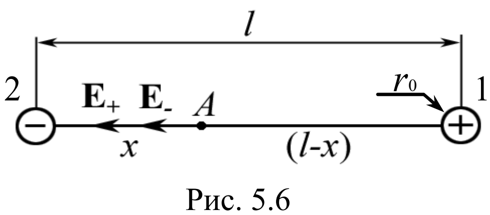


Рис. 5.6

Физический объект является специфическим, не описан стандартными формулами, поэтому решение должно быть последовательным. По определению $C = q/\Delta\varphi = \tau L/\Delta\varphi$, где разность потенциалов

$$\Delta\varphi = -\mathbf{E}\Delta\mathbf{r} \text{ или } d\varphi = -E dr. \qquad (1)$$

Поле E создано двумя нитями, поэтому нужно применить принцип суперпозиции:

$$E = E_+ + E_-$$

(векторы $\mathbf{E}_+$ и $\mathbf{E}_-$ однонаправлены, рис. 5.6).

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0(l-x)} + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 x}. \qquad (2)$$

где τ – модуль линейной плотности зарядов проводников.

Комбинируя (1) и (2) и интегрируя, находим

$$\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln x - \ln(l-x)\right] + \text{const}.$$

В выражении для потенциала входит величина r_0 (размер проволоки).

Поэтому

$$\varphi_1 = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln r_0 - \ln\ (l-r_0)\right] + \text{const};$$

$$\varphi_2 = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\ (l-r_0) - \ln r_0\right] + \text{const}.$$

Следовательно, $\Delta\varphi = \frac{\tau}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{l-r_0}{r_0}$, или, так как $r_0 << l$, то

$$\Delta\varphi = \frac{\tau}{\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\ \frac{l}{r_0}.$$

Ясно, что $q = \tau\cdot L$, где $L = 1$ (длина провода)

Ответ: $C = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(l/r_0)}$.

Альтернативное решение. По определению $C = q/\Delta\varphi = = \tau L/\Delta\varphi$. Определим разность потенциалов $\Delta\varphi$ между параллельными проводами, воспользовавшись соотношением между потенциалом и напряженностью

$$E = -d\varphi/dr.$$

Определим потенциал бесконечного, равномерно заряженного с линейной плотностью τ, провода, проинтегрировав уравнение

$$-\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Приняв потенциал на поверхности провода 1 равным 0, получим потенциал на расстоянии $l - r_0$ от провода 1, где r_0 – радиус провода,

$$\int_0^{\varphi_1} d\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_0}^{l-r_0}\frac{dr}{r}, \quad \varphi_1 = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\frac{l-r_0}{r_0}.$$

Для второго провода

$$\int_{\varphi_2}^{0} d\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_0}^{l-r_0}\frac{dr}{r}, \quad \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\frac{l-r_0}{r_0}.$$

Разность потенциалов между проводами

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\tau}{\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\frac{l-r_0}{r_0}$$

Так как $r_0 << l$, то $$\Delta\varphi = \frac{\tau}{\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\frac{l}{r_0}.$$

Для участка двухпроводной линии единичной длины ($L = 1$)

$$C = \frac{\tau L}{\Delta\varphi} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\,(l/r_0)}.$$

Задача 12. Плоский конденсатор имеет емкость C_0 = 600 пФ. На сколько изменится емкость, если ввести между обкладками параллельно им медный лист, толщина которого равна 1/4 расстояния между обкладками?

Дано:
C_0 = 600 пФ
$\Delta C = C - C_0$ – ?

Решение: При введении металлического листа физическая система резко изменяется.

1. Нужно помнить, что всюду внутри металлического проводника поле $E = 0$ (рис. 5.7).

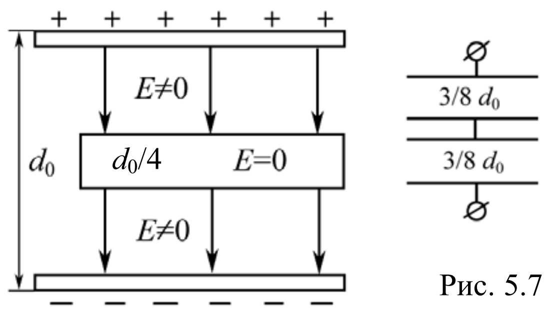


Рис. 5.7

2. Образована система из двух последовательно соединенных конденсаторов C_1 и C_2.

3. Емкость нового конденсатора равна

$$C = C_1C_2/(C_1 + C_2).$$

Так как результат не зависит от расположения пластинки, то для простоты предположим, что пластинка расположена симметрично относительно обкладок конденсатора, рис. 5.7.

Очевидно, что $C_1 = C_2 = C_x$,

$$C_x = \frac{\varepsilon_0 S}{(3/8)d_0}; \qquad C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_0}; \qquad C_x = \frac{C_0}{3/8} = \frac{8}{3}C_0.$$

Окончательно $$C = \frac{C_x\cdot C_x}{C_x + C_x} = \frac{C_x}{2} = \frac{4}{3}C_0.$$

$$C = \frac{4 \cdot 600}{3} = 800 \text{ пФ}.$$

Искомая разность равна $\Delta C = C - C_0 = 800 - 600 = 200$ пФ.

Ответ: $\Delta C = 200$ пФ.

Задача 13. Два конденсатора, емкости которых C_1 и C_2, соединены последовательно и присоединены к источнику ЭДС $\mathcal{E}$. Определить падение напряжения на каждом из конденсаторов.

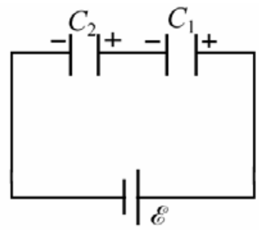


Рис. 5.8

Решение: Нарисуем схему (рис. 5.8). Для решения задачи следует знать, что при последовательном соединении заряд на обкладках конденсаторов $q_1 = q_2 = q$.

Так как $C_{\text{общ}} = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$, то $q = C_{\text{общ}}\mathcal{E} = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\mathcal{E}$.

По определению $U_1 = \dfrac{q}{C_1}$, $U_2 = \dfrac{q}{C_2}$.

Тогда окончательно имеем

$$U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2}\mathcal{E}, \qquad U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2}\mathcal{E}.$$

Задача 14. Определить приближенно емкость между двумя одинаковыми шариками радиусом a, находящимися в среде с диэлектрической проницаемостью ε. Расстояние между центрами шариков b ($b >> a$). Вычислить C при условии, что $\varepsilon = 1$, $b = 300$ мм, $a = 10$ мм.

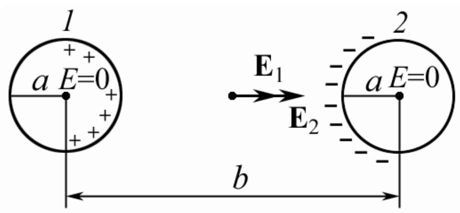


Рис. 5.9

Решение: Из рисунка 5.9 следует, что взаимодействие шариков приводит к неоднородному распределению зарядов по поверхности шариков. Определение поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ весьма затруднительно. Поэтому для нахождения емкости системы двух шариков следует предположить ($b >> a$), что распределение зарядов приближенно равномерное. Это допущение позволяет записать $E = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$ и для определения $\Delta\varphi$ интегрировать от a до b:

$$\Delta\varphi = \int_a^b \mathbf{E}, d\mathbf{r} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 b} + \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a} = \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{b-a}{ab}\right).$$

Таким образом

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} \cong \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 ab}{(b-a)}.$$

$$C \cong \frac{2\pi \cdot 1 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}3}{0{,}3 - 0{,}01} = 5{,}8 \cdot 10^{-13} \text{ Ф} = 0{,}58 \text{ пФ}.$$

Ответ: $C \approx 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a \approx 0{,}58$ пФ.

Альтернативное решение. По определению $C = q/\Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ – разность потенциалов между шарами, несущими заряд $\pm q$. Примем потенциал на бесконечности равным нулю. Тогда потенциалы, создаваемые шаром 1 на расстоянии a и b, см. рис. 5.9, соответственно равны

$$\varphi_{1a} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 a}; \quad \varphi_{1b} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 b}.$$

Аналогично, для 2-го шара

$$\varphi_{2a} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 a}; \quad \varphi_{2b} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 b}.$$

Пользуясь принципом суперпозиции, найдем результирующий потенциал каждого шара

$$\varphi_1 = \varphi_{1a} + \varphi_{2b} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 a} - \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 b}; \quad \varphi_2 = \varphi_{1b} + \varphi_{2a} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 b} - \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 a}.$$

Отсюда разность потенциалов между шарами

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{2}{a} - \frac{2}{b}\right) = \frac{q(b-a)}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 ab}.$$

Следовательно, $$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 ab}{(b-a)}.$$

Учитывая, что $b \gg a$, получим $C \approx 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a = 0{,}56$ пФ.

Ответ: $C \approx 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a = 0{,}56$ пФ.

Задачи для самостоятельного решения

5.1. Плоский конденсатор содержит слой слюды (ε_1) толщиной $d_1 = 2$ мм и слой парафинированной бумаги (ε_2) толщиной $d_2 = 1$ мм. Найти разность потенциалов на слоях диэлектриков и напряженность поля в каждом из них, если разность потенциалов между обкладками конденсатора $U = 220$ В.

Ответ: $E_1 = U\varepsilon_2/(\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1) = 4 \cdot 10^4$ В/м; $E_2 = E_1(\varepsilon_2/\varepsilon_1) = 1{,}4 \cdot 10^5$ В/м; $U_1 = E_1 d_1 = 80$ В; $U_2 = E_2 d_2 = 140$ В.

5.2. Найти емкость C конденсатора, содержащего в качестве диэлектрика слой слюды (ε_1) толщиной $d_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ мм и слой парафинированной бумаги (ε_2) толщиной $d_2 = 10^{-3}$ мм, если площадь пластин $S = 25$ см^2.

Ответ: $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d_1/\varepsilon_1 + d_2/\varepsilon_2} = 28{,}2$ нФ.

5.3. Стеклянную пластинку вдвинули в плоский конденсатор так, что она вплотную прилегает к его обкладкам. Разность потенциалов между пластинами конденсатора $U = 3$ В, расстояние между пластинами $d = 10$ см. Найти плотность $\sigma_{пол}$ поляризационных зарядов на пластине диэлектрика.

Ответ: $\sigma_{пол} = \dfrac{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 U}{d} = 1{,}33 \cdot 10^{-9}$ Кл/м^2.

5.4. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено диэлектриком. Площадь каждой обкладки $S = 0{,}01$ м^2. Расстояние между обкладками $d = 1$ мм. Найти емкость C конденсатора, если диэлектрическая проницаемость изменяется по линейному закону $\varepsilon = \varepsilon_1 + kx$. На одной стороне пластины $\varepsilon_1 = 3$, на другой стороне $\varepsilon_2 = 7$.

Ответ: $C = \dfrac{\varepsilon_0 S(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{d \cdot \ln(7/3)} = 418$ пФ.

5.5. Изотропный неоднородный диэлектрик заполняет пространство между обкладками сферического конденсатора. Радиусы обкладок конденсатора: $R_1 = 5$ мм, $R_2 = 8$ мм. Диэлектрическая проницаемость ε является функцией расстояния r до центра системы, $\varepsilon = \alpha/r^2$, где $\alpha = 0{,}0027$ м$^{-2}$. Найти емкость C конденсатора.

Ответ: $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\alpha}{R_2 - R_1} = 100$ пФ.

5.6. Плоский конденсатор имеет емкость $C_0 = 300$ пФ. Какова будет емкость конденсатора, если ввести между обкладками параллельно им алюминиевый лист, толщина которого равна 1/4 расстояния между обкладками? Как влияет на результат положение листа? Ответ обосновать.

Ответ: $C = 4C_0/3 = 400$ пФ; не зависит.

5.7. Найти емкость системы конденсаторов между точками A и B, которая показана на рис. 5.10 и 5.11.

Ответ: 1) $C = C_1 + C_2 + C_3$;
2) $C_{общ} = C$.

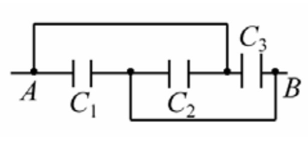


Рис. 5.10

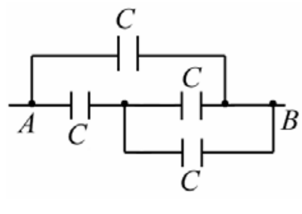


Рис. 5.11

5.8. Длинный прямой провод расположен параллельно безграничной проводящей плоскости. Радиус сечения провода равен a, расстояние между осью провода и проводящей плоскостью b. Найти взаимную емкость системы на единицу длины провода при условии, что $a < \text{b}$.

Ответ: $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(b/a\right)}$.

5.9. Металлический шар радиусом R_1 = 5 см окружен шаровым слоем диэлектрика (ε = 7) толщиной d = 1 см и помещен концентрично в металлической сфере с внутренним радиусом R_2 = 7 см. Чему равна емкость C такого конденсатора?

Ответ: $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 R_2\left(R_1 + R_2\right)}{\left(\varepsilon R_1 + R_2\right)d} \approx 39$ пФ.

5.10. Конденсатор состоит из двух концентрических сфер. Радиус внутренней сферы R_1 = 10 см, внешней – R_2 = 10,2 см. Определить разность потенциалов $\Delta\varphi$, если внутренней сфере сообщен заряд q = 9 мкКл, а пространство заполнено диэлектриком с ε = 2,0.

Ответ: $\Delta\varphi = \dfrac{q\left(R_2 - R_1\right)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 R_2} = 7930$ В.

5.11. Шар радиусом R_1 = 6 см заряжен до потенциала φ_1 = 300 В, а шар радиусом R_2 = 4 см – до потенциала φ_2 = 500 В. Определить потенциал шаров после того, как их соединили металлическим проводником.

Ответ: $\varphi = \dfrac{R_1\varphi_1 + R_2\varphi_2}{R_1 + R_2} = 380$ В.

5.12. Определить емкость системы, состоящей из двух концентрических сфер радиусами r и R, пространство между которыми наполовину залито жидким диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε. Искривлением полей на границах пренебречь.

Ответ: $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon + 1)rR}{R - r}$.

5.13. Оцените емкость C тонкого уединенного проводящего диска радиусом R = 0,10 м.

Ответ: $C = 4\pi\varepsilon_0 R$ = 11,1 пФ.

5.14. Два длинных провода радиусом a = 1 мм расположены в воздухе параллельно друг другу. Расстояние между их осями b = 200 мм. Найти емкость C, приходящуюся на единицу их длины.

Ответ: $C = \dfrac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left(b/a\right)} = 5{,}2$ пФ/м.

5.15. Газоразрядный счетчик элементарных частиц состоит из трубки радиусом r_2 = 10 мм и натянутой по оси трубки нити радиусом r_1 = = 50 мкм. Длина счетчика L = 150 мм. Найти емкость C счетчика.

Ответ: $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\left(r_2/r_1\right)} = 1{,}6$ пФ.

5.16. Цилиндрический конденсатор с радиусами обкладок R_1 и R_2 наполовину заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 3$. Оставшаяся часть – воздух. Расстоянием поля вблизи краев и на границе пренебречь. Длина обкладок l = 50 см, R_1 = 3 мм, R_2 = 5 мм. Найти емкость C конденсатора.

Ответ: $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{(\varepsilon+1)\ln(R_2/R_1)} = 40$ пФ.

5.17. Радиусы обкладок сферического конденсатора r_1 = 9 см и r_2 = = 11 см. Зазор между обкладками заполнен диэлектриком, проницаемость которого изменяется с расстоянием r от центра конденсатора по закону $\varepsilon = \varepsilon_1 (r_1/r)$, где $\varepsilon_1 = 2$. Найти емкость C конденсатора.

Ответ: $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 r_1}{\ln(r_2/r_1)} = 100$ пФ.

5.18. Площадь каждой обкладки плоского конденсатора S = 1 м^2, расстояние между обкладками d = 5 мм. Зазор между обкладками заполнен двухслойным диэлектриком, $\varepsilon_1 = 2{,}0$, $\varepsilon_2 = 3{,}0$, d_1 = 3 мм, d_2 = 2 мм. Найти емкость C конденсатора.

Ответ: $C = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 S}{d_1\varepsilon_2 + d_2\varepsilon_1} = 4{,}1$ нФ.

5.19. Расстояние между пластинами плоского конденсатора d = 1,3 мм, площадь пластин S = 40 см^2. В пространстве между пластинами находится два слоя диэлектриков: $\varepsilon_1 = 7$, d_1 = 0,7 мм, $\varepsilon_2 = 3$, d_2 = 0,3 мм. Найти емкость C конденсатора.

Ответ: $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d_1/\varepsilon_1 + d_2/\varepsilon_2 + \left(d - d_1 - d_2\right)/\varepsilon} = 70{,}8$ пФ, где $\varepsilon = 1$.

5.20. Определить диэлектрическую проницаемость ε однородного диэлектрика, окружающего уединенный шаровой проводник радиусом R. Толщина слоя d = 2 см, R = 3 см. Емкость системы равна C_0 = 4 пФ.

Ответ: $\varepsilon = \dfrac{C_0 d}{R\left(4\pi\varepsilon_0\left(R+d\right) - C_0\right)} = 1{,}7$.

5.21. Определить диэлектрическую проницаемость ε среды, в которой находятся два металлических шарика радиусом a = 10 мм каждый. Емкость системы равна C = 1,1 пФ. Расстояние между шариками $L >> a$.

Ответ: $\varepsilon = C/(2\pi\varepsilon_0 a) = 2$.

5.22. На два последовательно соединенных конденсатора с емкостью C_1 = 100 пФ и C_2 = 200 пФ подано постоянное напряжение U = 300 В. Какова емкость C этой системы? Каков заряд q на обкладках? Определите напряжение U_1 и U_2.

Ответ: $C = C_1C_2/(C_1 + C_2)$ = 67 пФ; $q = UC$ = 20 нКл; $U_1 = UC_2/(C_1 + C_2)$ = 200 В $U_2 = U - U_1$ = 100 В.

5.23. Четыре одинаковые металлические пластины расположены в воздухе на одинаковом расстоянии d друг от друга. Площадь каждой пластины равна S. Найти емкость системы между точками a и b, если пластины соединены так, как показано на рисунке 5.12.

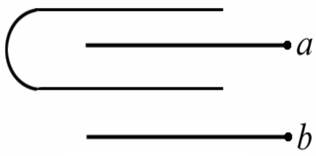


Рис. 5.12

Ответ: $C = 2\varepsilon_0 S/(3d)$.

5.24. Конденсатор с площадью пластин S заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε (рис. 5.13). Длина пластин L. Найти емкость C такой системы.

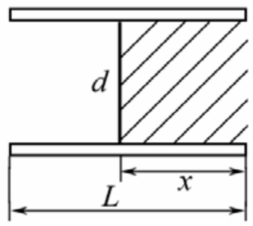


Рис. 5.13

Ответ: $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{dL}\left[L + (\varepsilon - 1)x\right]$.

5.25. Найти емкость бесконечной цепи, которая образована повторением одного и того же звена, состоящего из двух одинаковых конденсаторов емкости C.

Ответ: $C_{\text{общ}} = C\left(\sqrt{5} - 1\right)/2$.

Примечание. Поскольку цепь бесконечна, все звенья, начиная со второго, могут быть заменены емкостью C_x, равной искомой.

6. ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Основные формулы и обозначения

Энергия взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}.$$

Симметричная формула для энергии взаимодействия двух зарядов

$$W = \frac{1}{2}\left(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2\right).$$

Энергия взаимодействия n зарядов

$$W = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} q_k\varphi_k = \frac{1}{2}\sum_{k,i=1}^{n}\frac{q_k q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{ki}} \ (k \neq i).$$

Энергия взаимодействия при непрерывном распределении зарядов по объему V с плотностью ρ и по поверхности S с плотностью σ в точках пространства с потенциалом φ:

$$W = \frac{1}{2}\int \varphi\rho dV + \frac{1}{2}\int \varphi\sigma dS.$$

Энергия диполя

$$W = -(\mathbf{p},\mathbf{E}),$$

где $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ – дипольный момент; $\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi$ – напряженность поля.

Энергия конденсатора

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q(\varphi_1 - \varphi_2)}{2} = \frac{1}{2}C(\varphi_1 - \varphi_2)^2.$$

Энергия заряженного по объему шара с плотностью заряда ρ

$$W = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0} = \frac{3}{5}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R},$$

где R – радиус шара.

Плотность энергии электрического поля

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{(\mathbf{E},\mathbf{D})}{2}.$$

Плотность энергии точечного заряда q, создаваемой им на расстоянии r,

$$w = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}.$$

Задачи с решениями

Задача 1. Рассчитать энергию, обусловленную зарядом элементарной частицы. Сравнить с энергией покоя электрона m_0c^2.

Решение: 1. Воспользуемся формулой $W = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q\varphi}{2}$. Предположим, что радиус электрона равен радиусу протона, т.е. $R = 10^{-15}$ м, и что заряд электрона расположен на его поверхности.

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{2R} = 9\cdot 10^9 \cdot \frac{(1{,}6\cdot 10^{-19})^2}{2\cdot 10^{-15}} = 1{,}15\cdot 10^{-13} \text{ Дж.}$$

Этой энергии соответствует масса

$$m_0' = \frac{W}{c^2} = \frac{1{,}15\cdot 10^{-13}}{(3\cdot 10^8)^2} = 12{,}85\cdot 10^{-31} \text{ кг.}$$

Заметим, что эта величина превышает значение полученной на опыте массы $m_e = 9{,}11\cdot 10^{-31}$ кг.

2. Предположим, что заряд электрона распределен не по поверхности, а равномерно по объему с плотностью ρ.

Потенциал электростатического поля внутри равномерно заряженного по объему шара с плотностью ρ равен

$$\varphi(r) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0 R^3}(3R^2 - r^2).$$

Энергия заряженного шара

$$W = \frac{1}{2}\int_0^R \rho\varphi(r) 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0} = \frac{3}{5}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Энергия равномерно заряженного по объему электрона радиуса R

$$W = \frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Этой энергии соответствует масса

$$m_0'' = \frac{W}{c^2} = \frac{3}{5}\cdot\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R\cdot c^2} = 15{,}36\cdot 10^{-31} \text{ кг.}$$

Таким образом, $m_0'' > m_0' > m_{\text{эксп}}$. Эта проблема стоит в ряду нерешенных задач физики.

Задача 2. Определить энергию W электрического поля в слое диэлектрика ($\varepsilon = 2$), окружающего заряженный шар ($q = 20$ нКл) радиусом $R = 3$ см. Толщина слоя диэлектрика $d = 2$ см (рис. 6.1).

Дано:	
$\varepsilon = 2$	
$R = 3\cdot10^{-2}$ м	
$d = 2\cdot10^{-2}$ м	
$q = 2\cdot10^{-8}$ Кл	
W – ?	

Решение: Поле, созданное заряженным шаром, является неоднородным, и энергия поля в слое диэлектрика распределена неравномерно, но объемная плотность энергии одинакова во всех точках, равноотстоящих от центра сферы.

Энергия в сферическом слое диэлектрика объемом dV равна $dW = wdV$.

Полная энергия

$$W = \int wdV = 4\pi \int_R^{R+d} wr^2 dr,$$

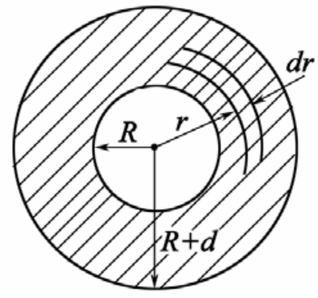


Рис. 6.1

где r – радиус сферического слоя толщиной dr. Объемная плотность энергии определяется по формуле $w = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}$, где $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$, $r \ge R$.

Тогда
$$w = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon r^4};$$

$$W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_R^{R+d}\frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d}\right) = \frac{q^2 d}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon R(R+d)}.$$

Подставляя численные данные, получаем

$$W = \frac{(2\cdot10^{-8})^2\cdot2\cdot10^{-2}}{8\pi\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot2\cdot3\cdot10^{-2}(3+2)\cdot10^{-2}} = 12\cdot10^{-6}\ \text{Дж}.$$

Ответ: W = 12 мкДж.

Задача 3. Точечный заряд q = 1 нКл находится в центре шарового слоя из однородного диэлектрика с проницаемостью ε = 2. Внутренний и наружный радиусы слоя равны, соответственно, a = 3 мм, b = 5 мм. Найти электростатическую энергию W, заключенную в диэлектрическом слое.

Дано:	
$q = 1\cdot10^{-9}$ Кл	
$\varepsilon = 2$	
$a = 3\cdot10^{-3}$ м	
$b = 5\cdot10^{-3}$ м	
W – ?	

Решение: Энергия в слое распределена неравномерно, поэтому мысленно выделим очень тонкий концентрический сферический слой радиусом от r до $r + dr$. Энергия dW, локализованная в этом слое, равна

$$dW = wdV = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}4\pi r^2 dr,$$

где $w = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$; $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$; $dV = 4\pi r^2 dr$.

Интегрируя в пределах от a до b, получим

$$W=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_a^b\frac{dr}{r^2}=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right).$$

Подставляя численные значения, получаем

$$W=\frac{9\cdot10^9\cdot(1\cdot10^{-9})^2}{2}\left(\frac{1}{3\cdot10^{-3}}-\frac{1}{5\cdot10^{-3}}\right)=6\cdot10^{-7}\text{ Дж.}$$

Ответ: $W = 0{,}6$ мкДж.

Задача 4. Найти работу, которую надо совершить против электрических сил, чтобы удалить диэлектрическую пластинку из плоского заряженного конденсатора. Конденсатор отключен от источника. Диэлектрик ($\varepsilon = 2$) заполняет все пространство между обкладками. Площадь пластин конденсатора равна 100 см^2, расстояние между пластинами $d = 10$ мм. Заряд каждой пластины 10 нКл.

Дано:
$S = 0{,}01$ м^2
$d = 10^{-2}$ м
$q = 10^{-8}$ Кл
$\varepsilon = 2$
A – ?

Решение: Работа A в данной физической системе равна разности (W_2 – W_1), где W_1 – энергия поля между обкладками конденсатора при наличии диэлектрика; W_2 – то же, но в отсутствие диэлектрика. Плотность энергии электрического поля между пластинами

$$w_1=\frac{ED}{2}=\frac{E\cdot\varepsilon\varepsilon_0E}{2}=\frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0};\qquad w_2=\frac{ED}{2}=\frac{E\cdot\varepsilon_0E}{2}=\frac{D^2}{2\varepsilon_0}.$$

Тогда

$$A=W_2-W_1=\left(w_2-w_1\right)V=\frac{D^2}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)V,$$

где $D = D_1 = D_2 = \sigma$; $\sigma = q/S$ – поверхностная плотность заряда на пластине конденсатора; $V = Sd$ – объем пространства между обкладками.

$$A=\frac{\sigma^2S\cdot d}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)=\frac{q^2S\cdot d}{2\varepsilon_0S^2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)=\frac{q^2}{2C_0}\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)=\frac{q^2d}{2\varepsilon_0S}\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Последние формулы полезны при вычислении работы, если известна емкость C_0 конденсатора.

Подставляя численные значения, получаем

$$A=\frac{(10^{-8})^2\cdot10^{-2}}{2\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot10^{-2}}\left(1-\frac{1}{2}\right)=2{,}82\cdot10^{-6}\text{ Дж.}$$

Ответ: $A = 2{,}82$ мкДж.

Задача 5. Определить работу, затрачиваемую полем на поляризацию единицы объема диэлектрика.

Решение: Проанализируем формулу для плотности энергии электрического поля

$$w = \frac{(\mathbf{E},\mathbf{D})}{2}. \qquad (1)$$

Заметим, что при одном и том же значении E величина w при наличии диэлектрика в ε раз больше, чем при отсутствии диэлектрика, несмотря на то, что в обоих случаях напряженность поддерживается одной и той же. Однако при создании поля в диэлектрике оно совершает дополнительную работу, связанную с поляризацией.

Под энергией поля в диэлектрике понимают всю энергию, которую нужно затратить на воздействие электрического поля, которая состоит из собственной энергии плюс энергии поляризации диэлектрика.

Подставим $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ в формулу (1), получим

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{(\mathbf{E},\mathbf{P})}{2}.$$

Первое слагаемое есть плотность энергии поля $\mathbf{E}$ в вакууме. Энергия $(\mathbf{E},\mathbf{P})/2$ представляет собой энергию поляризации единицы объема диэлектрика. Под действием поля заряды диэлектрика ρ_+ и ρ_- смещаются на величину $d\mathbf{l}_+$ и $d\mathbf{l}_-$, при этом совершается работа

$$dA = \rho_+\left(\mathbf{E}, d\mathbf{l}_+\right) + \rho_-\left(\mathbf{E}, d\mathbf{l}_-\right), \text{ где } \rho_+ = \rho_- = \rho;$$

$$dA = \rho\left(\mathbf{E}, d\mathbf{l}\right), \text{ где } d\mathbf{l} = d\mathbf{l}_+ + d\mathbf{l}_-.$$

Зная, что $\rho \cdot d\mathbf{l} = d\mathbf{P}$ – элементарный вектор поляризации,

$$dA = (\mathbf{E}, d\mathbf{P}).$$

Учитывая, что $\mathbf{P} = \chi\varepsilon_0\mathbf{E}$, $d\mathbf{P} = \chi\varepsilon_0 d\mathbf{E}$, получаем (интегрируя) всю работу по поляризации единицы объема диэлектрика

$$A = \int dA = \chi\varepsilon_0 \int E dE = \frac{\chi\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Задача 6. Найти энергию взаимодействия точечного заряда q = = 1 нКл, находящегося на расстоянии r = 5 мм от безграничной проводящей плоскости.

Дано:
$q = 10^{-9}$ Кл
$r = 5 \cdot 10^{-3}$ м
W – ?

Решение: Задачу можно решить методом изображений. Из условия равновесия зарядов на проводнике вытекает, что поле внутри металла представляет собой суперпозицию поля заряда q и поля индуцированных на стенке поверхностных зарядов σ и равно нулю.

Следовательно, поле, создаваемое зарядами σ в металле, совпадает с полем, которое создавал бы заряд $-q$, помещенный в ту же точку, где находится заряд q, но в зеркальном отображении (рис. 6.2).

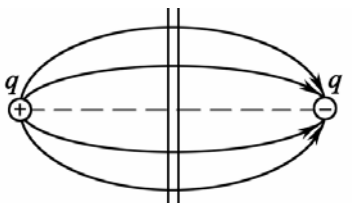


Рис. 6.2

Поэтому энергия взаимодействия равна

$$W = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2r}.$$

Подставляя численные значения, получаем

$$W = -9\cdot 10^9 \cdot \frac{(10^{-9})^2}{2\cdot 5\cdot 10^{-3}} = -9\cdot 10^{-7} \text{ Дж.}$$

Ответ: $W = -0{,}9$ мкДж.

Задача 7. Физическая система состоит из двух концентрических металлических сфер радиусами R_1 и R_2 с соответствующими зарядами q_1 и q_2; $R_2 > R_1$. Определить полную энергию W данной системы, а также собственную энергию W_1 и W_2 сфер и энергию $W_{вз}$ их взаимодействия, если $q_1 = q_2 = 10$ нКл, $R_1 = 5$ мм, $R_2 = 8$ мм.

Дано:
$q = 10^{-8}$ Кл
$R_1 = 5\cdot 10^{-3}$ м
$R_2 = 8\cdot 10^{-3}$ м

W – ? W_1 – ?
W_2 – ? $W_{вз}$ – ?

Решение: Собственная энергия каждой сферы равна

$$W = (1/2)q\varphi,$$

где $\varphi = q/(4\pi\varepsilon_0 R)$ – потенциал оболочки, обусловленный только зарядом на ней. Следовательно,

$$W_1 = \frac{q_1^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1}; \quad W_2 = \frac{q_2^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2}.$$

Энергия взаимодействия заряженных оболочек равна заряду q одной из них, умноженному на потенциал φ, который создает заряд другой сферы в месте нахождения заряда q. Учитывая, что при $R_1 \le R_2$ $\varphi_2(R_1) = \varphi_2(R_2)$, получим

$$W_{вз} = q_1\varphi_2(R_2) = q_2\varphi_1(R_2) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}.$$

Таким образом, полная энергия $W = W_1 + W_2 + W_{вз}$.

$$W = \frac{q_1^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q_2^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Подставляя численные значения, получаем

$$W_1 = \frac{9\cdot 10^9\cdot (10^{-8})^2}{2\cdot 5\cdot 10^{-3}} = 90 \text{ мкДж}; \quad W_2 = \frac{9\cdot 10^9\cdot (10^{-8})^2}{2\cdot 8\cdot 10^{-3}} = 56{,}25 \text{ мкДж};$$

$$W_{вз} = \frac{9\cdot 10^9\cdot (10^{-8})^2}{8\cdot 10^{-3}} = 112{,}5 \text{ мкДж}; \quad W = 90 + 56{,}25 + 112{,}5 = 258{,}75 \text{ Дж.}$$

Ответ: 90 мкДж; 56,25 мкДж; 112,5 мкДж; 258,75 Дж.

Примечание. Полученное выражение полной энергии W есть не что иное, как энергия заряженного сферического конденсатора. В заряженном конденсаторе $q_1 = -q_2$, следовательно,

$$W=\frac{q_1^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{q_2^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2}-\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}=\frac{q^2}{2C},$$

где $C=4\pi\varepsilon_0 R_1R_2/(R_2-R_1)$ – емкость сферического конденсатора.

Задача 8. Два небольших металлических шарика радиусами r_1 и r_2 находятся в вакууме на расстоянии $l \gg r$ и имеют суммарный заряд q. При каком отношении q_1/q_2 зарядов на шариках электрическая энергия системы будет минимальной?

Решение: Полная электрическая энергия данной системы рассмотрена в предыдущей задаче (задача 7)

$$W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1^2}{2r_1}+\frac{q_2^2}{2r_2}+\frac{q_1q_2}{l}\right). \qquad (1)$$

С учетом того, что $q_2=q-q_1$, выражение (1) примет вид

$$W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1^2}{2r_1}+\frac{(q-q_1)^2}{2r_2}+\frac{q_1(q-q_1)}{l}\right).$$

Учтем, что $r \ll l$. В этом случае энергией взаимодействия шариков можно пренебречь. Тогда $W\cong\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1^2}{2r_1}+\frac{(q-q_1)^2}{2r_2}\right)$.

Энергия системы минимальна при $dW/dq_1=0$.

$$\frac{dW}{dq_1}\cong\frac{2q_1}{2r_1}-\frac{2(q-q_1)}{2r_2}=\frac{q_1}{r_1}-\frac{q-q_1}{r_2}=\frac{q_1}{r_1}-\frac{q_2}{r_2}=0. \text{ Или } \frac{q_1}{q_2}\cong\frac{r_1}{r_2}.$$

Отсюда находим

$$q_1\cong q\frac{r_1}{r_1+r_2};\quad q_2\cong q\frac{r_2}{r_1+r_2} \text{ при } r\ll l.$$

Задача 9. К полюсам батареи с ЭДС $\mathcal{E}$ присоединены пластины плоского конденсатора. Известно, что для раздвижения пластин надо совершить работу A. Как меняется с расстоянием потребляемая мощность? На что затрачивается работа, совершаемая при раздвижении пластин конденсатора? Что происходит с начальной электростатической энергией конденсатора?

Решение: При раздвижении пластин емкость конденсатора уменьшается, т.к. $C=\varepsilon_0 S/x$, при этом $\mathcal{E}=\text{const}$, $q=C\mathcal{E}$, а, следовательно, заряд q пластин также убывает и перемещается к клеммам батареи (источника).

Поэтому необходимо вычислить элементарную работу

$$dA=qE_1dx. \qquad (1)$$

Обращаем внимание, что здесь $E_1 = E/2$ – напряженность поля одной пластины, в поле которой перемещается заряд q. Из всего сказанного следует, что $E_1 = E_1(x)$ и $q = q(x)$, т.е.

$$E_1 = \frac{1}{2}E = \frac{\mathcal{E}}{2x}; \qquad q = C\mathcal{E} = \frac{\varepsilon_0 S\mathcal{E}}{x}.$$

Подставляя в (1), получим $dA = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S\mathcal{E}^2}{x^2}dx.$

Мощность $P = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S\mathcal{E}^2}{x^2}\frac{dx}{dt}$ меняется обратно пропорционально квадрату расстояния между пластинами и пропорциональна скорости раздвижения пластин, $v = dx/dt$. При раздвижении пластин электрическая энергия W конденсатора уменьшается, т.к. $W = C\mathcal{E}^2/2 = \varepsilon_0 S\mathcal{E}^2/(2x)$. Заряды стекают обратно к источнику. На продвижение этих зарядов $\oplus \to \oplus$ батареи затрачивается освободившаяся энергия конденсатора и механическая энергия (работа).

Эта работа равна $A = \frac{1}{2}\varepsilon_0 S\mathcal{E}^2 \int_x^{x+d}\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 S\mathcal{E}^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+d}\right).$

Таким образом, в целом как механическая, так и электрическая энергия или переходят в химическую энергию батареи (батарея заряжается), или расходуются на ее нагревание. На практике имеют место как то, так и другое.

Задача 10. Незаряженный конденсатор емкостью 10 мкФ соединили с заряженным до разности потенциалов 200 В и отключенным конденсатором емкостью 6 мкФ. Какое количество энергии первого конденсатора израсходуется на образование искры?

Дано:
$C_1 = 6\cdot10^{-6}$ Ф
$C_2 = 1\cdot10^{-5}$ Ф
$\Delta\varphi_1 = 200$ В

ΔW – ?

Решение: Из закона сохранения энергии следует, что энергия, израсходованная на искру, равна разности энергий двух физических систем

$$\Delta W = W_1 - W_2, \qquad (1)$$

где W_1 – энергия заряженного конденсатора; W_2 – энергия системы из двух соединенных конденсаторов.

$$W_1 = \frac{C_1\Delta\varphi_1^2}{2}, \ (2) \qquad W_2 = \frac{C_1 + C_2}{2}\Delta\varphi_2^2. \ (3)$$

Следует понимать, что при соединении конденсаторов образуется система параллельно включенных емкостей (рис. 6.3)

Так как система изолирована, то $Q = C_1\Delta\varphi_1 = \text{const}$, поэтому

$$\Delta\varphi_2 = \frac{Q}{C_1 + C_2} = \frac{C_1\Delta\varphi_1}{C_1 + C_2}. \qquad (4)$$

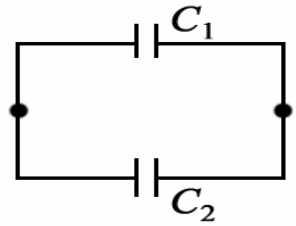


Рис. 6.3

Таким образом, записанные уравнения полностью определили физическую сторону решения задачи. Математические преобразования сводятся к подстановке в уравнение (1) формул (2) – (4).

$$\Delta W = \frac{C_1\Delta\varphi_1^2}{2} - \frac{(C_1 + C_2)\, C_1^2\Delta\varphi_1^2}{2(C_1 + C_2)^2} = \frac{1}{2}\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}\Delta\varphi_1^2.$$

Подставляя численные значения, имеем

$$\Delta W = \frac{1}{2}\cdot\frac{6\cdot10^{-6}\cdot1\cdot10^{-5}}{(6+10)\cdot10^{-6}}\cdot200^2 = 7{,}5\cdot10^{-2}\ \text{Дж} = 75\ \text{мДж}.$$

Ответ: $\Delta W = 75$ мДж.

Задача 11. Имеется сферическая оболочка, заряженная равномерно зарядом q. В центре ее расположен точечный заряд q_0. Найти работу электрических сил этой системы при расширении оболочки – увеличении ее радиуса от R_1 до R_2, если $q = q_0 = 1$ нКл; $R_1 = 1$ см; $R_2 = 3$ см.

Дано:
$q = 1\cdot10^{-9}$ Кл
$q_0 = 1\cdot10^{-9}$ Кл
$R_1 = 0{,}01$ м
$R_2 = 0{,}03$ м
A – ?

Решение: Работа электрических сил равна убыли электрической энергии системы: $A = W_1 - W_2$.

Чтобы найти разность $W_1 - W_2$, заметим, что при расширении оболочки (рис. 6.4) электрическое поле, а следовательно, и локализованная в нем энергия, изменились только в заштрихованном сферическом слое.

Значит $$A = W_1 - W_2 = \int\limits_{V_1}^{V_2}(w_1 - w_2)\,dV = \int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{\varepsilon_0}{2}\left(E_1^2 - E_2^2\right)4\pi r^2 dr,$$

где E_1 и E_2 – напряженность поля (в заштрихованном слое на расстоянии r от центра системы) до и после расширения оболочки; w_1 и w_2 – плотность энергии электрического поля до и после расширения оболочки ($w = \varepsilon_0E^2/2$).

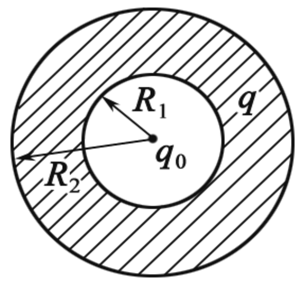


Рис. 6.4

С помощью теоремы Гаусса находим

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q + q_0}{r^2}, \qquad E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{r^2}.$$

В результате интегрирования получим

$$A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\left(q_0 + q/2\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = 9\cdot10^9\cdot1{,}5\cdot10^{-18}\cdot\left(\frac{1}{0{,}01} - \frac{1}{0{,}03}\right) = 9\cdot10^{-7}\ \text{Дж}.$$

Ответ:. $A = 0{,}9$ мкДж.

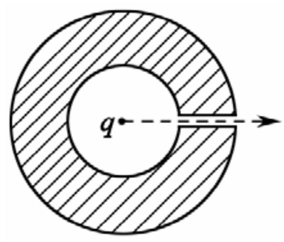


Рис. 6.5

Задача 12. Точечный заряд q находится в центре сферического незаряженного проводящего слоя, внутренний и наружный радиусы которого равны, соответственно, a и b. Какую работу произведут электрические силы в данной системе, если заряд q переместить из его первоначального положения через малое отверстие (рис. 6.5) на очень большое расстояние от сферического слоя?

Решение: Работа электрических сил равна убыли электрической энергии системы. Энергия локализована в самом поле. Поэтому нужно найти, как изменится само поле в результате этого процесса.

Поле вокруг заряда q изменится только в сферическом слое с внутренним и наружным радиусами a и b.

В начальном положении заряда поле в объеме проводящего слоя отсутствует, а в конечном положении поле в таком же объеме вокруг точечного заряда есть.

Следовательно, работа равна

$$A = 0 - W_{\text{сл}} = -\int\limits_{V_a}^{V_b} w\,dV = -\int\limits_a^b \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} 4\pi r^2 dr,$$

где $w = \varepsilon_0 E^2/2$ – плотность энергии электрического поля.

Имея в виду, что $E = q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ и $dV = 4\pi r^2 dr$, получим после интегрирования

$$A = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int\limits_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{a-b}{ab} < 0.$$

Ответ: $A = -\dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\dfrac{b-a}{ab}$.

Задача 13. В цилиндрический конденсатор вводят цилиндрический слой однородного диэлектрика с проницаемостью ε, который заполняет практически все пространство между обкладками. Средний радиус обкладок R, зазор между ними d, причем $d \ll R$. Конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения U. Найти силу, втягивающую диэлектрик в конденсатор.

Решение: Воспользовавшись формулой $W = q^2/(2C)$ для энергии конденсатора, найдем, что искомая сила

$$F_x = -\left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_q = \frac{q^2}{2}\frac{\partial C/\partial x}{C^2} = \frac{U^2}{2}\frac{\partial C}{\partial x}. \quad (1)$$

Емкость данного конденсатора при условии $d \ll R$ определяется формулой для плоского конденсатора $C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d$, поэтому если диэлектрик вдвинут на глубину x, а длина конденсатора l, то

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 x \cdot 2\pi R}{d} + \frac{\varepsilon_0 (l - x) \cdot 2\pi R}{d} = \frac{\varepsilon_0 \cdot 2\pi R}{d}(\varepsilon x + l - x). \qquad (2)$$

После подстановки (2) в (1) получим

$$F_x = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)\pi R U^2}{d}.$$

Ответ: $F_x = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\pi R U^2/d$.

Задача 14. Плоский воздушный конденсатор емкостью C = 3 мкФ соединен с источником постоянного напряжения U = 20 В (рис. 6.6.). Какую механическую работу надо совершить, чтобы расстояние между обкладками конденсатора увеличить в n = 3 раза? Рассмотрите два случая: 1) перед раздвиганием обкладок конденсатор отсоединяют от источника, т.е. ключ K разомкнут; 2) ключ K все время замкнут.

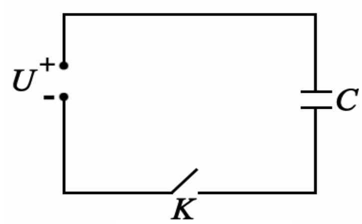


Рис. 6.6

Дано:
$C = 3\cdot 10^{-6}$ Ф
$n = 3$
$U = 20$ В

A_1 – ? A_2 – ?
A_{U1} – ? A_{U2} – ?

Решение: В первом случае заряд q конденсатора остается постоянным. Механическая работа равна изменению энергии конденсатора:

$$A_1 = \Delta W = W_2 - W_1,$$

где W_1 – энергия конденсатора до раздвигания обкладок; W_2 – после их раздвигания.

$$W_1 = \frac{q^2}{2C}.$$

Емкость плоского конденсатора $C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d$ после раздвигания обкладок уменьшилась в n раз, следовательно, энергия конденсатора при этом увеличилась в n раз, то есть

$$W_2 = n\frac{q^2}{2C}.$$

Итак,
$$A_1 = n\frac{q^2}{2C} - \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2C}(n-1); \quad q = CU;$$

$$A_1 = \frac{CU^2}{2}(n-1) = \frac{3\cdot 10^{-6}\cdot 400\cdot 2}{2} = 1{,}2\cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

Работа источника напряжения $A_{U1} = 0$, так как он отключен.

Во втором случае постоянным остается напряжение на конденсаторе. Энергия конденсатора до раздвигания обкладок $W_1 = CU^2/2$; после –

емкость конденсатора уменьшилась в n раз, энергия уменьшилась во столько же раз и стала равной $W_2 = CU^2/(2n)$; при этом уменьшается также и заряд конденсатора:

$$\Delta q = q_2 - q_1 = \frac{CU}{n} - CU = -CU\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Если источником напряжения является конденсатор, то он заряжается. Источник при этом совершает работу

$$A_{U_2} = U \cdot \Delta q = -CU^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -3 \cdot 10^{-6} \cdot 20^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 8 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

Изменение энергии конденсатора в этом случае равно

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{CU^2}{2n} - \frac{CU^2}{2} = -\frac{CU^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Это изменение энергии равно сумме механической работы и работы источника, то есть $\Delta W = A_2 + A_{U_2}$. Отсюда следует, что

$$A_2 = \Delta W - A_{U_2} = -\frac{CU^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + CU^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{CU^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right);$$

$$A_2 = \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 20^2}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

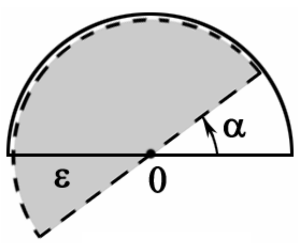


Рис. 6.7

Задача 15. Конденсатор состоит из двух неподвижных пластин, имеющих форму полукруга радиусом R и расположенной между ними подвижной пластины аналогичной формы, которая может свободно поворачиваться (рис. 6.7). Между пластинами разность потенциалов $\Delta\varphi$ = const. Толщина пластины d, диэлектрическая проницаемость ε. Найти момент сил M_z, действующих на пластину, если ее повернули на некоторый угол.

Решение: Работа, которая совершается при повороте пластины на элементарный угол $d\alpha$, равна убыли электрической энергии W системы при q = const.

$$M_z d\alpha = -dW\big|_{q=\text{const}}, \text{ где } W = q^2/(2C).$$

Поэтому

$$M_z = -\frac{\partial W}{\partial \alpha}\bigg|_{q=\text{const}} = \frac{q^2}{2}\frac{\partial C/\partial\alpha}{C^2}. \qquad (1)$$

В данном случае $C = C_1 + C_\varepsilon$, где C_1 и C_ε – емкости частей плоского конденсатора без диэлектрика и с диэлектриком. Площадь сектора с углом α определяется как $S = \alpha R^2/2$, поэтому

$$C = \frac{\varepsilon_0 \alpha R^2}{2d} + \frac{\varepsilon\varepsilon_0(\pi - \alpha)R^2}{2d}.$$

Отсюда $\frac{\partial C}{\partial \alpha} = \frac{\varepsilon_0 R^2}{2d}(1-\varepsilon)$. Подставим это выражение в формулу (1) и учтем, что $C = q/\Delta\varphi$, тогда

$$M_z = \frac{\Delta\varphi^2}{2}\frac{\varepsilon_0 R^2}{2d}(1-\varepsilon) = -(\varepsilon-1)\frac{\varepsilon_0 R^2 \Delta\varphi^2}{4d} < 0.$$

Отрицательное значение M_z показывает, что момент этих сил действует по часовой стрелке (против положительного направления отсчета угла α (см. рис. 6.7)). Этот момент стремится втянуть диэлектрик внутрь конденсатора.

Обратите внимание, что M_z не зависит от угла α. Однако в положении равновесия, когда $\alpha = 0$, момент $M_z = 0$. Это расхождение связано с тем, что при малых углах α нельзя пренебречь краевыми эффектами.

Задачи для самостоятельного решения

6.1. Какое количество электричества Q выделится при разряде плоского конденсатора, если разность потенциалов между пластинами $\Delta\varphi = 15$ кВ, расстояние $d = 1$ мм, площадь каждой пластины $S = 300$ см^2, а диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 7$?

Ответ: $Q = \Delta\varphi\varepsilon\varepsilon_0 S/d \approx 27{,}9$ мкКл.

6.2. Между обкладками плоского воздушного конденсатора находится изолированная медная пластинка толщиной d, параллельная обкладкам конденсатора. Расстояние между обкладками $2d$, площадь каждой пластинки S. Конденсатор имеет заряд q и отключен от источника. Какую работу A надо совершить, чтобы вынуть пластинку из конденсатора? Как влияет положение пластинки? Ответ обосновать.

Ответ: $A = \frac{q^2 d}{2\varepsilon_0 S}$.

6.3. Между обкладками плоского воздушного конденсатора ($S_{\text{од}} = 10^{-4}$ м^2), подключенного к источнику $U = 200$ В, находится стеклянная пластинка, параллельно обкладкам и толщиной $d = 1$ мм. Расстояние между пластинами $2d$. Какую работу A нужно совершить, чтобы удалить пластинку?

Ответ: $A = \frac{U^2 \varepsilon_0 S_{\text{од}}}{4d}\left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\right) = 6{,}3$ нДж.

6.4. Конденсатор переменной емкости состоит из двух параллельных металлических пластин в форме полукруга радиусом R, отстоящих друг от друга на расстоянии d (рис. 6.8). Разность потенциалов между пластинами $\Delta\varphi$. Пластины отключены от источника. Какую работу A надо совершить, чтобы повернуть пластины относительно друг друга на угол α? Краевыми эффектами пренебречь.

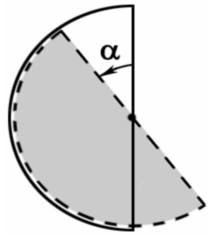


Рис. 6.8

Ответ: $A = \varepsilon_0\alpha\Delta\varphi^2R^2/(4d)$.

6.5. Плоский воздушный конденсатор состоит из двух круглых пластин радиусом r = 10 см каждая. Расстояние между пластинами d_1 = 1 см. Какую работу A нужно совершить, чтобы, удаляя пластины друг от друга, увеличить расстояние между ними до d_2 = 3,5 см, если конденсатор перед раздвижением зарядили до разности потенциалов $\Delta\varphi$ = 1,2 кВ и отключили от источника питания?

Ответ: $A = \dfrac{\varepsilon_0\pi r^2\Delta\varphi^2 S_{\text{од}}}{2d_1^2}\left(d_2 - d_1\right) = 50$ мкДж .

6.6. Плоский воздушный конденсатор заряжен до разности потенциалов $\Delta\varphi$ и отсоединен от источника. Площадь пластин S, расстояние d. Открывают кран K и заполняют жидким диэлектриком пространство между пластинами (рис. 6.9). Как изменяется электрическая энергия конденсатора? Какие явления сопровождают заполнение пространства диэлектриком? Ответ обосновать.

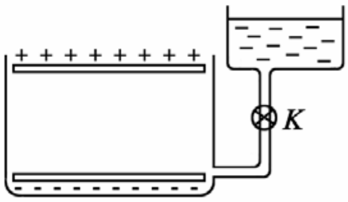


Рис. 6.9

6.7. Внутри плоского конденсатора с площадью пластин S = 200 см^2 и расстоянием между ними d = 1,0 мм находится стеклянная пластинка, полностью заполняющая пространство. Как изменится энергия конденсатора, если удалить стеклянную пластинку? Решить задачу в двух случаях: 1) конденсатор присоединен к источнику U = 300 В; 2) пластина была удалена после того, как конденсатор зарядили до U = 300 В и отсоединили от батареи. Результат объяснить.

Ответ: 1) $\Delta W_1 = (1-\varepsilon)\varepsilon_0 U^2 S/(2d) = -40$ мкДж ;

2) $A = \varepsilon\varepsilon_0 U^2 S(\varepsilon - 1)/(2d) = 239$ мкДж .

6.8. Определить работу A, которую нужно затратить, чтобы увеличить на Δx = 0,2 мм расстояние x между пластинами плоского конденсатора, заряженными зарядами $q_+ = q_-$ = 0,2 мкКл. Площадь каждой пластины S = 400 см^2. Диэлектрик воздух.

Ответ: $A = q^2\Delta x/(2\varepsilon_0 S)$ = 11,3 мкДж.

6.9. Две прямоугольные пластинки длиной L шириной b расположены параллельно друг другу на расстоянии d (рис. 6.10). Пластинки подключили к источнику напряжения U и затем отключили. В пространство между пластинами вдвинули диэлектрик с проницаемостью ε. Определите силу F, действующую на диэлектрик со стороны поля.

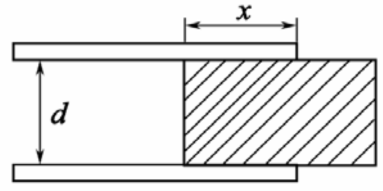


Рис. 6.10

Ответ: $F = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)bU^2/(2d)$

6.10. Параллельно соединенные одинаковые конденсаторы ($N = 5$) емкостью $C_1 = 0{,}1$ мкФ каждый заряжаются до общей разности потенциалов $\Delta\varphi_1 = 30$ кВ. Определить среднюю мощность $\langle P\rangle$ разряда, если батарея разряжается за $\tau = 1{,}5\cdot10^{-6}$ с. Остаточное напряжение после разряда равно $\Delta\varphi_2 = 0{,}5$ кВ.

Ответ: $\langle P\rangle = NC_1(\Delta\varphi_1^2 - \Delta\varphi_2^2)/(2\tau) = 1{,}5\cdot10^8$ Вт.

6.11. Внешняя оболочка сферического конденсатора может сжиматься, строго сохраняя сферическую форму и оставаясь концентричной с внутренней жесткой обкладкой. После того как обкладкам сообщили заряды $q_+ = q_- = 2$ мкКл, внешняя оболочка начинает сжиматься под действием электрических сил от значения $r_1 = 10$ см до $r_2 = 9{,}5$ см. Найти совершенную работу A. За счет чего совершена работа?

Ответ: $A = \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_1}\right) = 9{,}5$ мДж .

6.12. Имеется заряженный плоский конденсатор. Пространство между обкладками конденсатора заполняется диэлектриком с проницаемостью ε. Что происходит с объемной плотностью энергии в зазоре между пластинами, если конденсатор: а) отключен от источника; б) соединен с источником?

Ответ: а) уменьшается в ε раз; б) увеличивается в ε раз.

6.13. Точечный заряд q находится на расстоянии l от безграничной проводящей плоскости. Какую работу необходимо совершить, чтобы медленно удалить этот заряд на очень большое расстояние от плоскости?

Ответ: $A = q^2/(16\pi\varepsilon_0 l)$.

6.14. Сферическую оболочку радиуса $r_1 = 8$ мм, равномерно заряженную зарядом $q = 10^{-8}$ Кл, расширили до радиуса $r_2 = 10$ мм. Найти работу A, совершенную электрическими силами. Полученный результат согласуется с законом сохранения энергии? Каким образом?

Ответ: $A = \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right) = 11{,}25$ мкДж

6.15. Пластину из диэлектрика ($\varepsilon = 3$) толщиной $d = 2$ мм и площадью $S = 300$ см^2 поместили в однородное электрическое поле напряженностью $E = 10^3$ В/м. Найти энергию W электрического поля, сосредоточенную в пластине.

Ответ: $W = \varepsilon_0 E^2 Sd / (2\varepsilon) = 88{,}5$ пДж.

6.16. На плоский воздушный конденсатор, площадь пластин которого $S = 4800$ см^2 и расстоянием между ними $d_1 = 1$ см, подана разность потенциалов $U = 6$ кВ. затем, не отключая конденсатор от источника, расстояние между пластинами увеличили до $d_2 = 2$ см. Определить совершенную при этом работу A.

Ответ: $A = \dfrac{U^2 \varepsilon_0 S}{2}\left(\dfrac{1}{d_1} - \dfrac{1}{d_2}\right) = 3{,}8$ мДж .

6.17. Потенциал уединенной заряженной сферы равен $\varphi = 3000$ В, емкость $C = 10$ пФ. Определить энергию поля, заключенного в сферическом слое, ограниченном сферой и концентрической с ней сферической поверхностью, радиус которой в три раза больше радиуса сферы.

Ответ: $W = C\varphi^2/3 = 30$ мкДж.

6.18. Уединенный заряженный металлический шар радиусом $R = 6$ см находится в вакууме. Некоторая воображаемая поверхность делит пространство на две части (внутренняя и внешняя бесконечная) так, что энергии электрического поля обеих частей одинаковы. Найти радиус R_x этой поверхности.

Ответ: $R_x = 2R = 12$ см.

6.19. Заряд $q = 0{,}10$ нКл равномерно распределен по поверхности шара радиусом $r = 1$ см. Вычислить энергию поля, связанного с шаром ($\varepsilon = 1$), а также ту часть η энергии, которая заключена в пределах концентрической с шаром воображаемой сферы радиусом $R = 1$ м. Чему равен радиус R_n сферы, в пределах которой заключена половина энергии?

Ответ: $W = 4{,}5$ нДж; $\eta = 0{,}99$; $R_n = 2$ см.

6.20. Первоначально заряд $q = 0{,}1$ нКл распределяется равномерно по объему шара радиусом $r = 10$ мм. Затем вследствие взаимного отталкивания заряды переходят на поверхность шара. Какую работу A совершают при этом электрические силы над зарядами ($\varepsilon = 1$)?

Ответ: $A = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{10r} = 0{,}9$ нДж.

6.21. Диэлектрический шар ($\varepsilon = 3$) равномерно заряжен по объему. Во сколько раз энергия электрического поля вне шара больше энергии, заключенной в шаре?

Ответ. $W_2/W_1 = 5\varepsilon = 15$.

6.22. При параллельном соединении двух конденсаторов, незаряженного C_1 = 440 пФ и заряженного до U = 1500 В емкостью C_2 = 666 пФ, проскакивает искра. Какое количество энергии израсходовано на искру?

Ответ: $W = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \cdot \frac{U^2}{2} = 0{,}3$ мДж .

6.23. Конденсаторы емкостью C_1 = 1 мкФ, C_2 = 2мкФ, C_3 = 3 мкФ включены в цепь с напряжением $\Delta\varphi$ = 1100 В. Определить энергию каждого конденсатора в случае их последовательного и параллельного включения.

Ответ: 0,18; 0,09; 0,06 – последовательно;
0,605; 1,21; 1,815 – параллельно.

6.24. Диэлектрическая пластина толщиной l_2 (рис. 6.11) находится в конденсаторе. Площадь пластин S, разность потенциалов $\Delta\varphi$. Найти силу притяжения между пластинами.

Ответ: $F = \frac{\varepsilon_0 S}{2}\left(\frac{\Delta\varphi \cdot \varepsilon}{l_1\varepsilon + l_2}\right)^2$, $\varepsilon = 1$.

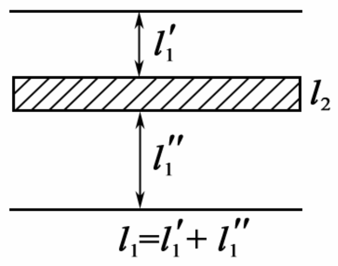


Рис. 6.11

6.25. В цилиндрический конденсатор вводят цилиндрический слой диэлектрика с проницаемостью ε, заполняющий все пространство между обкладками. Средний радиус обкладок равен R, зазор между ними $d \ll R$. Разность потенциалов $\Delta\varphi$. Найти величину силы F, втягивающей диэлектрик в конденсатор.

Ответ: $F = \pi R \varepsilon_0 (\varepsilon - 1)\Delta\varphi^2 / d$.

7. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК. ЗАКОН ОМА. ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ МЕТАЛЛОВ И ПОЛУПРОВОДНИКОВ. ЗАКОНЫ КИРХГОФА

Основные формулы и обозначения

Сила тока $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$,

где Δq – заряд, переносимый через поперечное сечение S проводника за интервал времени Δt.

Сила тока $I = \frac{dq}{dt}$, (если $I \neq \mathrm{const}$),

где dq – бесконечно малое количество заряда, переносимого через поперечное сечение проводника за бесконечно малый интервал времени dt.

Плотность тока $j = \frac{I}{S}$ или $j = |q_0| \cdot n\langle v \rangle$,

где q_0 – заряд, переносимый каждой частицей; n – концентрация частиц; $\langle v \rangle$ – средняя скорость упорядоченного движения частиц.

Закон Ома для участка цепи $I = U/R$, где $U = (\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов или напряжение на данном участке; R – его сопротивление.

Сопротивление проводника длиной l с постоянной площадью поперечного сечения S

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где ρ – удельное сопротивление.

Зависимость удельного сопротивления ρ от температуры

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t^\circ) \text{ или } \rho = \rho_0(1 + \alpha \Delta T).$$

Здесь: ρ_0 – удельное сопротивление материала проводника при $t^\circ = 0$ °C, т.е. при $T_0 = 273$ К; $\Delta T = T - T_0$; α – температурный коэффициент сопротивления, $[\alpha] = \text{град}^{-1}$ или $[\alpha] = \text{К}^{-1}$ (t°, T – температура проводника в градусах по шкале Цельсия и шкале Кельвина, соответственно).

Сопротивление цепи при последовательном соединении

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i.$$

Сопротивление цепи при параллельном соединении

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}.$$

Закон Ома в дифференциальной форме

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E},$$

где $\sigma = 1/\rho$ – удельная электропроводность проводника, $[\sigma] = \text{Ом}^{-1}\cdot\text{м}^{-1}$ = = См/м (сименс/метр); $\mathbf{E}$ – напряженность электрического поля в точке проводника, для которой плотность тока $\mathbf{j}$.

Закон Ома по классической электронной теории

$$\mathbf{j} = \frac{ne^2\tau}{2m_e}\mathbf{E},$$

где $\sigma = ne^2\tau/(2m_e)$; n – концентрация электронов; e – элементарный заряд; τ – время свободного пробега электронов.

По квантовой теории электропроводности металлов

$$\sigma = \frac{ne^2\langle\lambda\rangle}{m_e u_0},$$

где u_0 – скорость электрона, находящегося на верхнем занятом энергетическом уровне; $\langle\lambda\rangle$ – средняя длина свободного пробега электрона.

Удельная электропроводность собственных полупроводников

$$\sigma = en(b_n + b_p),$$

где n – концентрация носителей заряда (электронов и дырок); b_n и b_p – подвижность электронов и дырок, соответственно, $[b_\pm] = \text{м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$.

Закон Ома для замкнутой цепи $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R + r}$,

где r – внутреннее сопротивление источника; R – внешнее сопротивление; $\mathcal{E}$ – электродвижущая сила (ЭДС), равная работе сторонних сил над единичным положительным зарядом, $[\mathcal{E}] = B$.

Ток короткого замыкания

$$I_{\text{КЗ}} = \mathcal{E}/r.$$

Если цепь содержит несколько последовательно соединенных элементов с ЭДС $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$, то полная ЭДС цепи равна алгебраической сумме ЭДС отдельных элементов (рис. 7.1).

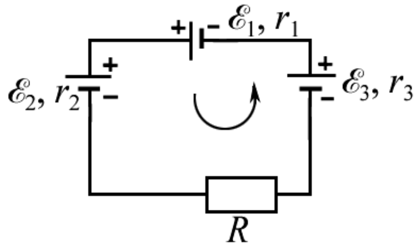


Рис. 7.1

Выбрав (произвольно) положительное направление обхода контура, принимают, что если при обходе цепи переходят от отрицательного полюса источника к положительному, $\mathcal{E} > 0$; если же при обходе цепи переходят от положительного полюса источника к отрицательному, то $\mathcal{E} < 0$. Для цепи, изображенной на рис. 7.1:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3.$$

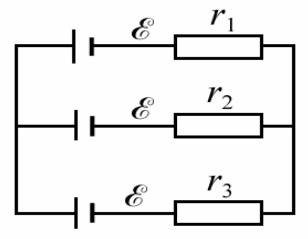


Рис. 7.2

Для рис. 7.2 ЭДС батареи равна $\mathcal{E}$, а внутреннее сопротивление батареи определяется по обычному правилу для параллельного соединения проводников:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}, \quad r=\frac{r_1r_2r_3}{r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3}.$$

Правила Кирхгофа. Общие указания

При решении задач на законы постоянного тока рекомендуется придерживаться следующих правил:

1. При вычислении общего сопротивления какого-либо контура, составленного из нескольких соединенных между собой проводников, следует установить, какие проводники соединены последовательно, а какие параллельно. Если такие соединения найдутся, их следует заменить одним эквивалентным сопротивлением и получить упрощенную схему.

2. Существуют схемы, в которых невозможно найти хотя бы два проводника, соединенных между собой последовательно или параллельно. В этом случае для вычисления общего сопротивления сложного соединения нужно попытаться найти в схеме точки, имеющие одинаковый потенциал. Такие точки имеются в схемах с симметрично расположенными сопротивлениями, либо в схемах, обладающих осью или плоскостью симметрии относительно точек подключения питания. Эти точки нужно либо разъединить (если они соединены), выбросив соединяющие их проводники, либо соединить (если они разъединены). Режимы токов от этого не нарушаются, так как между такими точками ток отсутствует. В результате этих действий получается эквивалентная схема, составленная из параллельно и последовательно соединенных сопротивлений.

3. В общем случае может оказаться, что в схеме нет ни последовательно, ни параллельно соединенных проводников, а также и точек с равными потенциалами. В этом случае поступают следующим образом. Проставляют токи на каждом сопротивлении и указывают их предполагаемое направление. Составляют уравнение токов для каждой точки разветвления (узла) (первое правило Кирхгофа). К полученной системе уравнений для токов добавляют систему уравнений, основанных на том, что работа по перемещению заряда между точками подключения контура не зависит от формы пути. А это значит, что падение напряжения между точками подключения контура $IR_{общ}$ (I – ток, подводимый к кон-

туру; $R_{\text{общ}}$ – общее сопротивление цепи) должно равняться сумме падений напряжений $I_i R_i$ на каждом сопротивлении R_i, по которому течет ток I_i, вдоль возможного пути прохождения заряда между точками подключения контура:

$$IR_{\text{общ}} = I_1 R_1 + I_2 R_2 + \ldots + I_n R_n = \sum_{i=1}^{n} I_i R_i .$$

Если ток I_i идет в направлении, противоположном общему току, то падение напряжения на этом проводнике берется со знаком «минус»; в остальных случаях – со знаком «плюс».

Решая полученные системы уравнений для токов и падений напряжений путем исключения из них всех токов, находят $R_{\text{общ}}$.

4. При решении задач на определение силы тока, напряжения или сопротивления на каком-либо участке цепи надо начертить схему, расставить токи на каждом участке цепи, составить уравнения токов для каждого узла и уравнения, связывающие напряжения на участках цепи. Затем, используя формулы, установить связь между токами, напряжениями и ЭДС. Полученную систему уравнений решить относительно искомой величины.

Расчет разветвленных цепей удобно производить по правилам, предложенным Кирхгофом.

Правила Кирхгофа

1. Первое правило Кирхгофа. Сумма сил токов, притекающих к узлу, равна сумме сил токов, оттекающих от него, или, что то же самое, алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, равна нулю, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0,$$

где n – число токов. Токи, подходящие к узлу, считают положительными, а отходящие от узла – отрицательными.

2. Второе правило Кирхгофа. В любом произвольно выбранном замкнутом контуре разветвленной цепи алгебраическая сумма падений напряжений на отдельных участках этого контура равна алгебраической сумме ЭДС, включенных в этот контур,

$$\sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{E}_i ,$$

где n – число токов, встречающихся при обходе контура; k – число ЭДС в этом контуре.

Выбор направления обхода контура произволен, причем токи, совпадающие с направлением обхода, считаются положительными, несовпадающие – отрицательными. ЭДС считается положительной, если она повышает потенциал в направлении обхода.

Задачи с решениями

Задача 1. Сила тока в проводнике изменяется со временем по закону $I = I_m \sin\omega t$. Определите величину заряда q, переносимого через поперечное сечение проводника за половину периода T, если максимальная сила тока $I_m = 10$ А, циклическая частота $\omega = 50\pi$ с$^{-1}$.

Дано:
$I_m = 10$ А
$\omega = 50\pi$ с$^{-1}$
$t = T/2$

q – ?

Решение: Используя соотношение $I = dq/dt$ или $dq = Idt$, запишем

$$q = \int_0^t dq = \int_0^t Idt = \int_0^t I_m \sin\omega t\, dt = -\frac{I_m}{\omega}\cos\omega t.$$

При $t = \dfrac{T}{2} = \dfrac{2\pi}{2\omega} = \dfrac{\pi}{\omega}$, $q = -\dfrac{I_m}{\omega}\cos\omega\cdot\dfrac{\pi}{\omega} = \dfrac{I_m}{\omega} = \dfrac{10}{50\pi} = 0{,}064$ Кл.

Ответ: $q = 64$ мКл.

Задача 2. В медном проводнике, сечение S которого равно 2 мм^2, протекает ток $I = 5$ А. Приняв, что на каждый атом меди приходится два электрона проводимости, определите среднюю скорость $\langle v\rangle$ упорядоченного движения электронов в проводнике.

Дано:
$S = 2\cdot10^{-6}$ м^2
$I = 5$ А
$z = 2$
$e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл
$\mu_{Cu} = 0{,}064$ кг/моль
$d_{Cu} = 8{,}93\cdot10^3$ кг/м^3

$\langle v\rangle$ – ?

Решение: Ток в проводнике

$$I = jS = en\langle v\rangle S,$$

откуда $$\langle v\rangle = \frac{I}{enS}.$$

Концентрация носителей тока

$$n = z\frac{N}{V} = z\frac{m}{\mu_{Cu}}\cdot\frac{N_A}{V}.$$

Здесь: z – валентность меди; N – число атомов меди в данной массе m; $m = d_{Cu}V$ (d_{Cu} – плотность меди; V – объем проводника); μ_{Cu} – молярная масса меди; N_A – число Авогадро.

Таким образом, $$n = z\frac{d_{Cu}VN_A}{\mu_{Cu}V} = z\frac{d_{Cu}N_A}{\mu_{Cu}};$$

$$\langle v\rangle = \frac{\mu_{Cu}I}{ezd_{Cu}N_A S} = \frac{0{,}064\cdot5}{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot2\cdot8{,}93\cdot10^3\cdot6\cdot10^{23}\cdot2\cdot10^{-6}} = 9{,}3\cdot10^{-5}\text{ м/с}.$$

Ответ: $\langle v\rangle = 93$ мкм/с.

Задача 3. На сколько изменится сопротивление электрической линии при изменении условий в результате перехода от зимнего времени к летнему, если она проложена железным проводом с поперечным сечением 10 мм^2. Температура воздуха изменяется от t_1 = –30 °C (зимой) до t_2 = 30 °C (летом). Длина провода (зимой) 100 км, удельное сопротивление железа при t_1 = –30 °C (зимой) ρ_1 = 0,087 мкОм·м, температурный коэффициент сопротивления железа $\alpha = 6\cdot10^{-3}$ К$^{-1}$. Тепловым удлинением линии пренебречь.

Дано:
$l = 10^5$ м
$S = 10^{-5}$ м^2
$t_1 = -30$ °C
$t_2 = 30$ °C
$\rho_1 = 8{,}7\cdot10^{-8}$ Ом·м
$\alpha = 6\cdot10^{-3}$ К$^{-1}$
ΔR – ?

Решение: Зависимость удельного сопротивления от температуры определяется уравнением

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t),$$

где ρ – удельное сопротивление при данной температуре t.

По условию удельное сопротивление при t_1 равно ρ_1, тогда $\rho_1 = \rho_0(1 + \alpha t_1)$ и, следовательно, удельное сопротивление при t = 0 °C:

$$\rho_0 = \frac{\rho_1}{1+\alpha t_1} = \frac{8,7\cdot10^{-8}}{1-6\cdot10^{-3}\cdot30} = 1,06\cdot10^{-7}\ \text{Ом}\cdot\text{м}.$$

Сопротивления в зимних условиях R_1 и в летних условиях R_2, соответственно, равны

$$R_1 = \rho_0\frac{l}{S}(1+\alpha t_1); \quad R_2 = \rho_0\frac{l}{S}(1+\alpha t_2);$$

$$\Delta R = R_2 - R_1 = \rho_0\frac{l}{S}(1+\alpha t_2 - 1 - \alpha t_1) = \rho_0\frac{l}{S}\alpha(t_2 - t_1).$$

Подставляя числовые значения, получим

$$\Delta R = 1,06\cdot10^{-7}\frac{10^5}{10^{-5}}\cdot6\cdot10^{-3}\cdot60 = 382\ \text{Ом}.$$

Таким образом, в летних условиях сопротивление провода больше на 382 Ом по сравнению с зимними условиями.

Ответ: ΔR = 382 Ом.

Задача 4. Определите температурный коэффициент сопротивления провода α, составленного из алюминиевой проволоки с сопротивлением R_1 = 3 Ом и железной проволоки с сопротивлением R_2 = 2 Ом, соединенных последовательно. Сопротивление проволок определено при температуре 0 °C.

Дано:	
$R_1 = 3$ Ом	
$R_2 = 2$ Ом	
$\alpha_1 = 0{,}004\ \text{К}^{-1}$	
$\alpha_2 = 0{,}006\ \text{К}^{-1}$	
α – ?	

Решение: При температуре 0 °С общее сопротивление алюминиевого и железного провода будет равно $R_0 = R_1 + R_2$.

При температуре t сопротивление тех же проводов будет равно

$$R = R_1' + R_2' = R_1(1+\alpha_1 t) + R_2(1+\alpha_2 t) =$$

$$= R_1 + R_1\alpha_1 t + R_2 + R_2\alpha_2 t = R_0 + R_1\alpha_1 t + R_2\alpha_2 t.$$

С другой стороны, $R = R_0(1 + \alpha t) = R_0 + R_0\alpha t.$

Тогда $R_0 + R_1\alpha_1 t + R_2\alpha_2 t = R_0 + R_0\alpha t,$

откуда
$$\alpha = \frac{(R_1\alpha_1 + R_2\alpha_2)t}{R_0 t} = \frac{R_1\alpha_1 + R_2\alpha_2}{R_1 + R_2};$$

$$\alpha = \frac{3\cdot 4\cdot 10^{-3} + 2\cdot 6\cdot 10^{-3}}{3+2} = 4{,}8\cdot 10^{-3}\ \text{К}^{-1}.$$

Ответ: $\alpha = 4{,}8\cdot 10^{-3}\ \text{К}^{-1}$.

Задача 5. Определите сопротивление R цилиндрического медного проводника, на одном конце которого поддерживается температура $t_1 = 40$ °С, а на другом $t_2 = 500$ °С, считая градиент температуры вдоль его оси постоянным, если при $t = 0$ °С сопротивление проводника $R_0 = 20$ Ом. Температурный коэффициент сопротивления для медного проводника $\alpha = 4{,}2\cdot 10^{-3}\ \text{К}^{-1}$.

Дано:	
$R_0 = 20$ Ом	
$t_1 = 40$ °С	
$t_2 = 500$ °С	
$\alpha = 4{,}2\cdot 10^{-3}\ \text{К}^{-1}$	
$dT/dx = \text{const}$	
R – ?	

Решение: Разбиваем весь проводник на элементарные бесконечно малые участки длиной dx (рис. 7.3), в пределах каждого из которых температуру можно считать постоянной ($T = \text{const}$). Тогда для каждого такого участка сопротивление dR будет определяться так:

$$dR = \rho\frac{dx}{S},\ \text{где}\ \rho = \rho_0\left(1 + \alpha\Delta T_1 + \alpha\frac{dT}{dx}x\right).$$

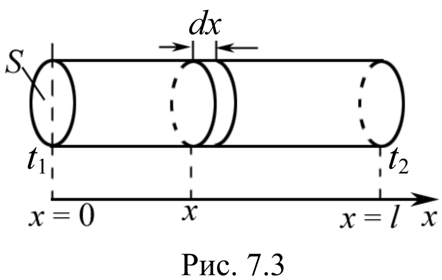


Рис. 7.3

Здесь: $\Delta T_1 = \Delta t_1 = 40$ °С – 0 °С = 40 К; x – координата (на длине проводника) данного участка длиной dx относительно выбранного начала отсчета (рис. 7.3), а именно конца проводника, поддерживаемого при $t_1 = 40$ °С.

Так как $dT/dx = \text{const}$, то

$$\frac{dT}{dx} = \frac{t_2 - t_1}{l} = \frac{\Delta t}{l} = \frac{\Delta T}{l},$$

где $\Delta T = T_2 - T_1 = t_2 - t_1 = 460$ К.

Таким образом, сопротивление всего проводника

$$R = \int_0^l dR = \int_0^l \rho \frac{dx}{S} = \int_0^l \frac{\rho_0}{S}\left(1 + \alpha\Delta T_1 + \alpha\frac{\Delta T}{l}x\right)dx.$$

Так как $R_0 = \rho_0 l/S$, то $S = \rho_0 l/R_0$, тогда

$$R = \int_0^l \frac{R_0}{l}\left(1 + \alpha\Delta T_1 + \alpha\frac{\Delta T}{l}x\right)dx = \frac{R_0}{l}\int_0^l dx + \frac{R_0}{l}\alpha\Delta T_1\int_0^l dx + \frac{R_0}{l}\frac{\Delta T}{l}\alpha\int_0^l x dx =$$

$$= R_0 + R_0\alpha\Delta T_1 + \frac{R_0\alpha\Delta T}{l^2}\cdot\frac{l^2}{2} = R_0 + R_0\alpha\Delta T_1 + R_0\alpha\frac{\Delta T}{2}.$$

$$R = R_0\left[1 + \alpha\left(\Delta T_1 + \frac{\Delta T}{2}\right)\right] = 20\left[1 + 4{,}2\cdot 10^{-3}\left(40 + \frac{460}{2}\right)\right] \approx 42{,}7 \text{ Ом}.$$

Ответ: $R = 42{,}7$ Ом.

Задача 6. Найдите сопротивление $R_{\text{общ}}$ цепи, изображенной на рис. 7.4.

Решение: Рассматривая схему (рис. 7.4.), легко видеть, что точки d и b имеют одинаковый потенциал. Действительно, если пропустить ток в направлении $a \to c$, то в точке a он разделится на два равных тока в направлении $a \to d \to c$ и $a \to b \to c$; тогда будут одинаковыми и падения напряжения на сопротивлениях r.

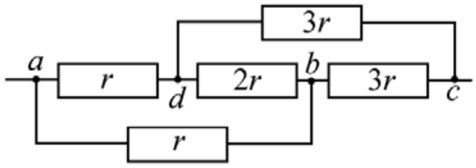


Рис. 7.4

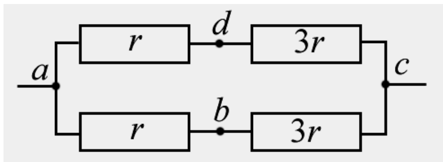


Рис. 7.5

Разность потенциалов между точками b и d равна нулю, и, следовательно, ток через сопротивление $2r$ не идет. Эти точки можно разъединить (или закоротить), выбросив проводник $2r$, не нарушая режима тока в цепи.

В результате получим эквивалентную схему, изображенную на рис. 7.5. Общее сопротивление всей цепи $R_{\text{общ}} = (r + 3r)/2 = 2r$.

Ответ: $R_{\text{общ}} = 2r$.

Задача 7. Определите сопротивление всей цепи, изображенной на рисунке 7.6.

Решение: Схема несимметрична и для нахождения сопротивления воспользуемся указаниями п. 3.

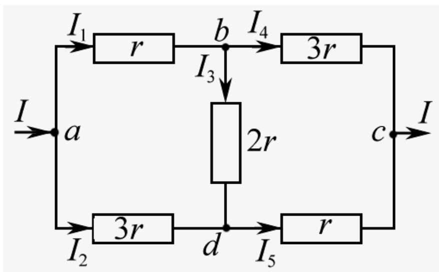


Рис. 7.6

Пусть к узлу a подходит ток I и далее разветвляется так, как указано на рисунке.

Составим уравнения для токов:

узел a $\quad I = I_1 + I_2;$ (1)

узел b $\quad I_1 = I_3 + I_4;$ (2)

узел c $\quad I = I_4 + I_5;$ (3)

узел d $\quad I_5 = I_2 + I_3.$ (4)

Составим уравнения для падений напряжений:

вдоль пути abc $\quad IR_{\text{общ}} = I_1 \cdot r + I_4 \cdot 3r;$ (5)

вдоль пути adc $\quad IR_{\text{общ}} = I_2 \cdot 3r + I_5 \cdot r;$ (6)

вдоль пути $abdc$ $\quad IR_{\text{общ}} = I_1 \cdot r + I_3 \cdot 2r + I_5 \cdot r;$ (7)

вдоль пути $adbc$ $\quad IR_{\text{общ}} = I_2 \cdot 3r - I_3 \cdot 2r + I_4 \cdot 3r.$ (8)

Используя семь из 8 приведенных уравнений, найдем

$$R_{\text{общ}} = \frac{14}{5} r.$$

Примечание. Одно из 4-х уравнений для токов нужно удалить, т.к. число уравнений должно быть на единицу меньше, чем число узлов.

Ответ: $R_{\text{общ}} = 2{,}8r$.

Задача 8. Два элемента соединены «навстречу» друг другу (рис. 7.7). Определите разность потенциалов между точками A и B (на зажимах батареи), если ЭДС $\mathcal{E}_1 = 1{,}4$ В, $r_1 = 0{,}4$ Ом, $\mathcal{E}_2 = 1{,}8$ В, $r_2 = 0{,}6$ Ом.

Дано:
$\mathcal{E}_1 = 1{,}4$ В
$\mathcal{E}_2 = 1{,}8$ В
$r_1 = 0{,}4$ Ом
$r_2 = 0{,}6$ Ом
$(\varphi_A - \varphi_B)$ – ?

Решение: При наличии ЭДС в цепи (неоднородный участок) $\quad \mathcal{E} = \varphi_2 - \varphi_1 + IR.$

(Если $\mathcal{E} = 0$, то $U = IR = \varphi_1 - \varphi_2$).

В применении к участку $A\mathcal{E}_2B$ эту формулу можно записать $\quad \mathcal{E}_2 = \varphi_B - \varphi_A + Ir_2.$

Отсюда $\quad I = [(\varphi_A - \varphi_B) + \mathcal{E}_2]/r_2.$

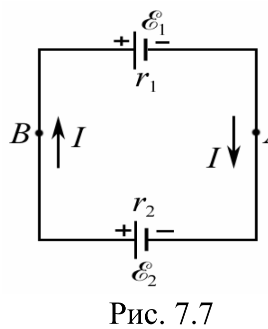


Рис. 7.7

Для участка $B\mathcal{E}_1A$ имеем

$$I = \frac{(\varphi_B - \varphi_A) - \mathcal{E}_1}{r_1} = -\frac{(\varphi_A - \varphi_B) + \mathcal{E}_1}{r_1}.$$

Тогда $\quad \dfrac{(\varphi_A - \varphi_B) + \mathcal{E}_2}{r_2} = -\dfrac{(\varphi_A - \varphi_B) + \mathcal{E}_1}{r_1}$, откуда

$$\varphi_A - \varphi_B = -\frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2} = -\frac{1{,}4 \cdot 0{,}6 + 1{,}8 \cdot 0{,}4}{0{,}4 + 0{,}6} = -1{,}56 \text{ В}.$$

Знак «минус» показывает, что потенциал точки A ниже, чем потенциал точки B.

Ответ: $\varphi_A - \varphi_B = -1{,}56$ В.

Альтернативное решение. Применим второе правило Кирхгофа

$$I(r_1+r_2)=\mathcal{E}_2-\mathcal{E}_1.\ \text{Тогда}\ I=(\mathcal{E}_2-\mathcal{E}_1)/(r_1+r_2)=0{,}4\ \text{А}.$$

Так как $(\varphi_B-\varphi_A)+Ir_2=\mathcal{E}_2$, то

$$\varphi_A-\varphi_B=Ir_2-\mathcal{E}_2=0{,}4\cdot 0{,}6-1{,}8=-1{,}56\ \text{В}.$$

Задача 9. При подключении к гальванометру G последовательно сопротивления R_1 = 350 Ом и при пропускании тока стрелка гальванометра отклоняется на всю шкалу. Затем параллельно с гальванометром вводится шунт $R_\text{ш}$ = 10 Ом (рис. 7.8). Тогда, чтобы получить прежнее отклонение стрелки гальванометра, надо вместо R_1 взять меньшее сопротивление R_2 = 100 Ом. Определите сопротивление гальванометра $R_\text{г}$, пренебрегая внутренним сопротивлением источника тока.

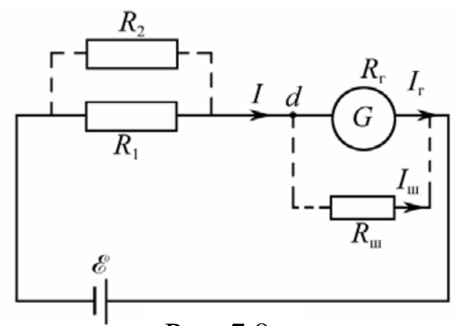


Рис. 7.8

Дано:
R_1 = 350 Ом
$R_\text{ш}$ = 10 Ом
R_2 = 100 Ом
$R_\text{г}$ – ?

Решение: В первом случае ток через гальванометр будет равен $I_\text{г}=\dfrac{\mathcal{E}}{R_1+R_\text{г}}$.

Во втором случае шунт и гальванометр включены параллельно, поэтому $U_\text{ш}=U_\text{г}$, и, следовательно,

$$\frac{I_\text{г}}{I_\text{ш}}=\frac{R_\text{ш}}{R_\text{г}},$$

где $I_\text{ш}$ – ток через шунт.

Эквивалентное сопротивление участка цепи, содержащего шунт и гальванометр, $R_\text{э}=\dfrac{R_\text{г}R_\text{ш}}{R_\text{г}+R_\text{ш}}$.

Рассматривая во втором случае точку d как узел, можно записать

$$I=I_\text{г}+I_\text{ш},$$

или

$$I=I_\text{г}+\frac{I_\text{г}R_\text{г}}{R_\text{ш}}=I_\text{г}\left(1+\frac{R_\text{г}}{R_\text{ш}}\right)=\frac{\mathcal{E}}{R_1+R_\text{г}}\left(1+\frac{R_\text{г}}{R_\text{ш}}\right).$$

С другой стороны, $I=\dfrac{\mathcal{E}}{R_2+R_\text{э}}=\dfrac{\mathcal{E}}{R_2+R_\text{г}R_\text{ш}/(R_\text{г}+R_\text{ш})}$.

Тогда

$$\frac{\mathcal{E}}{R_1+R_\text{г}}\left(1+\frac{R_\text{г}}{R_\text{ш}}\right)=\frac{\mathcal{E}}{R_2+R_\text{г}R_\text{ш}/(R_\text{г}+R_\text{ш})}.$$

Решая это равенство относительно $R_\text{г}$, найдем

$$R_\text{г} = \frac{R_1 - R_2}{R_2} \cdot R_\text{ш} = \frac{350 - 100}{100} \cdot 10 = 25\ \text{Ом}.$$

Ответ: $R_\text{г} = 25$ Ом.

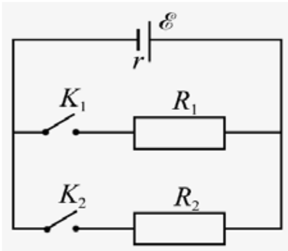


Рис. 7.9

Задача 10. Определите внутреннее сопротивление элемента, если известно, что при замыкании внешней цепи сопротивлением $R_1 = 2$ Ом через элемент идет ток $I_1 = 1$ А, а при соединении параллельно с этим сопротивлением нового сопротивления $R_2 = 8$ Ом – ток $I_2 = 1{,}2$ А (рис. 7.9).

Дано:
$R_1 = 2$ Ом
$I_1 = 1$ А
$R_2 = 8$ Ом
$I_2 = 1{,}2$ А

r – ?

Решение: При замыкании цепи ключом K_1 ток в цепи

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r}.$$

При замкнутых ключах K_1 и K_2 ток в цепи

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 R_2 / (R_1 + R_2) + r}.$$

Решая полученные равенства относительно r, найдем

$$r = \frac{I_1 R_1 - I_2 \cdot R_1 R_2 / (R_1 + R_2)}{I_2 - I_1} = \frac{1 \cdot 2 - 1{,}2 \cdot 2 \cdot 8/(2+8)}{1{,}2 - 1} = 0{,}4\ \text{Ом}.$$

Ответ: $r = 0{,}4$ Ом.

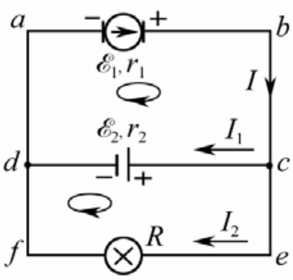


Рис. 7.10

Задача 11. Генератор постоянного тока с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 12$ В и внутренним сопротивлением $r_1 = 0{,}1$ Ом заряжает аккумуляторную батарею с ЭДС $\mathcal{E}_2 = 10$ В и внутренним сопротивлением $r_2 = 0{,}5$ Ом. Параллельно батарее включена лампочка с сопротивлением $R = 3$ Ом. Определите ток в батарее аккумуляторов и в лампочке.

Дано:
$\mathcal{E}_1 = 12$ В
$r_1 = 0{,}1$ Ом
$\mathcal{E}_2 = 10$ В
$r_2 = 0{,}5$ Ом
$R = 3$ Ом

I_1 – ? I_2 – ?

Решение: Решим данную задачу, применяя правила Кирхгофа. Выберем обход контуров по часовой стрелке. Направление токов предположим таким, как указано на рис. 7.10.

Применяя правило I для узла c, можно записать

$$I = I_1 + I_2. \qquad (1)$$

Применяя правило II для контура $abcd$, запишем

$$I r_1 + I_1 r_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2, \qquad (2)$$

а для контура $cefd$

$$I_2 R - I_1 r_2 = \mathcal{E}_2. \qquad (3)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), получим

$$(I_1 + I_2)\, r_1 + I_1 r_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2,$$

отсюда

$$I_2 = \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) - I_1(r_1 + r_2)}{r_1}. \qquad (4)$$

Подставляя (4) в равенство (3), будем иметь

$$\frac{\left[(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) - I_1(r_1 + r_2)\right]R}{r_1} - I_1 r_2 = \mathcal{E}_2,$$

откуда

$$I_1 = \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)R - \mathcal{E}_2 r_1}{(r_1 + r_2)R + r_1 r_2}. \qquad (5)$$

Согласно (5) и (4) имеем

$$I_1 = \frac{(12-10)\cdot 3 - 10\cdot 0{,}1}{(0{,}1+0{,}5)\cdot 3 + 0{,}1\cdot 0{,}5} = 2{,}7 \text{ А}; \qquad I_2 = \frac{(12-10) - 2{,}7\cdot(0{,}5+0{,}1)}{0{,}1} = 3{,}8 \text{ А}.$$

Ответ: I_1 = 2,7 А; I_2 = 3,8 А.

Задачи для самостоятельной работы

7.1. Разность потенциалов на концах отрезка медной проволоки в электрической цепи U = 10 В. Определите плотность тока j на этом участке цепи, если длина отрезка l = 5 м.

Ответ: $j = U/(\rho_{Cu} l) \approx 1{,}2\cdot 10^8$ А/м^2.

7.2. Сколько электронов N проходит в единицу времени через единицу площади поперечного сечения алюминиевой проволоки длиной l = 10 м, если разность потенциалов на ее концах U = 9 В.

Ответ: $N = U/(e\rho_{Al} l) = 2\cdot 10^{26}$ м$^{-2}$·с$^{-1}$.

7.3. Определите среднюю скорость $\langle v\rangle$ упорядоченного движения электронов в медном проводнике, площадь поперечного сечения которого S = 1 мм^2, при силе тока I = 10 А, приняв, что на каждый атом меди приходится z = 2 электрона проводимости.

Ответ: $\langle v\rangle = \dfrac{\mu_{Cu} I}{zeSd_{Cu}N_A} = 0{,}37$ мм/с, где d_{Cu} – плотность меди.

7.4. В ускорителе пучок частиц движется по круговой орбите радиусом R = 0,5 м со скоростью v = 1,5·10^7 м/с. Величина среднего тока, создаваемого пучком, I = 15 мкА. Определите заряд пучка.

Ответ: $q = 2\pi RI/v$ = 3,14 пКл.

7.5. Расстояние l от источника тока до нагрузки, потребляющей ток I = 2 А, составляет 5 км. Определите минимальную площадь сечения медных проводов, если потери напряжения в линии при $t°$ = 20 °С не должны превышать значения ΔU = 1 В.

Ответ: $S_{min} = 2I\rho_0(1 + \alpha t°)l/\Delta U$ = 369 мм^2.

7.6. С помощью гальванометра с чувствительностью i_0 = 10 мкА/дел (т.е. i_0 – сила тока, соответствующая одному делению шкалы гальванометра) необходимо измерить сопротивление цепи, работающей от сети с напряжением U = 220 В. Как следует включить гальванометр, чтобы с его помощью измерять сопротивление цепи (дайте пояснения)? Укажите, как определяется сопротивление R_k, соответствующее данному показанию по шкале гальванометра, где k – номер деления шкалы. Какое наименьшее сопротивление цепи можно измерить таким гальванометром, если его шкала имеет n = 50 делений? (Внутренним сопротивлением прибора пренебречь).

Ответ: Гальванометр следует включить в цепь последовательно с измеряемым сопротивлением; $R_k = U/(i_0 k)$; $R_{\min} = U/(i_0 n) = 0{,}44$ МОм.

7.7. Вольтметр с внутренним сопротивлением $R_в$ = 0,2 кОм подключен к участку цепи с сопротивлением R = 25 Ом, при этом напряжение на вольтметре $U_в$ = 200 В (рис. 7.11). Оцените погрешность ΔU в показаниях вольтметра, а также относительную погрешность $\Delta U/U$, полагая, что ток остается неизменным.

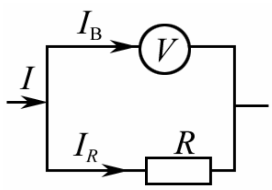


Рис. 7.11

Ответ: $\Delta U = \dfrac{U_в R}{R_в} = 25$ В; $\dfrac{\Delta U}{U} = \dfrac{\Delta U}{U_в\left(1 + R/R_в\right)} \approx 0{,}11.$

7.8. Линия из N = 5 ламп, соединенных между собой одинаковыми проводниками, сопротивление каждого из которых равно r = 0,5 Ом, подсоединена к источнику тока, напряжение которого U_0 = 120 В (рис. 7.12). Полагая, что в результате нагрева нити ток I, потребляемый каждой лампой, не зависит от напряжения на ней и равен 0,3 А, определите сопротивление провода r, при котором напряжение на последней лампе будет составлять $U_N = U_5 = 0{,}8U_0$.

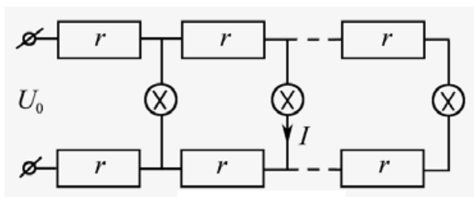


Рис. 7.12

Ответ: $r = 0{,}2U_0 \Big/ \left(2I \cdot \sum\limits_{n=1}^{n=N} n\right) = \dfrac{0{,}2U_0}{I \cdot N(N+1)} = 2{,}67$ Ом.

(где n – номер лампы, отсчитываемый от последней лампы).

7.9. До какой температуры T нагрелась обмотка электромагнита, выполненная из медной проволоки, если ее сопротивление R после длительной работы стало равным 1,8 Ом? Сопротивление R_0 обмотки при 0 °С было равно 1,5 Ом.

Ответ: $T = T_0 + \dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{R}{R_0} - 1\right) \approx 321$ К$\cdot$

7.10. Через поперечное сечение медного проводника диаметром d = 2 мм за время t = 2 мин был перенесен заряд q = 1 Кл. Определите напряженность E электрического поля в проводнике при $t°$ = 20 °С.

Ответ: $E = 4q\rho_0(1 + \alpha t°)/(\pi d^2 t)$ = 49 мкВ/м.

7.11. Используя положения классической электронной теории электропроводности металлов, оцените среднее время свободного пробега $\langle\tau\rangle$ для электронов в меди, если концентрация n электронов проводимости равна 10^{28} м$^{-3}$.

Ответ: $\langle\tau\rangle = \dfrac{m_e\sigma}{ne^2} = \dfrac{m_e}{\rho_{\text{Cu}}ne^2} \approx 0{,}2$ пс.

7.12. Используя выражение для удельной электрической проводимости металлов согласно квантовой теории, оцените величину $\langle\lambda\rangle$, играющую роль среднего свободного пробега электрона, для серебра (по оценке эта величина составляет сотни межузельных расстояний в решетке). Скорость электрона, находящегося на верхнем занятом энергетическом уровне для серебра $u_0 = 1{,}4\cdot10^6$ м/с (при $t°$ = 20 °С); плотность электронного газа $n = 10^{28}$ м$^{-3}$.

Ответ: $\langle\lambda\rangle = \dfrac{m_e u_0}{ne^2\rho_0\left(1+\alpha t°\right)} = 287$ нм.

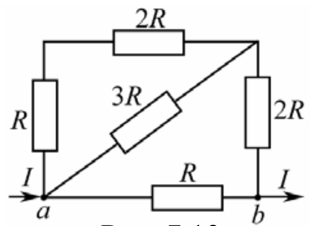


Рис. 7.13

7.13. Определите сопротивление R_{ab} цепи, представленной на рисунке 7.13.

Ответ: $R_{ab} = (7/9)R$.

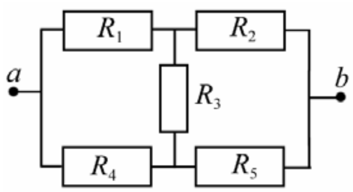


Рис. 7.14

7.14. Определите в цепи, представленной на рисунке 7.14, сопротивление R_{ab} между точками a и b, если $R_1 = R_5$ = 10 Ом, а $R_2 = R_3 = R_4$ = = 5 Ом. (При решении используйте симметрию ветвей около точек a и b, принимая во внимание заданные значения сопротивлений).

Ответ: R_{ab} = 7 Ом.

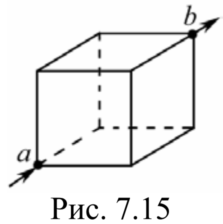


Рис. 7.15

7.15. Проволочный куб составлен из проводников. Сопротивление R_0 каждого проводника, составляющего ребро куба, равно 12 Ом. Определите сопротивление R этого куба, если он включен в электрическую цепь так, как показано на рис. 7.15.

Ответ: $R = (5/6)R_0$ = 10 Ом.

7.16. Сила тока в проводнике нарастает по закону $I = \alpha t^2$, где α = 3 А/с^2. Определите заряд q, прошедший через поперечное сечение проводника за время t_1 = 5 с.

Ответ: $q = \alpha t_1^2/3$ = 125 Кл.

7.17. В схеме (рис. 7.16) сопротивление вольтметра $R_в$ = 5 кОм, а сопротивление амперметра R_A = 2 Ом. Определите относительную погрешность, допускаемую при измерении с помощью данной схемы сопротивления R = 1 кОм.

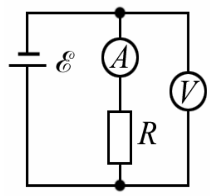


Рис. 7.16

Ответ: $\delta = R_A/(R + R_A) = 2\cdot10^{-3}$.

7.18. Амперметр и реостаты с сопротивлениями R_1 и R_2 соединены последовательно и подключены к батарее с ЭДС $\mathcal{E}$ = 20 В (рис. 7.17). При выведенном реостате R_1 амперметр показывает ток I_1 = 8 А, а при введенном реостате R_1 ток I_2 = 5 А. Определите сопротивления R_1 и R_2 реостатов и падения потенциала U_1 и U_2 на них, когда реостат R_1 полностью включен.

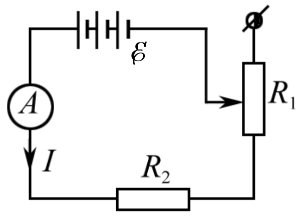


Рис. 7.17

Ответ: $R_2 = \mathcal{E}/I_1$ = 2,5 Ом; $R_1 = R_2(I_1 - I_2)/I_2$ = 1,5 Ом; $U_1 = I_2R_1$ = 7,5 В; $U_2 = I_2R_2$ = 12,5 В.

7.19. В приведенной схеме (рис. 7.18) $R_1 = R_2 = r$, где r – внутреннее сопротивление источника ЭДС; расстояние между пластинами конденсатора d = 4 мм. Определите, какой должна быть ЭДС батареи в данной схеме, чтобы напряженность E поля в плоском конденсаторе емкостью C была равна 3 кВ/м.

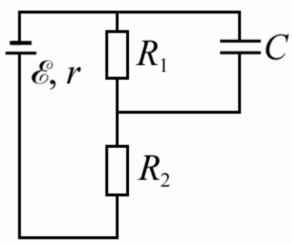


Рис. 7.18

Ответ: $\mathcal{E} = 3Ed$ = 36 В.

7.20. Два последовательно соединенных элемента с одинаковыми ЭДС $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ = 1 В и внутренними сопротивлениями r_1 = 0,5 Ом и r_2 = 1 Ом замкнуты на внешнее сопротивление R = 1 Ом (рис. 7.19). Определите разность потенциалов U на зажимах каждого элемента. Определите также (в общем виде), при каком соотношении между величинами r_1, r_2, R разность потенциалов на зажимах одного из элементов будет равна нулю.

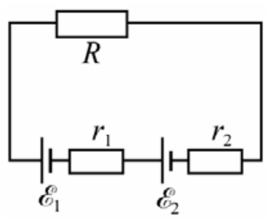


Рис. 7.19

Ответ: $U_1 = \mathcal{E}_1 - \dfrac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)r_1}{R + r_1 + r_2} = 0{,}6$ В; $U_2 = \mathcal{E}_2 - \dfrac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)r_2}{R + r_1 + r_2} = 0{,}2$ В; $\dfrac{R + r_1}{r_2} = \dfrac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2}$.

7.21. При замыкании элемента на сопротивление R_1 = 2,5 Ом сила тока в цепи I_1 = 0,5 А, а при замыкании на сопротивление R_2 = 2 Ом сила тока I_2 = 0,6 А. Определите силу тока короткого замыкания $I_{к.з.}$.

Ответ: $I_{кз} = \dfrac{I_1I_2(R_1 - R_2)}{I_1R_1 - I_2R_2} = 3$ А.

7.22. Два источника тока с ЭДС $\mathscr{E}_1$ = 4 В и $\mathscr{E}_2$ = 3 В включены в цепь так, как показано на рис. 7.20. Определите силу тока I_2 в сопротивлении R_2, если R_1 = 2 Ом, R_2 = 1 Ом, R_3 = 6 Ом, а внутренними сопротивлениями источников можно пренебречь.

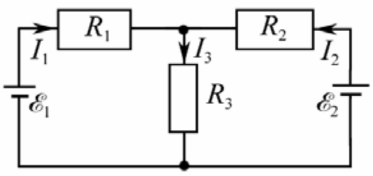


Рис. 7.20

Ответ: $I_2 = \dfrac{\mathscr{E}_2\left(R_1 + R_3\right) - \mathscr{E}_1 R_3}{R_1 R_3 + \left(R_1 + R_3\right) R_2} = 0$.

7.23. Схема, предложенная на рисунке 7.21, содержит источники тока с ЭДС $\mathscr{E}_1$ = 1,4 В и $\mathscr{E}_2$ = 3,6 В и сопротивления R_1 = 5 Ом, R_2 = 1 Ом и R_3 = 3 Ом. Пренебрегая сопротивлениями источников тока, определите ток I_3 в ветви с сопротивлением R_3.

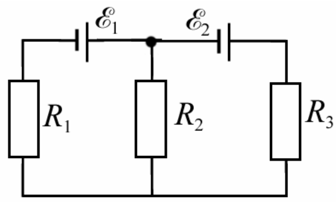


Рис. 7.21

Ответ: $I_3 = \dfrac{\mathscr{E}_2\left(R_1 + R_2\right) - \mathscr{E}_1 R_2}{R_3\left(R_1 + R_2\right) + R_1 R_2} = 1$ А.

7.24. Определите разность потенциалов U_1 и U_2 на конденсаторах C_1 = 2 мкФ и C_2 = 6 мкФ, если ЭДС источников тока равны соответственно $\mathscr{E}_1$ = 10 кВ и $\mathscr{E}_2$ = 11 кВ (рис. 7.22).

Ответ: $U_1 = \dfrac{C_2(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2)}{C_1 + C_2} = 15{,}75$ кВ; $U_2 = \dfrac{C_1(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2)}{C_1 + C_2} = 5{,}25$ кВ.

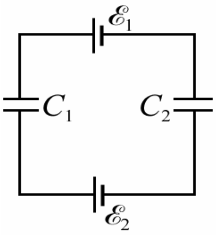


Рис. 7.22

7.25. В схеме (рис. 7.23) ЭДС источника тока $\mathscr{E}$ = = 10 В, его внутреннее сопротивление r = 10 Ом, сопротивления резисторов соответственно R_1 = = 1 кОм и R_2 = 2 кОм. Определите напряжение на конденсаторах с емкостями C_1 = 2 мкФ и C_2 = = 3 мкФ.

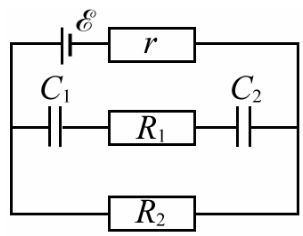


Рис. 7.23

Ответ: $U_1 = \dfrac{R_2 C_2 \mathscr{E}}{(r + R_2)(C_1 + C_2)} = 5{,}97$ В;

$$U_2 = \dfrac{R_2 C_1 \mathscr{E}}{(r + R_2)(C_1 + C_2)} = 3{,}98 \text{ В}.$$

8. РАБОТА И МОЩНОСТЬ ТОКА. ЗАКОН ДЖОУЛЯ – ЛЕНЦА. КОЭФФИЦИЕНТ ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ ИСТОЧНИКА ТОКА

Основные формулы и обозначения

Работа электрического тока силой I на участке цепи за время t

$$A = IUt = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t.$$

где R – сопротивление проводника; U – напряжение на концах участка цепи.

Мощность тока

$$P = \frac{A}{t}, \qquad P = IU = I^2R = \frac{U^2}{R}; \; [P] = \text{Вт (ватт)}.$$

Закон Джоуля – Ленца (при $I = \text{const}$)

$$Q = I^2Rt,$$

где Q – количество теплоты, выделяющейся в проводнике за время t.

Закон Джоуля – Ленца (при $I \neq \text{const}$)

$$Q = \int\limits_{t=0}^{t} I^2(t)R\,dt.$$

Закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме

$$P_{\text{уд}} = jE = \sigma E^2,$$

где $P_{\text{уд}}$ – мощность, выделяемая в единице объема ($[P_{\text{уд}}]$ = Вт/м^3); σ – удельная проводимость; E – напряженность электрического поля.

Мощность, выделяемая во внешней цепи

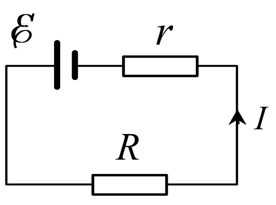


Рис. 8.1

$$P_R = I^2R = \frac{\mathcal{E}^2}{(R+r)^2}R,$$

где $\mathcal{E}$ и r – ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока.

При $R = r$,

$$P_R = P_{R(\max)} = \mathcal{E}\big/(4r).$$

Коэффициент полезного действия источника тока

$$\eta = \frac{P_R}{P_{\text{ист}}} = \frac{I^2R}{\mathcal{E}I} = \frac{\mathcal{E}R}{(R+r)\mathcal{E}} = \frac{R}{R+r}.$$

Задачи с решениями

Задача 1. Тепловая мощность спирали электроплитки линейно зависит от разности температур спирали и комнатного воздуха: $P = k(T - T_0)$, где k – коэффициент пропорциональности. Сопротивление спирали также линейно зависит от разности температур: $R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$, где R_0 – сопротивление спирали при комнатной температуре T_0. Определите, до какой температуры нагревается спираль, если через нее пропустить ток I.

Решение: При заданном токе I мощность, выделяющаяся на сопротивлении R, определится выражением $P = I^2R$ или

$$k(T - T_0) = I^2R_0[1 + \alpha(T - T_0)];$$

$$kT - kT_0 = I^2R_0 + I^2R_0\alpha T - I^2R_0\alpha T_0.$$

Откуда

$$kT - I^2R_0\alpha T = I^2R_0 - I^2R_0\alpha T_0 + kT_0;$$

$$T(k - I^2R_0\alpha) = I^2R_0 + T_0\,(k - I^2R_0\alpha);$$

$$T = T_0 + \frac{I^2R_0}{k - I^2R_0\alpha}.$$

Примечание. В полученном выражении коэффициент пропорциональности k должен быть больше $I^2R_0\alpha$. Если $k < I^2R_0\alpha$, то температура спирали при пропускании тока должна уменьшаться, что противоречит закону Джоуля – Ленца.

Задача 2. Сопротивление электрической линии передачи R = 150 Ом (рис. 8.2). Какое напряжение U_1 должен иметь генератор, чтобы при передаче потребителю мощности P_1 = 50 кВт по этой линии потери в ней не превышали δ = 3 % передаваемой мощности? Сопротивление нагрузки $R_н$.

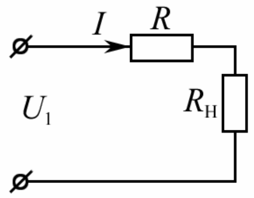


Рис. 8.2

Дано:
R = 150 Ом
$P_1 = 5\cdot10^4$ Вт
$\delta = \Delta P/P_1 = 0{,}03$
U_1 – ?

Решение: Потери мощности в линии передачи составляют

$$\Delta P = P_1\cdot\delta.$$

Мощность, передаваемая потребителю,

$$P_1 = IU_1, \text{ откуда } U_1 = P_1/I.$$

Используя заданное сопротивление линии передачи, $\Delta P = I^2R$.

Откуда $I = \sqrt{\Delta P/R}$, тогда

$$U_1 = \frac{P_1}{I} = \frac{P_1\sqrt{R}}{\sqrt{\Delta P}} = \frac{P_1\sqrt{R}}{\sqrt{P_1\cdot\delta}} = \sqrt{\frac{P_1R}{\delta}} = \sqrt{\frac{5\cdot10^4\cdot150}{0{,}03}} = 1{,}58\cdot10^4 \text{ В}.$$

(При этом потери мощности в линии передачи $\Delta P = 1{,}5\cdot10^3$ Вт.)

Ответ: U_1 = 15,8 кВ.

Задача 3. Электропечь должна за время τ = 10 мин выпарить 1 л воды, взятой при 20 °С. Какова должна быть длина нихромовой проволоки сечением 0,5 мм^2, используемой в качестве нагревателя, если печь предназначена для напряжения 220 В и ее КПД равен 80 %? Зависимостью удельного сопротивления проволоки от температуры пренебречь.

Дано:

$\tau = 600$ с
$\rho = 1\cdot10^{-6}$ Ом·м
$V = 10^{-3}$ м^3
$D = 10^3$ кг/м^3
$t_1 = 20$ °С
$t_2 = 100$ °С
$S = 5\cdot10^{-7}$ м^2
$U = 220$ В
$\eta = 0,8$
$c = 4,19\cdot10^3$ Дж/(К·кг)
$r = 2,26\cdot10^6$ Дж/кг

l – ?

Решение: Коэффициент полезного действия η определяется отношением потребленного количества теплоты Q к величине затраченной за это же время электрической энергии W

$$\eta = Q/W,$$

где $W = \dfrac{U^2}{R}\tau,$ и, следовательно,

$$Q = \eta\frac{U^2}{R}\tau. \qquad (1)$$

Чтобы нагреть воду массой m от температуры t_1 до температуры кипения t_2 = 100 °С и затем обратить ее в пар, требуется количество теплоты

$$Q = cm(t_2 - t_1) + rm, \qquad (2)$$

где c – удельная теплоемкость воды; r – удельная теплота парообразования воды при температуре кипения t_2.

Масса воды

$$m = DV, \qquad (3)$$

где D – плотность воды; V – объем воды.

Для определения длины l проволоки воспользуемся выражением

$$R = \rho\frac{l}{S}. \qquad (4)$$

Решая совместно равенства (1) – (4), получим

$$m\left[c(t_2 - t_1) + r\right] = \eta\frac{U^2 S}{\rho l}\tau,$$

откуда

$$l = \frac{\eta U^2 S\tau}{\rho DV\left[c(t_2 - t_1) + r\right]}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$l = \frac{0,8\cdot220^2\cdot5\cdot10^{-7}\cdot600}{10^{-6}\cdot10^{-3}\cdot10^3\cdot\left[4,19\cdot10^3(100-20) + 2,26\cdot10^6\right]} = 4,48 \text{ м.}$$

Ответ: l = 4,48 м.

Задача 4. Батарея ЭДС, замкнутая на сопротивление 2 Ом, дает ток 1,6 А. Та же батарея, замкнутая на сопротивление 1 Ом, дает ток 2 А. Найдите мощность, которая теряется внутри батареи, и КПД батареи в обоих случаях.

Дано:
$R_1 = 2$ Ом
$I_1 = 1{,}6$ А
$R_2 = 1$ Ом
$I_2 = 2$ А
P_1 – ? P_2 – ?
η_1 – ? η_2 – ?

Решение: Закон Ома для всей цепи в первом и во втором случае будет иметь вид, соответственно,

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r}, \qquad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2 + r}.$$

Решая совместно эти равенства, получим

$$r = \frac{I_1R_1 - I_2R_2}{I_2 - I_1} = 3 \text{ Ом}.$$

Мощность, которая теряется внутри источника в первом случае,

$$P_1 = I_1^2 r = 1{,}6^2 \cdot 3 = 7{,}68 \text{ Вт}.$$

Потеря мощности во втором случае

$$P_2 = I_2^2 r = 2^2 \cdot 3 = 12 \text{ Вт}.$$

КПД в первом случае будет равен

$$\eta_1 = \frac{P_{\text{пол1}}}{P_{\text{затр1}}} = \frac{I_1^2R_1}{I_1\mathcal{E}} = \frac{I_1R_1}{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E}R_1}{(R_1 + r)\mathcal{E}} = \frac{R_1}{R_1 + r} = \frac{2}{2+3} = 0{,}4; \quad \eta_1 = 40\ \%.$$

Здесь $P_{\text{пол}}$ и $P_{\text{затр}}$ – полезная и затраченная мощность в цепи.

КПД во втором случае

$$\eta_2 = \frac{P_{\text{пол2}}}{P_{\text{затр2}}} = \frac{R_2}{R_2 + r} = \frac{1}{1+3} = 0{,}25; \quad \eta_2 = 25\ \%.$$

$$\eta_1 > \eta_2.$$

Ответ: $P_1 = 7{,}68$ Вт; $P_2 = 12$ Вт; $\eta_1 = 40$ %; $\eta_2 = 25$ %.

Задачи для самостоятельной работы

8.1. В сеть параллельно с лампочкой мощностью $P_1 = 40$ Вт включается электронагревательный прибор мощностью $P_2 = 200$ Вт. Определите, на какую величину ΔU изменяется напряжение, подводимое к лампочке, при включении электронагревательного прибора, если напряжение в сети $U_0 = 220$ В, а сопротивление соединительных проводов $r = 5$ Ом.

Ответ: $\Delta U = U_0 r \left(\dfrac{1}{r + U_0^2 / (P_1 + P_2)} - \dfrac{1}{r + U_0^2 / P_1} \right) = 4{,}4$ В.

8.2. Электрическая лампочка с вольфрамовой нитью рассчитана на напряжение $U = 220$ В и потребляет мощность $P = 50$ Вт. Диаметр нити в лампе $d = 0{,}02$ мм. Температура нити при нормальном режиме горения, т.е. накаленной нити, $T = 2700$ К. Определите длину l нити этой лампочки при нормальном режиме горения и силу тока I_1, протекающего в ней в первый момент после включения. Определите также, во сколько раз ток I_1 будет больше тока I при нормальном режиме горения лампочки. Комнатная температура $T_1 = 293$ К. (Зависимостью линейных размеров нити от температуры пренебрегаем.)

Ответ: $l = \dfrac{\pi d^2U^2}{4\rho_0\left[1+\alpha\left(T-T_0\right)\right]P} \approx 0{,}46$ м, где $T_1 = 273$ К;

$$I_1 = \frac{\pi d^2U}{4\rho_0\left[1+\alpha\left(T_1-T_0\right)\right]l} \approx 2{,}8\text{ А}; \quad \frac{I_1}{I} = \frac{1+\alpha\left(T-T_0\right)}{1+\alpha\left(T_1-T_0\right)} \approx 12.$$

8.3. Элемент с ЭДС $\mathcal{E} = 1{,}1$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом замкнут на внешнее сопротивление $R = 9$ Ом. Определите силу тока I в цепи, падение потенциала во внешней цепи U_R, падение потенциала внутри элемента U_r и КПД η элемента.

Ответ: $I = \mathcal{E}/(R + r) = 0{,}11$ А; $U_R = IR = 0{,}99$ В;
$U_r = Ir = 0{,}11$ В; $\eta = R/(R + r) = 0{,}9$.

8.4. Элемент, реостат и амперметр включены последовательно. Элемент имеет ЭДС $\mathcal{E} = 2$ В и внутреннее сопротивление $r = 0{,}4$ Ом. Определите КПД элемента, если амперметр показывает силу тока $I = 1$ А.

Ответ: $\eta = 1 - Ir/\mathcal{E} = 0{,}8$.

8.5. В схему (рис. 8.3) включена батарея с ЭДС $\mathcal{E} = 10$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом. Падение напряжения на сопротивлениях R_1 и R_4 равны, соответственно, $U_1 = 4$ В и $U_4 = 2$ В. Определите, какой ток I показывает амперметр и каково падение напряжения U_3 на сопротивлении R_3, если КПД батареи $\eta = 0{,}8$.

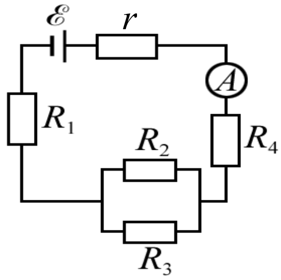


Рис. 8.3

Ответ: $I = (1 - \eta)\mathcal{E}/r = 2$ А; $U_3 = \eta\mathcal{E} - (U_1 + U_4) = 2$ В.

8.6. В схеме мостика Уитстона (рис. 8.4) известны сопротивления $R_1 = 30$ Ом, $R_2 = 45$ Ом и $R_3 = 200$ Ом. Определите мощности, выделяющиеся на каждом из сопротивлений мостика Уитстона, при условии, что ток через гальванометр в диагонали моста отсутствует ($I_Г = 0$), а ЭДС элемента $\mathcal{E} = 2$ В.

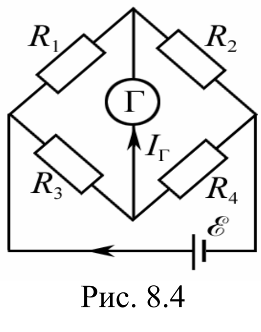


Рис. 8.4

Ответ: $P_1 = 21{,}4$ мВт; $P_2 = 32{,}1$ мВт;
$P_3 = 3{,}2$ мВт; $P_4 = 4{,}8$ мВт.

8.7. Оцените, через какое время τ после короткого замыкания начнет плавиться введенный в сеть предохранитель из свинцовой проволоки сечением S = 0,4 мм^2, если при коротком замыкании сила тока в сети достигает значения $I_{\text{к.з.}}$ = 30 А. Начальная температура проволоки $t_{\text{н}}^{\circ}$ = 20 °С. Потерями тепла вследствие теплопроводности пренебречь.

Ответ: $\tau = \dfrac{c_{\text{Pb}} d_{\text{Pb}} S^2 \left(t_{\text{пл}}^{\circ} - t_{\text{н}}^{\circ}\right)}{I_{\text{к.з.}}^2 \rho_0 \left(1 + \alpha t_{\text{пл}}^{\circ}\right)} = 0{,}18$ с. Здесь c_{Pb}, d_{Pb} и $t_{\text{пл.}}$ – удельная теплоемкость, плотность и температура плавления свинца.

8.8. В схеме (рис. 8.5) сопротивления участков R_1 = 50 Ом, R_2 = 15 Ом и R_3 = 10 Ом, а ЭДС элементов $\mathcal{E}_1$ = 2,5 В и $\mathcal{E}_2$ = 2 В. Определите мощности, выделяющиеся на каждом из сопротивлений. Внутренним сопротивлением источников тока пренебречь.

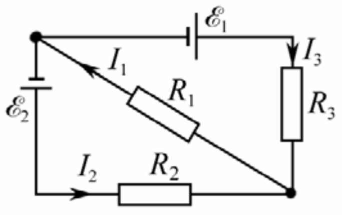


Рис. 8.5

Ответ: P_1 = 84 мВт; P_2 = 1,9 мВт; P_3 = 20 мВт.

8.9. Два источника тока с одинаковыми ЭДС $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ = 4 В и одинаковыми внутренними сопротивлениями $r_1 = r_2$ = 0,5 Ом включены в цепь так, как показано на рис. 8.6. Определите сопротивление R, ток I, текущий через это сопротивление, и выделяющуюся на нем мощность P, если ток, текущий через элемент с ЭДС $\mathcal{E}_2$, I_2 = 2 А.

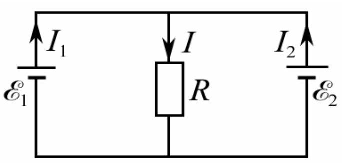


Рис. 8.6

Ответ: R = 0,75 Ом; I = 4 А; P = 12 Вт.

8.10. Источник тока с внутренним сопротивлением r = 0,04 Ом при токе I_1 = 2 А отдает во внешнюю цепь мощность P_1 = 6 Вт. Какая мощность P_2 выделяется во внешней цепи при токе I_2 = 3 А?

Ответ: $P_2 = P_1 I_2 / I_1 - r I_2 (I_2 - I_1) = 8{,}9$ Вт.

8.11. На сопротивлении R_1 = 25 Ом в схеме (рис. 8.7) выделяется мощность P_1 = 16 Вт. Определите, какой ток I показывает амперметр, если ЭДС $\mathcal{E}$ = 100 В, внутреннее сопротивление источника r = 2 Ом, а сопротивление R_3 = 78 Ом.

Ответ: $I = \dfrac{\mathcal{E} - \sqrt{P_1 R_1}}{r + R_3} = 1{,}0$ А.

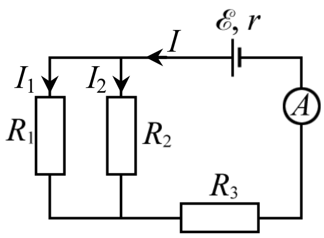


Рис. 8.7

8.12. Какую наибольшую мощность P_{max} можно получить в цепи, подсоединенной к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E}$ = 12 В, если сила тока короткого замыкания $I_{\text{к.з}}$ = 5 А?

Ответ: $P_{max} = \mathcal{E} I_{\text{к.з}}/4$ = 15 Вт.

8.13. К источнику тока с ЭДС $\mathcal{E}$ = 240 В и внутренним сопротивлением r = 1 Ом подключено сопротивление нагрузки R = 23 Ом. Определите мощность, выделяющуюся на сопротивлении нагрузки P, полную мощность P_0 и КПД η источника.

Ответ: $P = \dfrac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2} = 2{,}3\ \text{кВт}$; $P_0 = \dfrac{\mathcal{E}^2}{R+r} = 2{,}4\ \text{кВт}$; $\eta = \dfrac{R}{R+r} = 0{,}96$.

8.14. ЭДС батареи $\mathcal{E}$ = 10 В. Наибольшая сила тока, которую может дать батарея, I_{max} = 5 А. Определите максимальную мощность P_{max}, которая может быть получена во внешней цепи.

Ответ: $P_{max} = \mathcal{E} I_{max}/4$ = 12,5 Вт.

8.15. Какое напряжение U_1 должен иметь генератор, чтобы при передаче по линии с сопротивлением R = 200 Ом мощности P_1 = 30 кВт от генератора к потребителю потери мощности не превышали δ = 0,05 передаваемой мощности?

Ответ: $U_1 = \sqrt{P_1 R/\delta} = 11\ \text{кВ}$.

8.16. На вход линии электропередачи от генератора передается некоторая мощность при напряжении U_1 = 9 кВ, при этом КПД линии передачи равен η_1 = 0,7. Каким нужно сделать напряжение U_2 на линии, чтобы повысить ее КПД до значения η_2 = 0,8 при сохранении неизменной мощности на полезной нагрузке?

Ответ: $U_2 = U_1\sqrt{\dfrac{\eta_2}{\eta_1}\dfrac{(1-\eta_1)}{(1-\eta_2)}} = 11{,}8\cdot 10^3\ \text{В}$.

8.17. В момент времени, принятый за начало отсчета, сила тока в проводнике сопротивлением R = 2 Ом равна нулю, а затем равномерно возрастает. Количество теплоты Q, выделившееся в проводнике за время τ = 10 с, равно 300 Дж. Определите количество электричества Δq, протекшее за это время по проводнику.

Ответ: $\Delta q = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3Q\tau}{R}} = 33{,}5$ Кл.

8.18. Конденсатор емкостью C_1 = 2 мкФ разряжается через резистор сопротивлением R = 100 Ом (рис. 8.8). В тот момент, когда сила тока разряда достигает значения I_0 = 0,1 А, ключ K размыкают. Определите количество теплоты Q, которое выделяется на резисторе начиная с этого момента. Емкость конденсатора C_2 = 1 мкФ.

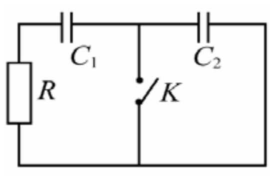


Рис. 8.8

Ответ: $Q = \dfrac{(I_0 R)^2 C_1 C_2}{2\,(C_1 + C_2)} = 33$ мкДж.

8.19. В медном проводнике объемом V = 10 см^3 при прохождении по нему постоянного тока за время τ = 1 мин выделилось количество теплоты Q = 250 Дж. Определите напряженность E электрического поля в этом проводнике при $t^\circ_{\text{комп}}$ = 20 °С.

Ответ: $E = \sqrt{\rho_0 \left(1 + \alpha t^\circ_{\text{комн}}\right) Q \big/ (\tau V)} = 0{,}088$ В/м

8.20. Сила тока в проводнике сопротивлением R = 200 Ом равномерно возрастает от I_0 = 1 А до $I_{\max}$ = 11 А в течение времени τ = 20 с. Определите количество теплоты Q, выделившееся за это время в проводнике.

Ответ: $Q = R\tau\left(I_0^2 + I_0 I_{\max} + I_{\max}^2\right)\big/3 = 177{,}3$ кДж.

8.21. Какой объем воды можно вскипятить, затратив электрическую энергию W = 5 кВт·ч, если начальная температура воды t_0° = 20 °С, а КПД нагревателя η = 0,9?

Ответ: $V = \eta W \big/ \left(c \Delta T d_{\text{в}}\right) = 0{,}048$ м^3, где ΔT = 80 К; $d_{\text{в}}$ – плотность воды.

8.22. Сила тока в проводнике сопротивлением R = 12 Ом равномерно убывает от I_0 = 5 А до I = 0 в течение времени τ = 10 с. Какое количество теплоты Q выделится в этом проводнике за данный промежуток времени? Определите, какой должна быть средняя сила тока $\langle I \rangle$ в проводнике за указанный промежуток времени, чтобы в проводнике выделилось такое же количество теплоты Q.

Ответ: $Q = I_0^2 R\tau/3 = 1{,}0$ кДж; $\langle I \rangle = I_0 \big/ \sqrt{3} = \sqrt{Q/(R\tau)} = 2{,}89$ А

8.23. В электрическом чайнике две секции. При включении одной из них вода в чайнике закипит за t_1 = 20 мин, при включении другой – за t_2 = 30 мин. Сколько потребуется времени для кипячения воды при включении в сеть обеих секций: а) последовательно; б) параллельно?

Ответ: а) $\tau_1 = t_1 + t_2$ = 50 мин; б) $\tau_2 = t_1 t_2 / (t_1 + t_2)$ = 12 мин.

8.24. Сила электрического тока изменяется по закону $i = 0{,}564\sin(12{,}56t)$, здесь i измеряется в амперах. Определите, какое количество теплоты Q выделится в проводнике с активным сопротивлением R = 15 Ом за время $\tau = 10T$, где T – период колебаний тока.

Ответ: $Q = 10\pi I_m^2 R/\omega = 11{,}9$ Дж. Здесь I_m = 0,564 А, ω = 12,56 рад/с.

8.25. Сила тока в проводнике равномерно возрастает от значения I_0 = 0 до некоторого максимального значения $I_{\max}$ в течение времени τ = 20 с. За это же время в проводнике выделилось количество теплоты $Q = 2\cdot 10^3$ Дж. Определите скорость возрастания тока в проводнике, если его сопротивление R = 5 Ом.

Ответ: $\dfrac{\Delta I}{\Delta t} = \dfrac{1}{\tau}\sqrt{\dfrac{3Q}{R\tau}} = 0{,}39$ А/с.

9. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ЭЛЕКТРОЛИТАХ, ГАЗАХ И ВАКУУМЕ

А. Ток в электролитах

Основные формулы и краткие обозначения

Первый закон Фарадея

$$m = kq = kIt,$$

где m – масса вещества, выделившегося на электроде; I – сила тока, проходящего через электролит; t – время электролиза; k –электрохимический эквивалент выделившегося вещества.

Второй закон Фарадея $k = \frac{1}{F} \cdot \frac{\mu}{z}$

где F – число Фарадея, F = 96485 Кл/моль; μ – молярная масса ионов; z – валентность иона.

Удельная электропроводность электролита

$$\sigma = \alpha F C_z (b_+ + b_-) = \alpha C_z \Lambda,$$

где α – коэффициент диссоциации, т.е. отношение числа диссоциировавших молекул к общему числу молекул растворенного вещества; C_z – эквивалентная концентрация ионов, выраженная числом химических эквивалентов ионов одного знака в единице объема электролита, $C_z = nz/N_A = zC_m$, n – концентрация ионов (м$^{-3}$); C_m – молярная концентрация ионов (моль/м^3); $\Lambda = F(b_+ + b_-)$ – эквивалентная электропроводность раствора; b_+ и b_- – подвижность катионов и анионов в электролите.

Нормальный раствор электролита $N = 10^3$ моль/м^3 = 1 моль/л.

Задачи с решениями

Задача 1. Топливный элемент (ТЭ) непрерывно снабжается кислородом и водородом. При его работе выделяется вода. Реакция образования воды из водорода и кислорода происходит с выделением тепла

$$2H_2 + O_2 = 2H_2O + W.$$

Если количество полученной воды $\nu_{H_2O} = 2\cdot10^3$ моль, то W = = $5{,}75\cdot10^5$ Дж. Обычно топливный элемент создает ЭДС, равную 1 В. Для получения кислорода и водорода ведут электролиз слабоподкисленной воды. Найти наименьшую разность потенциалов, при которой будет происходить разложение воды.

Дано:
$W = 5{,}75 \cdot 10^5$ Дж
$\nu_{H_2O} = 2 \cdot 10^3$ моль
$\mu = 1 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$z = 1$

U – ?

Решение: По закону Джоуля – Ленца

$$W = Q = IUt.$$

Согласно закону Фарадея масса выделившегося водорода $m = \frac{1}{F}\frac{\mu}{z}It.$

Комбинируя данные уравнения, имеем

$$U = \frac{\mu W}{mzF}.$$

По реакции $2H_2 + O_2 = 2H_2O$ для получения $\nu_{H_2O} = 2 \cdot 10^3$ моль воды необходимо $\nu_{H_2} = 2 \cdot 10^3$ моль молекулярного водорода или $\nu_H = 2 \cdot \nu_{H_2} =$ $= 4 \cdot 10^3$ моль атомарного водорода.

Следовательно, $m = \mu\nu_H = 1 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^3 = 4$ кг.

$$U = \frac{1 \cdot 5{,}75 \cdot 10^5}{4 \cdot 1 \cdot 96486} = 1{,}5 \text{ В}.$$

Ответ: $U = 1{,}5$ В.

Примечание. В реальных электролизерах эта величина больше и составляет приблизительно 1,7 В.

Задача 2. Через водный раствор соляной кислоты пропускают электрический ток силой 1 А в течение 50 с. Какой объем газа образуется на электродах, если процесс электролиза протекает в нормальных условиях ($p = 1 \cdot 10^5$ Па, $T = 273$ К).

Дано:
$I = 1$ А
$t = 50$ с
$T = 273$ К
$p = 1 \cdot 10^5$ Па
$z_1(H) = 1$
$z_2(O) = 2$

V – ?

Решение: В процессе электролиза соляной кислоты на электродах выделяются водород ($z_1 = 1$) и кислород ($z_2 = 2$).

Объем V гремучего газа равен сумме объемов V_1 и V_2 водорода и кислорода

$$V = V_1 + V_2. \qquad (1)$$

Согласно законам Фарадея массы выделившегося водорода и кислорода равны

$$m_1 = \frac{1}{F}\frac{\mu_1}{z_1}It, \qquad m_2 = \frac{1}{F}\frac{\mu_2}{z_2}It,$$

где μ_1 и μ_2 – соответственно молярная масса атомарного водорода и кислорода.

По формуле Клапейрона – Менделеева

$$PV_1 = \frac{m_1}{\mu_1'}RT, \quad PV_2 = \frac{m_2}{\mu_2'}RT,$$

где μ'_1 и μ'_2 – соответственно молярная масса H_2 и O_2.

Так как $H + H = H_2$ и $O + O = O_2$, то $\mu'_1 = 2\mu_1$ и $\mu'_2 = 2\mu_2$.

Поэтому

$$V_1 = \frac{ItRT}{2z_1FP}, \qquad V_2 = \frac{ItRT}{2z_2FP}.$$

Подставляя в (1), получим

$$V = V_1 + V_2 = \frac{ItRT}{2FP}\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right) = \frac{1\cdot 50\cdot 8{,}31\cdot 273}{2\cdot 9{,}65\cdot 10^4\cdot 1\cdot 10^5}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 8{,}8\cdot 10^{-6}\ \text{м}^3.$$

Ответ: $V = 8{,}8$ см^3.

Задача 3. Вычислить эквивалентную электропроводность Λ очень слабого раствора азотной кислоты, если подвижность ионов в растворе азотной кислоты $b_+ = 32{,}6\cdot 10^{-8}$ м$^2\cdot$В$^{-1}\cdot$с$^{-1}$; $b_- = 6{,}4\cdot 10^{-8}$ м$^2\cdot$В$^{-1}\cdot$с$^{-1}$.

Решение: Реакция электролитической диссоциации раствора азотной кислоты $HNO_3 \rightleftarrows H^+ + NO_3^-$.

Эквивалентная электропроводность электролита

$$\Lambda = \sigma/(\alpha C_z),$$

где α – коэффициент диссоциации; C_z – эквивалентная концентрация ионов (моль/м^3); $\sigma = \alpha F C_z(b_+ + b_-)$.

По условию задачи раствор азотной кислоты является слабым, т.е. $\alpha = 1$. Тогда

$$\Lambda = F(b_+ + b_-).$$

Проводим вычисления

$$\Lambda = 9{,}65\cdot 10^4\cdot(32{,}6\cdot 10^{-8} + 6{,}4\cdot 10^{-8}) = 3{,}76\cdot 10^{-2}\ \text{м}^2/(\text{Ом}\cdot\text{моль}).$$

Ответ: $\Lambda = 3{,}76\cdot 10^{-2}$ м^2/(Ом·моль).

Задача 4. Определить сопротивление децинормального $AgNO_3$, заполняющего трубку длиной $l = 84$ см и площадью поперечного сечения $S = 5$ мм^2, если 81 % всех молекул $AgNO_3$ диссоциирован на ионы.

Дано:	**Решение:** Очевидно, что сопротивление столба электролита можно определить по формуле
$l = 0{,}84$ м $S = 5\cdot 10^{-6}$ м^2 $\alpha = 0{,}81$ $z = 1$	$$R = \rho\frac{l}{S} = \frac{l}{\sigma S}, \qquad (1)$$ где σ – проводимость электролита,
R – ?	$$\sigma = zC_m\alpha F(b_+ + b_-), \qquad (2)$$

где C_m – молярная концентрация ионов (моль/м^3); z – валентность иона.

Из таблицы 8 (см. Приложение) находим $b_+(Ag) = 5{,}6\cdot 10^{-8}$ м^2/(В·с), $b_-(NO_3^-) = 6{,}4\cdot 10^{-8}$ м^2/(В·с).

Молярная концентрация ионов в децинормальном растворе

$$C_m = 0{,}1N = 0{,}1\cdot10^3 \text{ моль/м}^3 = 100 \text{ моль/м}^3.$$

После подстановки (2) в (1), получим

$$R = \frac{l}{zC_m\alpha F(b_+ + b_-)S}.$$

$$R = \frac{0{,}84}{1\cdot100\cdot0{,}81\cdot96485\cdot(5{,}6+6{,}4)\cdot10^{-8}\cdot5\cdot10^{-6}} = 1{,}8\cdot10^5 \text{ Ом}.$$

Ответ: $R = 1{,}8\cdot10^5$ Ом.

Задача 5. Найти сопротивление R раствора KNO_3, заполняющего трубку длиной $l = 2$ см и площадью поперечного сечения $S = 7$ см^2. Эквивалентная концентрация раствора $C_z = 0{,}05$ кмоль/м^3, эквивалентная проводимость $\Lambda = 1{,}1\cdot10^{-6}$ м^2/(Ом·моль).

Дано:	Решение:
$l = 2\cdot10^{-2}$ м $S = 7\cdot10^{-4}$ м^2 $C_z = 50$ моль/м^3 $\Lambda = 1{,}1\cdot10^{-6}$ м^2/(Ом·моль)	**Решение:** Эквивалентная проводимость Λ, эквивалентная концентрация C_z, и проводимость σ связаны соотношением: $\Lambda = \sigma/(\alpha C_z)$. (1) Для слабого раствора соли KNO_3 $\alpha \approx 1$.
$R - ?$	

Сопротивление столба раствора KNO_3 может быть рассчитано по стандартной формуле

$$R = \rho\frac{l}{S} = \frac{l}{\sigma S}.$$

Таким образом, с учетом (1) расчетная формула имеет вид

$$R = \frac{l}{\Lambda C_z S} = \frac{2\cdot10^{-2}}{1{,}1\cdot10^{-6}\cdot50\cdot7\cdot10^{-4}} = 519 \text{ кОм}.$$

Ответ: $R = 519$ кОм.

Задача 6. Удельная проводимость децинормального раствора соляной кислоты HCl равна 3,5 См/м. Какова степень α диссоциации?

Дано:	Решение:
$C_m = 100$ моль/м^3 $\sigma = 3{,}5$ См/м $z = 1$	**Решение:** Удельная проводимость σ равна $\sigma = zC_m\alpha F(b_+ + b_-)$, где $b_+(H^+)=32{,}6\cdot10^{-8}$ м^2/(В·с); $b_-(Cl^-)=6{,}8\cdot10^{-8}$ м^2/(В·с) (данные взяты из таблицы 8 Приложения); $C_m = 0{,}1N = 0{,}1\cdot10^3$ моль/м^3 = 100 моль/м^3.
$\alpha - ?$	

Степень диссоциации

$$\alpha = \frac{\sigma}{zC_mF(b_+ + b_-)};\quad \alpha = \frac{3{,}5}{1\cdot100\cdot96485\cdot(32{,}6+6{,}8)\cdot10^{-8}} = 0{,}92.$$

Ответ: $\alpha = 0{,}92$.

Задача 7. Какую электрическую энергию необходимо затратить, чтобы при электролизе раствора $AgNO_3$ выделилась масса m = 500 мг серебра? Считать, что разность потенциалов в процессе электролиза поддерживалась постоянной и равна U = 4 В.

Дано:	
$m = 5 \cdot 10^{-4}$ кг	
U = 4 В	
$\mu = 0{,}108$ кг/моль	
$z = 1$	
W – ?	

Решение: Электрическая энергия при электролизе затрачивается на транспортировку ионов к электродам с учетом сопротивления электролита.

Раствор электролита имеет при этом некоторое сопротивление. Поэтому искомая энергия может быть вычислена по закону Джоуля – Ленца

$$W = IUt.$$

Легко догадаться, что неизвестные величины I, t нужно определять из закона Фарадея

$$m = \frac{1}{F}\frac{\mu}{z}It,$$

где μ и z – соответственно молярная масса и валентность серебра.

Тогда расчетная формула принимает вид

$$W = \frac{UmFz}{\mu}; \qquad W = \frac{4 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 96485 \cdot 1}{0{,}108} = 1787 \text{ Дж.}$$

Ответ: W = 1787 Дж.

Задача 8. Никелирование металлического изделия площадью 120 см^2 продолжалось 5 ч при силе тока 0,9 А. Определите толщину слоя никеля на изделии. Плотность никеля $8{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3, валентность никеля 1, атомная масса – 0,058 кг/моль. С какой скоростью происходило увеличение толщины слоя?

Дано:	
$t = 1{,}8 \cdot 10^4$ с	
$S = 1{,}2 \cdot 10^{-2}$ м^2	
I = 0,9 А	
$\rho = 8{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3	
$z = 1$	
$\mu = 0{,}058$ кг/моль	
h – ? υ_h – ?	

Решение: Общая масса никеля, выделившегося на катоде, равна

$$m = \frac{1}{F}\frac{\mu}{z}It.$$

Известно, что $m = \rho V$, где $V = Sh$.

При совместном решении двух уравнений имеем $h = \frac{1}{F}\frac{\mu}{z}\frac{It}{\rho S}$; $\upsilon_h = \frac{h}{t}$.

Проводим вычисления:

$$h = \frac{0{,}058 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}8 \cdot 10^4}{96485 \cdot 1 \cdot 8{,}8 \cdot 10^3 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-2}} = 9{,}2 \cdot 10^{-5} \text{ м}; \quad \upsilon_h = \frac{9{,}2 \cdot 10^{-5}}{1{,}8 \cdot 10^4} \cong 5{,}1 \cdot 10^{-9} \text{ м/с.}$$

Ответ: h = 92 мкм; υ_h = 5,1 нм/с.

Задача 9. Десятипроцентный раствор поваренной соли, масса которого 0,78 кг, налит в сосуд прямоугольной формы. Противоположные стенки сосуда, отстоящие друг от друга на расстоянии 0,25 м, являются электродами. Сопротивление раствора 10 Ом. Вычислите степень диссоциации. Подвижность ионов натрия и хлора $b_+ = 4{,}4\cdot10^{-8}$ м^2/(В·с); $b_- = 6{,}8\cdot10^{-8}$ м^2/(В·с).

Дано:
$\eta = 0{,}1$
$m = 0{,}78$ кг
$l = 0{,}25$ м
$R = 10$ Ом
$z = 1$
$\mu = 58{,}5\cdot10^{-3}$ кг/моль

α – ?

Решение: Сопротивление раствора найдем по стандартной формуле

$$R = \rho\frac{l}{S} = \frac{l}{\sigma S}, \tag{1}$$

где $\sigma = 1/\rho$ – удельная электропроводность; l – длина столба (слоя) электролита; S – площадь поперечного сечения сосуда.

Удельная электропроводность электролита

$$\sigma = zC_m\alpha F(b_+ + b_-), \tag{2}$$

где C_m – молярная концентрация NaCl.

Чтобы найти S, запишем выражение для плотности раствора d:

$$d = \frac{m}{V_c} = \frac{m}{lS}. \tag{3}$$

Комбинируя (1), (2) и (3), находим α.

$$\alpha = \frac{l^2 d}{zC_m F(b_+ + b_-)mR}. \tag{4}$$

По условию задачи водный раствор десятипроцентный ($\eta = 0{,}1$), следовательно,

$$d = d_{H_20}(1 + \eta), \tag{5}$$

где d_{H_20} – плотность воды.

Для вычисления степени диссоциации необходимо определить молярную концентрацию NaCl. По определению, $C_m = \nu/V$, где $\nu = m_{NaCl}/\mu$ – число молей NaCl в объеме V. Следовательно, для десятипроцентного водного раствора ($\eta = 0{,}1$) имеем

$$C_m = m_{NaCl}/(\mu V) = \eta m_{H_20}/(\mu V) = \eta d_{H_20}/\mu. \tag{6}$$

Подставляя (5) и (6) в (4), получим формулу для расчета α

$$\alpha = \frac{(1+\eta)\mu l^2}{z\eta F(b_+ + b_-)mR} = \frac{1{,}1\cdot 58{,}5\cdot10^{-3}\cdot 0{,}25^2}{1\cdot 0{,}1\cdot 96485\cdot(6{,}8+4{,}4)\cdot10^{-8}\cdot 0{,}78\cdot 10} = 0{,}477\,.$$

Ответ: $\alpha = 0{,}48$.

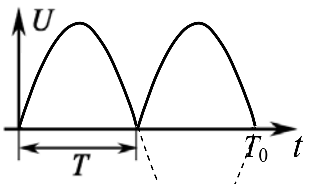


Рис. 9.1

Задача 10. На электроды электрической ванны с раствором медного купороса ($CuSO_4$) подается синусоидальное пульсирующее напряжение с периодом T = 10 мин (рис. 9.1). За это время на электроде выделяется $m = 2{\cdot}10^{-4}$ кг меди. Определите амплитуду тока.

Дано:
$T = 600$ с
$m = 2{\cdot}10^{-4}$ кг
$\mu = 0{,}0634$ кг/моль
$z = 2$
I_m – ?

Решение: По условию задачи за каждые T = 10 мин выделяется $m = 2{\cdot}10^{-4}$ кг меди.

По второму закону Фарадея

$$m = \frac{1}{F}\frac{\mu}{z}q, \qquad (1)$$

где q – заряд, прошедший через раствор за время T.

Вычислим заряд q из условия, что $I = I_m \sin\omega t$, где $\omega = 2\pi/T_0 = \pi/T$, $T_0 = 2T$ – период синусоидальных колебаний, рис. 9.1.

Следовательно,

$$q = \int_0^T I_m \sin\omega t\, dt = \frac{I_m}{\omega}\int_0^T \sin\omega t\, d\omega t = -\frac{I_m}{\omega}\cos\omega t\Big|_0^T = \frac{I_m}{\omega}\left(1-\cos\omega T\right) =$$

$$= \frac{I_m}{\omega}\left(1-\cos\frac{\pi}{T}T\right) = \frac{2I_m T}{\pi}.$$

Подставляя q в (1), найдем искомую величину

$$I_m = \frac{\pi m z F}{2\mu T} = \frac{\pi\cdot 2\cdot 10^{-4}\cdot 2\cdot 96485}{2\cdot 0{,}0634\cdot 600} = 1{,}59 \text{ А}.$$

Ответ: I_m = 1,59 А.

Задача 11. При электролизе раствора разлагается m = 4,77 г медного купороса ($CuSO_4$) в час. Сколько ионов меди нейтрализуется ежесекундно на катоде? Чему равен ток I в растворе? Валентность z меди равна 2.

Дано:
$m = 4{,}77{\cdot}10^{-3}$ кг
$t = 3600$ с
$z = 2$
$\mu_{Cu} = 64{\cdot}10^{-3}$ кг/моль
n – ?
I – ?

Решение: При анализе данной задачи обращаем внимание на величину молярной массы каждого компонента $CuSO_4$.

Молярная масса меди $\mu_{Cu} = 64{\cdot}10^{-3}$ кг/моль, серы $\mu_S = 32{\cdot}10^{-3}$ кг/моль, кислорода $\mu_O = 16{\cdot}10^{-3}$ кг/моль. Следовательно, молярная масса $CuSO_4$ $\mu = \mu_{Cu} + \mu_S + 4\mu_O = 0{,}16$ кг/моль.

Учитывая, что $m/\mu = m_{Cu}/\mu_{Cu}$, находим массу меди

$$m_{Cu} = m\mu_{Cu}/\mu = 1{,}91{\cdot}10^{-3} \text{ кг}.$$

Для определения числа ионов меди, нейтрализующихся ежесекундно на катоде, воспользуемся соотношением $N/N_A = m_{Cu}/\mu_{Cu}$, где N_A – число Авогадро. Тогда

$$n = \frac{N}{t} = \frac{m_{Cu}}{\mu_{Cu}}\frac{N_A}{t} = \frac{1{,}91\cdot 10^{-3}\cdot 6\cdot 10^{23}}{64\cdot 10^{-3}\cdot 3600} = 5\cdot 10^{18} \text{ атомов/с.}$$

Значение тока определяем из второго закона Фарадея

$$m_{Cu} = \frac{1}{F}\frac{\mu_{Cu}}{z}It; \qquad I = \frac{m_{Cu}zF}{\mu_{Cu}t} = \frac{1{,}91\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 96485}{64\cdot 10^{-3}\cdot 3600} = 1{,}6 \text{ А.}$$

Ответ: $n = 5\cdot 10^{18}$; $I = 1{,}6$ А.

Примечание. Значение тока легко вычислить, если известно число n и валентность z ионов меди, нейтрализующихся ежесекундно на катоде, По определению $I = \Delta q/\Delta t = zen/\Delta t$, где $\Delta t = 1$ с, e – элементарный заряд. Отсюда

$$I = zen/\Delta t = 2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 5\cdot 10^{18}/1 = 1{,}6 \text{ А.}$$

Задача 12. Какой наименьший заряд должен иметь аккумулятор, чтобы при электролизе подкисленной воды выделилось 4 л кислорода, если электролиз протекает при 20 °С и нормальном атмосферном давлении ($P = 1\cdot 10^5$ Па). Ответ выразить в СИ и ампер в час.

Дано:
$V = 4\cdot 10^{-3}$ м^3
$T = 293$ К
$P = 1\cdot 10^5$ Па
$z = 2$
q – ?

Решение: Необходимое для электролиза количество электричества находим из соотношения

$$m = kq = \frac{1}{F}\frac{\mu_O}{z}q, \tag{1}$$

где μ_O и z – молярная масса и валентность иона кислорода.

Массу выделившегося кислорода можно определить, воспользовавшись уравнением Клапейрона – Менделеева

$$PV = \frac{m}{\mu_{O_2}}RT; \quad m = \frac{PV\mu_{O_2}}{RT}, \tag{2}$$

где μ_{O_2} – молярная масса O_2. Очевидно, что $\mu_{O_2} = 2\mu_O$.
Из уравнений (1) и (2), с учетом, что $\mu_{O_2} = 2\mu_O$, найдем

$$q = \frac{2PVzF}{RT} = \frac{2\cdot 1\cdot 10^5\cdot 4\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 96485}{8{,}31\cdot 293} = 6{,}34\cdot 10^4 \text{ Кл.}$$

При эксплуатации и замене аккумулятора автолюбители знают, что важнейшей его характеристикой является «емкость» в ампер·час. Автомобильные аккумуляторы, выпускаемые в промышленном масштабе, имеют емкости 55, 60, 75 А·ч и т.д.

Оценим, какое количество зарядов в ампер·час израсходовано при получении 4 л кислорода:

$$q\ (\text{А·ч}) = 63400/3600 = 17{,}6\ \text{А·ч}.$$

Ответ: $q = 63{,}4$ кКл; $q = 17{,}6$ А·ч.

Задача 13. При покрытии изделий медью используют электролитические ванны с медным купоросом. При этом применяется техническая характеристика, называемая выходом по току δ. Выход по току $\delta = m_{\text{эксп}}/m_{\text{расч}}$, где $m_{\text{расч}}$ определяется из закона Фарадея. Сколько меди расходуется на покрытие изделия площадью $S = 300$ см^2, если плотность тока $j = 800$ А/м^2, время покрытия 3 мин, а выход по току составляет 90%? Какова толщина покрытия в нанометрах? Электрохимический эквивалент меди $k = 3{,}3 \cdot 10^{-7}$ кг/Кл.

Дано:
$t = 180$ с
$j = 800$ А/м^2
$S = 3 \cdot 10^{-2}$ м^2
$k = 3{,}3 \cdot 10^{-7}$ кг/Кл
$\delta = 0{,}9$
$d_{\text{Cu}} = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3

m – ? h – ?

Решение: По первому закону электролиза
$m_{\text{расч}} = kIt$, тогда

$$m_{\text{эксп}} = \delta \cdot m_{\text{расч}} = \delta \cdot kIt = \delta \cdot kjSt.$$

Произведем необходимые вычисления:

$$m_{\text{эксп}} = 0{,}9 \cdot 3{,}3 \cdot 10^{-7} \cdot 800 \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot 180 = 1{,}28 \cdot 10^{-3}\ \text{кг}.$$

По определению

$$m_{\text{эксп}} = d_{\text{Cu}} V = d_{\text{Cu}} S h,$$

где d_{Cu} – плотность меди; h – толщина покрытия.

Найдем толщину медного покрытия

$$h = \frac{m_{\text{эксп}}}{d_{\text{Cu}} S} = \frac{1{,}28 \cdot 10^{-3}}{8{,}9 \cdot 10^{3} \cdot 3 \cdot 10^{-2}} = 4{,}8 \cdot 10^{-6}\ \text{м} = 4{,}8\ \text{мкм}.$$

Ответ: $m = 1{,}28 \cdot 10^{-3}$ кг; $h = 4{,}8$ мкм.

Задачи для самостоятельного решения

9.1.1. Для рафинирования электролитическим способом $m = 990$ кг меди через ванну пропускают ток. Напряжение на клеммах равно $U = 3$ В. Определить количество энергии (в кВт·ч), израсходованной в процессе электролиза. Потерями энергии пренебречь.

Ответ: $W = \dfrac{mUFz}{3600\mu_{\text{Cu}}} = 2500\ \text{кВт} \cdot \text{ч}$.

9.1.2. Сколько серебра выделится из раствора нитрата серебра за $t = 1{,}5$ мин, если первые $t_1 = 30$ с ток равномерно нарастал от 0 до $I_{\max} = 2$ А, а остальное время поддерживался постоянным?

Ответ: $m = \dfrac{\mu_{\text{Ag}}}{zF} I_{\max} \left(t - \dfrac{t_1}{2} \right) = 168\ \text{мг}$.

9.1.3. Сколько двухвалентного никеля (z = 2) можно выделить электролитическим путем из водного раствора сульфата никеля за t = 1 ч при токе в I = 1,5 А?

Ответ: $m = \mu_{\text{Ni}} It/(zF)$ = 1,65 г.

9.1.4. Сколько алюминия выделится при затрате W = 1 кВт·ч электрической энергии, если электролиз ведется при напряжении U = 5 В, а КПД установки η = 80 %. Валентность алюминия z = 3,

Ответ: $m = \mu_{\text{Al}}\eta W/(zFU)$ = 54 г.

9.1.5. В электролитической ванне ($CuSO_4$) за t = 40 мин выделилось m = 1,98 г меди (z = 2). Определить $\mathcal{E}$ батареи, если сопротивление раствора R = 1,3 Ом, внутреннее сопротивление батареи r = 0,3 Ом, а ЭДС поляризации составляет $\mathcal{E}_{\text{p}}$ = 1 В?

Ответ: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{p}} + \dfrac{m(R+r)zF}{\mu_{\text{Cu}} t} = 5{,}0$ В.

9.1.6. При электролизе воды выделяется V = 0,4 л водорода. Общий заряд q, прошедший через ванну, равен 4000 Кл. Определить температуру водорода, если он находится под давлением P = 128 кПа.

Ответ: $T = 2VFzP/(qR)$ = 297 К.

9.1.7. При электролизе раствора серной кислоты (H_2SO_4) за t = 50 мин выделилось V = 3,3 л водорода при нормальных условиях. Определить мощность N, расходуемую на нагревание электролита, если сопротивление раствора равно r = 0,4 Ом.

Ответ: $N = 4r\left(\dfrac{VP}{RT}\cdot\dfrac{zF}{t}\right)^2 = 29$ Вт.

9.1.8. Через раствор азотной кислоты (HNO_3) пропускается ток I = 2 А. Какое количество электричества переносится за t = 1 мин ионами каждого знака?

Ответ: $q_+ = It{\cdot}b_+/(b_+ + b_-) \approx 100$ Кл; $q_- = It{\cdot}b_-/(b_+ + b_-) \approx 20$ Кл.

9.1.9. При получении алюминия электролизом раствора Al_2O_3 в расплавленном криолите проходил ток $I = 2{\cdot}10^4$ А при разности потенциалов U на электродах в 5 В. Найти время t, в течение которого будет выделена m = 1 т алюминия.

Ответ: $t = mFz/(\mu_{\text{Al}} I)$ = 177 ч.

9.1.10. Удельная электропроводность σ децинормального раствора соляной кислоты HCl равна 0,035 Ом$^{-1}$·см$^{-1}$. Найти степень диссоциации.

Ответ: $\alpha = \dfrac{\sigma}{zF(b_+ + b_-)C_m} = 0{,}92$.

9.1.11. При силе тока $I = 5$ А в электрической ванне за время $t = 10$ мин выделился $m = 1$ г двухвалентного металла ($z = 2$). Определить молярную массу μ металла.

Ответ: $\mu = mFz/(It) = 64{,}3\cdot10^{-3}$ кг/моль.

9.1.12. Сколько N атомов двухвалентного металла ($z = 2$) выделится на $S = 1$ см^2 поверхности катода за время $t = 5$ мин при плотности тока $j = 10$ А/м^2?

Ответ: $N = jStN_A/(zF) = 9{,}3\cdot10^{17}$.

9.1.13. Сила тока при электролизе медного купороса $CuSO_4$ возрастает равномерно от нуля до $I_{max} = 2$ А в течение $t = 20$ с. Найти массу m меди, выделившейся за это время на катоде.

Ответ: $m = \mu_{Cu}\, I_{max}t/(2zF) = 6{,}6$ мг.

9.1.14. Определить количество вещества ν и число N атомов двухвалентного металла, отложившегося на катоде, если через раствор за время $t = 5$ мин шел ток $I = 2$ А.

Ответ: $\nu = It/(Fz) = 3{,}1\cdot10^{-3}$ моль; $N = ItN_A/(zF) = 1{,}9\cdot10^{21}$.

9.1.15. При прохождении заряда $q = 193$ кКл на катоде электролитической ванны выделилось $\nu = 1$ моль вещества. Определить валентность z металла.

Ответ: $z = q/(\nu F) = 2$.

9.1.16. Определить толщину h слоя меди ($\rho_{Cu} = 9\cdot10^3$ кг/м^3), выделившейся за время $t = 5$ ч при электролизе медного купороса $CuSO_4$, если плотность тока $j = 80$ А/м^2.

Ответ: $h = \mu_{Cu} jt/(\rho_{Cu}Fz) = 54$ мкм.

9.1.17. Через какое время после начала электролиза медный анод ($z = 2$) станет тоньше на $h = 0{,}03$ мм, если плотность тока при электролизе составляет $j = 200$ А/м^2.

Ответ: $t = h\rho_{Cu}zF/(\mu_{Cu}j) \cong 68$ мин.

9.1.18. Электролиз слабого раствора серной кислоты (H_2SO_4) проводился в течение $t = 12$ мин при силе тока $I = 2{,}5$ А. Найти объем выделившихся водорода и кислорода (при нормальных условиях).

Ответ: $V = \dfrac{RT}{P}\cdot\dfrac{It}{2zF}$; $V_{H_2} = 2{,}1\cdot10^{-4}$ м^3; $V_{O_2} = 1\cdot10^{-4}$ м^3.

9.1.19. Какой ток I нужно пропустить через раствор подкисленной воды, чтобы за $t = 10$ ч получить $V = 0{,}1$ м^3 водорода при нормальных условиях?

Ответ: $I = \dfrac{PV}{RT}\cdot\dfrac{2Fz}{t} = 24$ А.

9.1.20. При электролизе раствора $ZnSO_4$ на катоде выделилось $m = 2{,}04$ г цинка за $t = 50$ мин. Определить ЭДС поляризации $\mathcal{E}_p$, если напряжение на зажимах ванны составляет U = 4,2 В, а сопротивление r раствора равно 1,8 Ом.

Ответ: $\mathcal{E}_\text{р} = U - mrzF/(\mu_{Zn}t) = 0{,}6$ В.

9.1.21. При электролитическом нанесении покрытия изделия серебром (z = 1) пропускали ток плотностью j = 70 А/м^2. Сколько времени потребуется для того, чтобы образовался слой серебра толщиной h = 0,05 мм?

Ответ: $t = h\rho_{Ag}zF/(\mu_{Ag}j) \approx 112$ мин.

9.1.22. Две электролитические ванны соединены последовательно. В первой ванне выделилось m_{Fe} = 2,24 г железа, во второй за то же время m_{Zn} = 3,9 г двухвалентного цинка (z_{Zn} = 2). Определить валентность z_{Fe} железа.

Ответ: $z_{Fe} = z_{Zn}\cdot\mu_{Fe}m_{Zn}/(\mu_{Zn}m_{Fe}) = 3$.

9.1.23. Электролитическая ванна с раствором медного купороса присоединена к батарее аккумуляторов с ЭДС $\mathcal{E}$ = 4 В и внутренним сопротивлением r = 0,1 Ом. Определить массу m меди, выделившейся при электролизе за время t = 10 мин, если ЭДС поляризации $\mathcal{E}_\text{р}$ = 1,5 В и сопротивление R раствора равно 0,5 Ом. Медь двухвалентна (z = 2).

Ответ: $m = \dfrac{\mu_{Cu}t}{Fz(R+r)}\left(\mathcal{E} - \mathcal{E}_\text{р}\right) = 0{,}83$ г.

9.1.24. Сколько атомов двухвалентного цинка (z = 2) выделилось на катоде за t = 5 мин при электролизе раствора сульфата цинка $ZnSO_4$ при токе I = 2,5 А.

Ответ: $N = ItN_A/(zF) = 2{,}34\cdot10^{21}$.

9.1.25. Электрический заряд аккумулятора составляет Q = 194,4 кКл. Сколько энергии W потребовалось для зарядки аккумулятора, если напряжение на его зажимах U = 2 В, а КПД составляет η = 80 %.

Ответ: $W = \eta QU = 4{,}9\cdot10^5$ Дж.

Б. Ток в газах

Основные формулы и обозначения

Плотность электрического тока между пластинами при несамостоятельном разряде

$$j = en_+u_+ + en_-u_-,$$

где e – элементарный заряд; n_+ и n_- – концентрации ионов разных знаков; $u_+ = b_+E$ и $u_- = b_-E$ – скорости направленного движения ионов во внешнем электрическом поле напряженностью E; b_+ и b_- – подвижности ионов.

Если $n_+ = n_-$, то $j = en(b_+ + b_-)E$.

Плотность тока насыщения

$$j_{\text{нас}} = eqh,$$

где q – скорость генерации (эффективность ионизатора), т.е. число пар ионов, которые создает ионизатор в единицу времени в единице объема; h – расстояние между электродами (величина газового промежутка).

Если источник ионов создает в единице объема в единицу времени q пар ионов, то число пар ионов в единице объема n будет изменяться со временем согласно уравнению

$$\frac{dn}{dt} = q - rn^2,$$

где r – коэффициент рекомбинации [м^3/с].

После выключении ионизатора (q = 0), уменьшение концентрации n ионов в газе описывается уравнением

$$\frac{dn}{dt} = -rn^2.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$n = \frac{n_0}{1 + n_0 rt},$$

где n_0 – концентрация пар ионов в момент времени t = 0.

В слабых полях выполняется закон Ома

$$j = e\sqrt{\frac{q}{r}}\left(b_+ + b_-\right)E = \sigma E.$$

Условие возникновения самостоятельного разряда

$$(\beta + \gamma\alpha)e^{(\alpha - \beta)l} = (1 + \gamma)\alpha,$$

где l – длина разрядного промежутка; α, β – коэффициенты ионизации для электронов и ионов, т.е. это число ионов (электронов) одного заряда, создаваемых электроном (ионом) на единице длины своего пути; γ – число электронов, вырываемых с катода положительным ионом.

Задачи с решениями

Задача 1. В момент времени t = 0 в газе начинает действовать ионизатор, создающий q пар ионов в единицу времени в единице объема ($[q]$ = м$^{-3}\cdot$с$^{-1}$). Коэффициент рекомбинации ионов в единицу времени в единице объема r ($[r_i]$ = м$^3\cdot$с$^{-1}$). Найти концентрацию ионов n в произвольный момент времени t > 0 (записать уравнение, описывающее изменение концентрации ионов со временем: $n = n(t)$).

Решение: Изменение концентрации ионов n со временем описывается уравнением, в левой части которого стоит скорость изменения концентрации dn/dt, а в правой – то, чем эта величина определяется: скорость q генерации ионов, минус скорость их исчезновения rn^2 (обратите внимание, что n^2 – т.к. рекомбинируют отрицательные ионы с положительными, причем $n_+ = n_- = n$, а газ в целом нейтрален)

$$\frac{dn}{dt} = q - rn^2. \tag{1}$$

Возможны два случая при решении уравнения (1):

1. Стационарный случай $dn/dt = 0$, $q - rn^2 = 0$, $n = \sqrt{q/r}$.
2. В общем случае представим правую часть в виде

$$q - rn^2 = \left(\sqrt{q} - \sqrt{r}\,n\right)\left(\sqrt{q} + \sqrt{r}\,n\right)$$

$$\frac{dn}{dt} = \left(\sqrt{q} - \sqrt{r}n\right)\,\left(\sqrt{q} + \sqrt{r}n\right).$$

Разделим переменные

$$\frac{dn}{2\sqrt{q}}\left\{\frac{1}{\sqrt{q} + \sqrt{r}n} + \frac{1}{\sqrt{q} - \sqrt{r}n}\right\} = dt.$$

После интегрирования имеем

$$\ln\left(\sqrt{q} + \sqrt{r}n\right) - \ln\left(\sqrt{q} - \sqrt{r}n\right) = 2t\sqrt{qr} + C.$$

Для определения C положим, что при $t = 0$ $n(0) = 0$. Тогда $C = 0$.

$$n(t) = \sqrt{\frac{q}{r}} \cdot \frac{1 - e^{-t/\tau}}{1 + e^{-t/\tau}}, \text{ где } \tau = \frac{1}{2\sqrt{qr}}.$$

Проверяем полученное решение. При $t \to \infty$ n стремится к своему стационарному значению $n = \sqrt{q/r}$ (рис. 9.2).

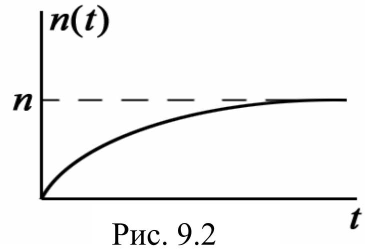


Рис. 9.2

Задача 2. Пусть ионизируемый газ, описанный в предыдущей задаче, находится между обкладками конденсатора с площадью пластин S и расстоянием между ними h. К пластинам приложено электрическое поле E. Как будет изменяться стационарная плотность тока j между пластинами от величины напряженности E приложенного поля. Построить график зависимости $j = j(E)$.

Решение: Величина плотности тока равна

$$j = en(b_+ + b_-)E,$$

где $n_+ = n_- = n$; $b_\pm$ – подвижности положительных и отрицательных ионов.

Чтобы найти n, запишем уравнение баланса для всех ионов в объеме конденсатора

$$Sh\frac{dn}{dt} = Shq - Shrn^2 - \frac{Sj}{e} \text{ или } \frac{dn}{dt} = q - rn^2 - \frac{j}{he},$$

где Shq – число пар ионов, создаваемых внешним ионизатором в объеме Sh; $Shrn^2$ – число пар ионов, ушедших из объема Sh вследствие рекомбинации; Sj/e – число пар ионов, уносимых на электроды.

В стационарном случае $dn/dt = 0$. Поэтому

$$q = rn^2 + \frac{j}{eh} = rn^2 + \frac{n(b_+ + b_-)E}{h}, \text{ или } n^2 + \frac{(b_+ + b_-)E}{rh}n - \frac{q}{r} = 0. \qquad (1)$$

Решением данного квадратного уравнения является

$$n = \sqrt{\left[\frac{(b_+ + b_-)E}{2hr}\right]^2 + \frac{q}{r}} - \frac{(b_+ + b_-)E}{2hr}.$$

Проанализируем полученное выражение.

1) Если напряженность поля мала, т.е. $\frac{(b_+ + b_-)E}{2hr} << \sqrt{\frac{q}{r}}$, то $n = \sqrt{\frac{q}{r}}$. Ток почти не уносит ионов и они «уходят» из объема благодаря рекомбинации. В этом случае $j = e\sqrt{\frac{q}{r}}\left(b_+ + b_-\right)E = \sigma E$ – закон Ома в дифференциальной форме, а $\sigma = e\sqrt{\frac{q}{r}}\left(b_+ + b_-\right)$. Полученное выражение хорошо описывает начальный участок кривой (рис. 9.3).

2) При большой напряженности электрического поля все появившиеся в результате действия ионизатора ионы достигают пластин конденсатора (коэффициент рекомбинации $r \to 0$). В этом случае плотность тока достигает насыщения и не зависит от E: $j_{нас} = eqh$.

Этот результат получается непосредственно из уравнения баланса (1) $rn^2 + n\left(b_+ + b_-\right)E/h - q = 0$, если учесть, что в сильных полях $r \approx 0$. Тогда $n = hq/\left[\left(b_+ + b_-\right)E\right]$ и $j_{нас} = en(b_+ + b_-)E = eqh$.

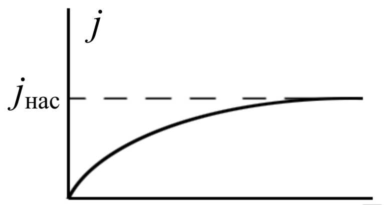


Рис. 9.3

Ток насыщения равен $I_{нас} = j_{нас}S = eqhS = eN$, где N – число пар ионов, создаваемых ионизатором в единицу времени во всем объеме hS.

График $j = j(E)$ дан на рис. 9.3 и представляет собой монотонную кривую с насыщением.

Задача 3. В атмосферном воздухе у поверхности Земли из-за радиоактивности почвы и ионизации космическими лучами в среднем образуется q = 5 ионов/(см^3·с). Определить ток насыщения, текущий благодаря естественной ионизации в плоском воздушном конденсаторе с площадью пластин S = 100 см^2 и расстоянием между ними h = 5 см. Определить время разрядки такого конденсатора, если он был заряжен до разности потенциалов $\Delta\varphi$ = 300 В.

Дано:
$q = 5\cdot10^6$ м$^{-3}$·с$^{-1}$
$S = 1\cdot10^{-2}$ м^2
$h = 5\cdot10^{-2}$ м
$\Delta\varphi$ = 300 В
t – ?

Решение: Непосредственной подстановкой в формулу получаем

$$I_{\text{нас}} = j_{\text{нас}}\cdot S = eqh\cdot S;$$

$$I_{\text{нас}} = 1{,}6\cdot10^{-19}\cdot5\cdot10^{6}\cdot5\cdot10^{-2}\cdot10^{-2} = 4\cdot10^{-16}\text{ А}.$$

Если конденсатор емкостью C заряжен до разности потенциалов $\Delta\varphi$, то он имеет заряд $Q = C\Delta\varphi$.

Для плоского конденсатора $C = \varepsilon\varepsilon_0 S/h$, а

$$I_{\text{нас}} = \frac{Q}{t} = \frac{C\Delta\varphi}{t}.$$

Зная величину $I_{\text{нас}}$ и учитывая, что для воздуха $\varepsilon = 1$, найдем

$$t = \frac{C\Delta\varphi}{I_{\text{нас}}} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S\cdot\Delta\varphi}{hI_{\text{нас}}} = \frac{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot1\cdot10^{-2}\cdot300}{5\cdot10^{-2}\cdot4\cdot10^{-16}} = 1{,}33\cdot10^{6}\text{ с} = 15{,}4\text{ сут}.$$

Ответ: t = 15,4 сут.

П р и м е ч а н и е. Если конденсатор хорошо изолирован, то заряд может сохраняться долгое время. Это время увеличивается с уменьшением q, что происходит с уменьшением давления газа. В вакууме заряд сохраняется в течение многих месяцев.

Задача 4. 1. Определить условия возникновения в газе самостоятельного разряда. 2. Найти, чем определяется коэффициент ионизации газа и величина пробойного напряжения. 3. Указать пределы применимости теории Таундсена.

Решение: 1) Если электрические поля являются слабыми, то нет ударной ионизации при столкновении ионов и электронов с нейтральными молекулами (удары носят упругий характер).

Проводимость создает внешний ионизатор. Но если на длине свободного пробега λ во внешнем поле напряженностью E электрон (или ион) приобретет энергию $e\lambda E$, бóльшую энергии ионизации нейтрального атома W_i, то последние могут ионизироваться при неупругом ударе.

Если и вторичные электроны будут приобретать во внешнем поле E на пути λ энергию, большую чем W_i, то в газе возникнет пробой. Каждый акт ионизации атома сопровождается появлением, наряду с электроном, положительного иона, а ионы также могут ионизировать газ.

Коэффициент ионизации электронами α (α – это число ионов одного заряда, создаваемых электроном на единице длины своего пути), коэффициент ионизации ионами β. Как показывает опыт, $\alpha > \beta$ $[\alpha] = [\beta] = [\text{м}^{-1}]$.

Рассмотрим прохождение стационарного тока (тока насыщения) через газ с учетом ударной ионизации нейтральных атомов газа электронами и ионами. Пусть электроды будут плоские (рис. 9.4).

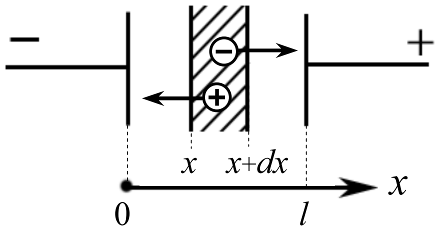


Рис. 9.4

Концентрацию электронов, ионов и их средние скорости направленного движения вдоль оси x обозначим $n_e(x)$, $n_i(x)$, $v_e(x)$, $v_i(x)$.

Рассмотрим объем газа между плоскостями S, расположенными в точках x и $x + dx$ (рис. 9.4).

Слева через плоскость ежесекундно входит $Sn_e(x)v_e(x)$ электронов, а справа выходит $Sn_e(x + dx)v_e(x + dx)$ электронов. В объеме Sdx ежесекундно образуется $(\alpha n_e v_e + \beta n_i v_i)Sdx$ электронов и положительных ионов из-за ударной ионизации электронами и положительными ионами. Внешний источник ежесекундно создает $qSdx$ пар ионов и электронов. В стационарном случае число электронов в слое не изменяется, поэтому

$$n_e(x)v_e(x)S - n_e(x + dx)v_e(x + dx)S + (\alpha n_e v_e + \beta n_i v_i)Sdx + qSdx = 0.$$

Аналогичное равенство имеем для положительных ионов, движущихся от анода к катоду (в обратном направлении по отношению к электронам):

$$-n_i(x)v_i(x)S + n_i(x + dx)v_i(x + dx)S + (\alpha n_e v_e + \beta n_i v_i)Sdx + qSdx = 0.$$

Здесь пренебрегаем рекомбинацией электронов и ионов, т.к. рассматриваем ток насыщения.

Заметим, что в математике существует правило

$$f(x + dx) = f(x) + \frac{df(x)}{dx} \cdot dx.$$

Применяя указанное соотношение, получим

$$-\frac{d}{dx}(n_e v_e) + \alpha n_e v_e + \beta n_i v_i + q = 0\,; \qquad \frac{d}{dx}(n_i v_i) + \alpha n_e v_e + \beta n_i v_i + q = 0\,.$$

Умножим эти уравнения на элементарный заряд и учтем, что $j_e = en_e v_e$; $j_i = en_i v_i$ – плотности токов электронов и положительных ионов. В результате имеем

$$\frac{dj_e}{dx} - \alpha j_e - \beta j_i - qe = 0; \qquad \frac{dj_i}{dx} + \alpha j_e + \beta j_i + qe = 0.$$

Складывая два последних уравнения, получаем

$$\frac{dj_e}{dx} + \frac{dj_i}{dx} = 0, \text{ т.е. } j_e + j_i = j = \text{const}.$$

Полная плотность электрического тока на всем протяжении от анода к катоду остается постоянной. Исключив из уравнения плотность ионного тока j_i (или j_e), получаем:

$$\frac{dj_e}{dx} - (\alpha - \beta) j_e = \beta j + q. \tag{1}$$

Необходимо отметить, что в общем случае из-за неоднородности электрического поля в объеме газа коэффициенты α и β зависят от x. Лишь при малых давлениях и токах, когда поле E примерно однородно, можно считать α и β постоянными. При решении последнего уравнения считаем α и β постоянными, т.е. пространственные заряды несущественны.

Решая уравнение (1), получаем

$$j_e = Ce^{(\alpha-\beta)x} - \frac{\beta j + qe}{\alpha - \beta}; \qquad j_i = Ce^{(\alpha-\beta)x} + \frac{\alpha j + qe}{\alpha - \beta}.$$

Постоянная интегрирования C определяется из граничных условий, которые должны выполняться на электродах. Учтем дополнительно, что под действием свечения газового разряда идет эмиссия электронов с катода.

Для положительных ионов ($x = l$) – координата расположения анода

$$j_i(x = l) = qle,$$

так как плотность тока насыщения положительных ионов на аноде определена скоростью ионизации в объеме.

Для электронов на катоде ($x = 0$) граничное условие будет сложнее, т.к. под действием света с единицы площади катода ежесекундно вырывается N электронов, а под действием ионов – $\gamma j_i/e$ электронов, где γ – число электронов, вырываемых с катода одним ионом.

Поэтому для электронов на катоде имеем

$$j_e(x = 0) = qle + Ne + \gamma j_i(x = 0).$$

Используя граничные условия, получаем

$$\begin{cases} j_e(x=0) = C - \dfrac{\beta j + qe}{\alpha - \beta} = qle + Ne + \gamma j_i(x=0); \\ j_i(x=l) = -Ce^{(\alpha-\beta)l} + \dfrac{\alpha j + q}{\alpha - \beta} = qle; \\ j_i(x=0) = -C + \dfrac{\alpha j + qe}{\alpha - \beta}. \end{cases}$$

Решая данную систему, найдем полный ток

$$j = j_i(x) + j_e(x) = \frac{A - Be^{(\alpha-\beta)l}}{\Delta},$$

где $A = (1 + \gamma)[1 + l(\alpha - \beta)]qe$; $B = (Ne + qle)(\alpha - \beta) + qle(1 + \gamma)$;
$\Delta = (\beta + \gamma\alpha)e^{(\alpha - \beta)l} - (1 + \gamma)\alpha$.

Полученная зависимость показывает, что если нет внешних ионизаторов ($q = 0$, $N = 0$), то тока в газе не будет, т.к. $A = 0$, $B = 0$ при условии, что $\Delta \neq 0$ – знаменатель отличен от нуля.

При $\Delta = 0$ даже при отсутствии внешних ионизаторов через газ будет идти ток, т.к. благодаря ударной ионизации разряд станет самостоятельным.

Таким образом, получаем важное условие возникновения самостоятельного газового разряда

$$\Delta = 0;\ (\beta + \gamma\alpha)e^{(\alpha - \beta)l} = (1 + \gamma)\alpha.$$

Для развития электронных и ионных лавин в газе должно быть какое-то минимальное число свободных электронов или ионов. Такие носители всегда есть благодаря естественной ионизации.

2) Рассмотрим зависимость коэффициента ионизации на единице пути пробега электрона α от внешних условий. Чтобы электрон вызвал ударную ионизацию, он должен на пути x в поле E приобрести энергию, не меньшую W_i, – энергию ионизации: $eEx \geq W_i$, где e – элементарный заряд.

Вероятность прохождения электроном пути x без столкновения равна $\exp(-x/\lambda)$, где λ – длина свободного пробега. В нашем случае $x \geq W_i/(eE)$. Поэтому на единице пути, при длине свободного пробега λ электрон при условии $x = W_i/(eE)$. производит следующее число ионизаций ($1/\lambda$ – число столкновений на единице пути, каждое из которых приводит к ионизации с вероятностью $e^{-x/\lambda}$):

$$\alpha = aP \cdot \exp\left(-\frac{W_i}{eE\lambda}\right),\ \text{где } P \text{ – давление газа;}$$

$$\lambda = \frac{1}{aP}\ \text{(из молекулярной физики);}$$

$$\alpha = aP \cdot \exp\left(-\frac{W_i aP}{eE}\right) \text{ (здесь } a \text{ – константа)},$$

т.е. α немонотонно зависит от давления P и тем больше, чем больше напряженность E внешнего поля и меньше энергия ионизации W_i.

Также и β зависит от внешних условий: $\beta = bP \cdot \exp\left(-\frac{W_i bP}{eE}\right)$.

Длина свободного пробега иона (λ_b) много меньше, чем у электрона (λ_a), поэтому $b >> a$, следовательно, $\beta << \alpha$.

Так как $E = U/l$, где U – разность потенциалов между анодом и катодом, расположенных на расстоянии l друг от друга, то имеем

$$\alpha = Pf_1\left(\frac{U}{lp}\right); \qquad \beta = Pf_2\left(\frac{U}{lp}\right).$$

Подставляя эти зависимости в условие для возникновения самостоятельного газового разряда $(\beta + \gamma\alpha)e^{(\alpha - \beta)l} - (1 + \gamma)\alpha = 0$ (при $\gamma = 0$), получим уравнение

$$Pf_2\left(\frac{U}{Pl}\right)e^{Pl(f_2 - f_1)} - Pf_1\left(\frac{U}{Pl}\right) = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$F = \left(Pl,\ \frac{U}{Pl}\right) = 0\,.$$

Решение этого уравнения позволяет получить величину напряжения зажигания

$$U_{\text{заж}} = U(Pl),$$

т.е. разность потенциалов, при которой начнется пробой газа, есть функция произведения давления газа на расстояние между электродами. Если в разных трубах величина Pl = const, то потенциал зажигания у таких трубок одинаков. Этот закон был экспериментально установлен Пашеном в 1889 г.

3) Приведенное решение показывает, что для полного описания прохождения тока через газ следует учитывать большое число процессов – внешнюю объемную и поверхностную ионизацию, ударную ионизацию ионами и электронами, явление фотоэффекта с катода и многие другие процессы, например наличие объемных зарядов, которое приводит к изменению E поля. В теории Таундсена это не учитывается. Поэтому решение общего случая получить практически невозможно.

Решение задачи в общем виде содержит такое большое количество параметром и коэффициентов, что теряет всякую ценность, т.к. его невозможно использовать для анализа практически важных ситуаций.

Задача 5. Площадь каждого электрода ионизационной камеры 100 см^2 и расстояние между ними 6,3 см. Найти: 1) ток насыщения, если известно, что ионизатор образует в 1 см^3 за 1 с 10^9 пар одновалентных ионов каждого знака; 2) наибольшее возможное число пар ионов в 1 см^3 в условиях, когда коэффициент рекомбинации равен 10^{-6}. Сравните этот результат с концентрацией молекул воздуха при нормальных условиях.

Дано:
$S = 1 \cdot 10^{-2}$ м^2
$l = 0{,}063$ м
$q = 10^{15}$ м$^{-3}$·с$^{-1}$
$r = 10^{-12}$ м^3·с$^{-1}$

$I_н$ – ? n – ?

Решение: 1) Ток насыщения определяем по формуле ($e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл – элементарный заряд)

$$I_н = j_н S = qel \cdot S = 10^{15} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}062 \cdot 10^{-2} = 10^{-7} \text{ А}.$$

2) Наибольшее число пар ионов в 1 м^3 получится при условии, что убывание ионов происходит только за счет рекомбинации. В стационарном режиме

$$\frac{dn}{dt} = q - rn^2 = 0; \qquad n = \sqrt{\frac{q}{r}} = \sqrt{\frac{10^{15}}{10^{-12}}} \approx 3{,}2 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3}.$$

Ответ: $I_н = 10^{-7}$ А; $n \approx 3{,}2 \cdot 10^{13}$ м$^{-3}$.

Задача 6. Найти сопротивление трубки длиной 84 см и площадью поперечного сечения 5 мм^2, если она наполнена воздухом, ионизованным так, что в 1 см^3 его при равновесии имеется 10^7 пар одновалентных ионов. Подвижность ионов $b_+ = 1{,}3 \cdot 10^{-4}$ м^2/(В·с); $b_- = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ м^2/(В·с).

Дано:
$l = 0{,}84$ м
$S = 5 \cdot 10^{-6}$ м^2
$n = 10^{13}$ м$^{-3}$
$b_+ = 1{,}3 \cdot 10^{-4}$ м^2/(В·с)
$b_- = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ м^2/(В·с)

R – ?

Решение: Сопротивление трубки длиной l и сечением S равно

$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{l}{\sigma S},$$

где σ – удельная проводимость газа.

Плотность тока в трубке с ионизованным газом равна

$$j = en(b_+ + b_-)E.$$

Будем считать, что в данном случае выполняется закон Ома. Запишем его в дифференциальной форме $j = \sigma E$.

Тогда
$$R = \frac{l}{\sigma S} = \frac{l}{en(b_+ + b_-)S}.$$

Проведем вычисления:

$$R = \frac{0{,}84}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{13} \cdot (1{,}3 \cdot 10^{-4} + 1{,}8 \cdot 10^{-4}) \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 3{,}4 \cdot 10^{14} \text{ Ом}.$$

Ответ: $3{,}4 \cdot 10^{14}$ Ом.

Задача 7. Между пластинами площадью 250 см^2 каждая находится 500 см^3 водорода. Концентрация ионов в газе $5{,}3\cdot10^{13}$ м$^{-3}$. Подвижность ионов: $b_+ = 5{,}4\cdot10^{-4}$ м^2/(В·с); $b_- = 7{,}2\cdot10^{-4}$ м^2/(В·с). Между пластинами течет ток 2 мкА. Какое напряжение приложено к пластинам?

Дано:
$S = 2{,}5\cdot10^{-2}$ м$^{-2}$
$V = 5\cdot10^{-4}$ м$^{-3}$
$I = 2\cdot10^{-6}$ А
$b_+ = 5{,}4\cdot10^{-4}$ м^2/(В·с)
$b_- = 7{,}2\cdot10^{-4}$ м^2/(В·с)

U – ?

Решение: Напряжение U на пластинах конденсатора можно найти, зная связь между напряженностью E и расстоянием d между пластинами:

$U = Ed$, где $d = V/S$.

Тогда $$U = EV/S. \qquad (1)$$

Напряженность E найдем, зная плотность тока в газе:

$$j = I/S = en(b_+ + b_-)E. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) найдем искомую величину

$$U = \frac{I\cdot V}{en(b_+ + b_-)S^2}.$$

Вычисление:

$$U = \frac{2\cdot10^{-6}\cdot5\cdot10^{-4}}{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot5{,}3\cdot10^{13}\cdot\left(5{,}4+7{,}2\right)\cdot10^{-4}\cdot\left(2{,}5\cdot10^{-2}\right)^2} = 149{,}5 \text{ В}.$$

Ответ: $U = 149{,}5$ В.

Задача 8. Площадь каждого электрода ионизационной камеры 100 см^2 и расстояние между ними 6,2 см. К электродам ионизационной камеры приложена разность потенциалов 20 В. Подвижность ионов равна $b_+ = b_- = 10^{-4}$ м^2/(В·с). Коэффициент рекомбинации $r = 10^{-12}$ м^3·с$^{-1}$. Ионизатор образует 10^{15} ионов в 1 м^3 за 1 с. Найти ток в камере.

Дано:
$S = 1\cdot10^{-2}$ м^2
$l = 6{,}2\cdot10^{-2}$ м
$U = 20$ В
$r = 10^{-12}$ м^3·с$^{-1}$
$q = 10^{15}$ м$^{-3}$·с$^{-1}$
$b_+ = b_- = 10^{-4}$ м^2/(В·с)

I – ?

Решение: Ясно, что $I = j\cdot S$. В условиях, когда существует рекомбинация и нет тока насыщения (в условии задачи ничего не оговорено дополнительно), имеем (стационарный режим)

$$\frac{dn}{dt} = q - rn^2 = 0; \quad n = \sqrt{\frac{q}{r}}. \qquad (1)$$

Тогда

$$I = en(b_+ + b_-)ES. \qquad (2)$$

По условию задачи ясно, что

$$E = U/l. \qquad (3)$$

Из (1) – (3) окончательно имеем

$$I = e\sqrt{\frac{q}{r}}\left(b_+ + b_-\right)\frac{U}{l}S;$$

$$I = 1,6\cdot 10^{-19}\cdot\sqrt{\frac{10^{15}}{10^{-12}}}\cdot\left(1\cdot 10^{-4} + 1\cdot 10^{-4}\right)\cdot\frac{20}{6,2\cdot 10^{-2}}\cdot 1\cdot 10^{-2} = 3,27\cdot 10^{-9}\text{ А.} \approx 3,3\text{ нА.}$$

Ответ: I = 3,3 нА.

Качественные задачи

9.2.1. Какие опыты с простейшими приборами и устройствами Вы могли бы предложить для обнаружения и доказательства электропроводности газов? От каких условий зависит величина электропроводности газов? Какова величина токов в газах, создаваемых под действием внешних ионизаторов?

9.2.2. Обладают ли электропроводностью пары металлов? Что такое объемная и поверхностная ионизация и рекомбинация? От чего зависят величины скорости объемной ионизации газа (q) и рекомбинации ионов газа (r)?

9.2.3. Пусть в единице объема в единицу времени создается q пар ионов различных знаков ($[q]$ = м$^{-3}$·с$^{-1}$). Ионы исчезают благодаря рекомбинации между собой. Число рекомбинаций в единицу времени в единице объема равно r ($[r]$ = м^3·с$^{-1}$). Найти стационарную концентрацию ионов в газе.

9.2.4. Что такое энергия ионизации атомов и молекул, что такое потенциал ионизации атома и молекулы? Опишите опыты по определению энергии ионизации методом электронного удара.

9.2.5. Нарисуйте зависимость тока проводимости газа I при несамостоятельном газовом разряде от величины, приложенной к электродам разности потенциалов. Укажите участок, где выполняется закон Ома и почему? Что такое ток насыщения $I_{нас}$, укажите его на графике? Каким образом можно увеличить $I_{нас}$? На каком участке зависимости $I = I(U)$ происходит переход от несамостоятельного газового разряда к самостоятельному и с какими физическими процессами связан такой переход?

9.2.6. Какой разряд называется несамостоятельным газовым разрядом? Чему равна и как определяется плотность электрического тока в газах? Что такое подвижность зарядов? Энергия ионизации W_i, b_+, b_- (указать их размерность)? Чему равна и чем определяется плотность электрического тока в случае несамостоятельного газового разряда в слабых электрических полях?

9.2.7. Опишите явление ударной ионизации газа электронами и положительными ионами. Пусть α – среднее число ионов одного знака, производимых электроном на единице пути; β – среднее число ионов одного знака, производимых положительными ионами на единице пути (α, β – коэффициенты ионизации электронами и ионами). Какая из этих величин больше и почему?

9.2.8. На графике (рис. 9.6) приведена зависимость тока ударной ионизации в цилиндре между стенкой и центральной проволокой (рис. 9.5). Каков знак потенциала центральной проволоки для случая первой и второй кривой? (Прочитай вопрос 9.2.7).

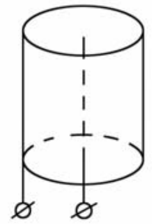


Рис. 9.5

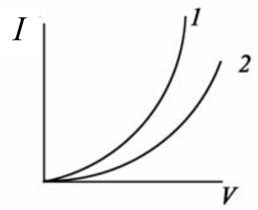


Рис. 9.6

9.2.9. Чем определяется разность потенциалов между электродами трубки, необходимая для возникновения пробоя газа, и почему? Сформулируйте закон Пашена (1865 – 1947). При каких условиях наблюдаются отклонения от данного закона?

9.2.10. Опишите явление тлеющего газового разряда, является ли данный вид разряда самостоятельным? Укажите буквы, которыми на рисунке 9.7 обозначены астоново темное пространство и тлеющее свечение. Какая зависимость изображена на графике (рис. 9.8)? Что произойдет, если катодное темное пространство достигнет анода?

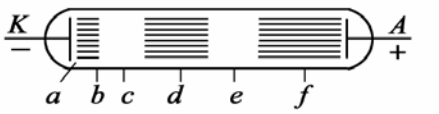


Рис. 9.7

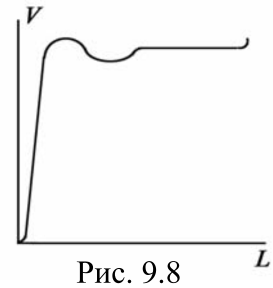


Рис. 9.8

9.2.11. Что такое искровой разряд? Каков его потенциал зажигания? Что произойдет при сильном увеличении мощности источника тока, вызывающего искровой разряд? Какова температура газа в канале искрового разряда и с чем связаны звуковые эффекты, сопровождающие искровой разряд?

9.2.12. Каково время развития искрового разряда? В чем состоит стримерная теория искрового пробоя? В каких явлениях природы проявляются положительные и отрицательный стримеры?

9.2.13. При каких условиях возникает коронный разряд? Какова напряженность электрического поля, необходимая для возникновения разряда? Каков механизм возникновения коронного разряда?

9.2.14. Что такое токи утечки и как они связаны с явлением коронного разряда? Каковы способы борьбы с этим явлением на линиях высоковольтных электропередач? Пояснить физические основы данных способов. Как работает электрический фильтр?

9.2.15. Кем и когда открыт дуговой разряд? При каких токах и напряжениях возникает дуговой разряд, какова температура в кратере анода при дуговом разряде, какой средней энергии теплового движения она соответствует? Результат выразить в электронвольтах.

9.2.16. За счет чего поддерживается дуговой разряд? Каков физический механизм возникновения дугового разряда? Почему дуга имеет падающую вольт-амперную характеристику? Области применения дугового разряда.

9.2.17. Какое состояние вещества называется плазмой? Почему плазма ведет себя как связанный коллектив заряженных частиц? Где в природе встречается слабо ионизованная плазма (α – степень ионизации $\leq 10^{-3}$), умеренно ионизованная плазма ($\alpha \geq 10^{-2} - 10^{-1}$), полностью ионизованная плазма ($\alpha = 1$)?

9.2.18. Почему в газоразрядной плазме, находящейся в электрическом поле, следует вводить отдельно температуры для электронной и ионной составляющих? Как сильно различаются эти температуры?

9.2.19. Опишите наиболее важное практическое применение высокотемпературной плазмы, управляемый термоядерный синтез. Почему для его осуществления температура плазмы должна быть $10^7 - 10^8$ К? Каковы способы изоляции плазмы от стенок реактора?

9.2.20. Опишите принцип действия плазменного магнитогидродинамического генератора. Чем определяется мощность такого генератора, каков его КПД?

9.2.21. Опишите принцип работы ионизационной камеры без газового усиления. Чем отличается импульсный режим работы ионизационной камеры от интегрирующего?

9.2.22. Опишите принцип работы пропорционального счетчика. К какой области газового разряда относится состояние газа внутри счетчика при попадании в него заряженной частицы. Какие характеристики заряженной частицы позволяет определить пропорциональный счетчик?

9.2.23. Какую долю своей кинетической энергии W может передать легкий электрон массой m, ускоренный электрическим полем, при упругом соударении с молекулой, обладающей много большей массой M? Как данный результат проявляется в неизотермической плазме?

9.2.24. Какую природу имеют катодные лучи, возникающие при тлеющем разряде? Как можно установить знак заряда катодных лучей и отношение e/m (e – величина заряда; m – масса заряда)? Опишите применение катодных лучей.

9.2.25. Какую долю своей энергии ΔW может передать на возбуждение молекулы электрон массой m, ускоренный электрическим полем, при неупругом соударении с молекулой массой M ($M >> m$)?

Краткие ответы на качественные задачи

9.2.1. Убедительным и простым является опыт Бойса (1889). Листочки электроскопа на тонком и длинном – и толстом и коротком кварцевом цилиндрах опускались с равными скоростями. Это было бы не так, если бы ток шел через цилиндры. Токи $10^{-10} \div 10^{-16}$ А.

9.2.2. Пары металлов не обладают электропроводностью, т.к. в нормальном состоянии их атомы нейтральны. Вырывание электронов из электронной оболочки атома или молекулы называется ионизацией, она может происходить в объеме свободного газа и на поверхности стенок сосуда, содержащего газ.

9.2.3. Сколько ионов появляется q, столько же в стационарном случае их исчезает rn^2 (n^2, т.к. скорость рекомбинации пропорциональна произведению концентрации положительных и отрицательных ионов $n_+ = n_- = n$) $q = rn^2$; $n = \sqrt{q/r}$.

9.2.4. Минимальная энергия, необходимая для удаления электрона из атома или молекулы, называется энергией ионизации атомов или молекулы, измеряется в электронвольтах (эВ). Разность потенциалов, которую должен пройти электрон, чтобы приобрести энергию, равную энергии ионизации, называется потенциалом ионизации.

9.2.5. График зависимости тока от напряжения имеет вид (рис. 9.9).

1. На участке *OA* выполняется закон Ома.
2. Участок *BC* соответствующий току насыщения.
3. На участке *CE* – переход к самостоятельному газовому разряду.

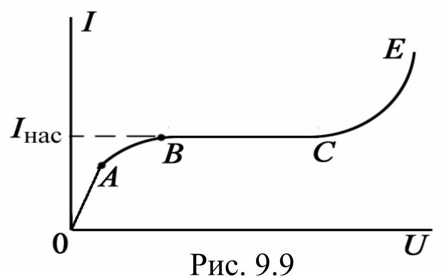


Рис. 9.9

9.2.6. Если электрический разряд в газе происходит только при внешнем воздействии, вызывающем и поддерживающем ионизацию, его называют несамостоятельным. Плотность тока в разряде равна $j = ne(b_+ + b_-)E$, где b_+, b_- – подвижности положительных и отрицательных зарядов. Подвижность – отношение скорости направленного движения заряда к величине напряженности поля E, вызывающего движение [м^2/(В·с)]. Токи малы $10^{-6} - 10^{-10}$ (А/м^2).

9.2.7. Пройдя в электрическом поле напряженностью **E** свободно без соударений путь x, электрон (ион) может приобрести энергию eEx, достаточную для ионизации нейтрального атома или молекулы при неупругом ударе. Условие ионизации $eEx \geq W_i$, где W_i – энергия ионизации. Вероятность того, что частица пройдет путь x без удара, равна $e^{-x/\lambda}$, где λ – длина свободного пробега. Число столкновений на единице пути равно $1/\lambda$, вероятность того, что при каждой столкновении произойдет ионизация, равная $\exp\left(-\dfrac{W_i}{eEx}\right)$. Число ионизаций на единицу пути равно

$$\alpha = \frac{1}{\lambda}\exp\left(-\frac{W_i}{eE\lambda}\right) = aP\cdot\exp\left(-\frac{W_i aP}{eE}\right),$$

где $\lambda = 1/(aP)$, a – постоянная; P – давление газа.

Для ионов $\beta = bP\cdot\exp\left(-\dfrac{W_i bP}{eE}\right)$.

Длина λ свободного пробега иона много меньше, чем у электрона, поэтому $b >> a$, $\beta << \alpha$.

9.2.8. Поле между цилиндром и нитью неоднородно. Максимальная напряженность поля реализуется вблизи нити. Поэтому процессы ионизации начинаются вблизи нити. Поскольку число ионизаций на единице пути для электронов α много больше той же величины для ионов β (см. ответ 9.2.7), то в 1-м случае к центральной нити приложен положительный потенциал, и электроны, ускоряясь, активнее ионизуют газ. Поэтому ток растет быстрее. Во втором случае к центральной нити приложен отрицательный потенциал, ток в газе в этом случае связан с ударной ионизацией положительными ионами, рост более медленный.

9.2.9. Разность потенциалов определяется длиной трубки l и давлением P газа в ней; для трубок, у которых $Pl = \text{const}$, потенциал зажигания одинаков для данного газа – закон Ф. Пашена (1889). Отклонения от закона Пашена наблюдаются при больших давлениях порядка сотен атмосфер.

9.2.10. Тлеющий разряд – самостоятельный разряд, a – астоново темное пространство, где электроны, вышедшие из катода, не успели приобрести энергии, достаточной для возбуждения атомов и молекул газа; d – тлеющее свечение – свечение возникает из-за рекомбинации электронов с положительными ионами. На рисунке изображено падение потенциала вдоль газоразрядной трубки. Если катодное пространство распространится до анода, то разряд в трубке погаснет.

9.2.11. Искровой разряд – разряд прерывистой формы, даже при действии источника постоянного тока. Разряд состоит из искровых каналов. Возникает при больших давлениях газа ($P \geq 1$ атм), потенциал зажигания высок: 30 кВ при промежутке в 1 см. Ток в разряде до сотен килоампер, температура ~10^4 К. При большой мощности источника тока разряд переходит в дуговой. Звуковые эффекты связаны с ударной волной, возникающей при быстром нагреве воздуха до очень высоких температур.

9.2.12. Время развития искрового разряда $\leq 10^{-7}$ с. Общепринята стримерная теория искрового разряда. Количественно она не завершена. Если вблизи катода возникла лавина электронов, то на своем пути она ионизирует и возбуждает молекулы газа. Возбужденные молекулы испускают кванты света. Кванты света, двигаясь к аноду со скоростью света, сами ионизируют атомы и молекулы газа и дают начало новым электронным лавинам. Таким образом, во всем объеме газа появляются слабо светящиеся скопления ионизованного газа, называемые стримерами. В процессе своего развития электронные лавины сливаются друг с другом и образуют хорошо проводящий мостик из стримеров. По этому мостику и устремляется мощный поток электронов, образующий канал искрового разряда. Наряду с отрицательными стримерами, распространяющимися от катода к аноду, существуют и положительные стримеры, движущиеся от анода к катоду. Стример движется с линейной скоростью, равной ≈ 1/6 скорости света, в течение времени ~ 50 мкс. Положительные и отрицательные стримеры встречаются при грозах.

9.2.13. Коронный разряд возникает при сравнительно высоких давлениях в сильно неоднородном электрическом поле. Напряженность поля порядка 10^4 В/см. Если корона возникает вокруг отрицательного электрода, то это отрицательная корона, в противном случае мы имеем положительную корону. Коронный разряд возникает в случае отрицательной короны, за счет вторичной эмиссии электронов из катода, выбиваемых ускоренными положительными ионами. В положительной короне электронные лавины порождаются электронами. Электроны вблизи анода появляются под действием фотонов, излучаемых коронирующим слоем.

9.2.14. Образуясь вокруг проводов высоковольтных линий передач электроэнергии, корона ионизует окружающий воздух, вследствие чего возникают вредные токи утечки. Для уменьшения вредных токов утечки провода должны быть достаточно толстыми. Коронный разряд используют в электрофильтрах – заряжая отрицательно частицы выбросов и осаждая их на стенках трубы.

9.2.15. Дуговой разряд открыт в 1802 г. русским физиком В.В. Петровым (1761 – 1634) и независимо в 1808 г. английским химиком Дэви (1778 – 1829). Обычно дуговой разряд возникает при токах 10 – 20 А, напряжении 40 – 50 В. Температура в кратере анода 4000 – 7000 К ($E \approx 5 - 10$ эВ).

9.2.16. Согласно В.Ф. Миткевичу (1872 – 1951), дуговой разряд поддерживается за счет термоэлектронной эмиссии, поскольку благодаря разогреву катода бомбардирующими положительными ионами появляется термоэлектронный ток. С возрастанием тока разряда, сопротивление дуги R уменьшается из-за увеличения термоэлектронной эмиссии, сопротивление падает быстрее, чем растет ток, поэтому с увеличением тока I напряжение на разрядном промежутке падает: $U = IR$.

9.2.17. Плазма – ионизованный квазинейтральный газ, занимающий настолько большой объем, что в нем не происходит заметного нарушения квазинейтральности из-за тепловых флуктуаций. Плазма – это коллектив заряженных частиц, а не простая совокупность изолированных частиц, поскольку должно соблюдаться условие квазинейтральности. Слабоионизованная плазма – ионосфера. Умеренно ионизованная плазма – межзвездные газовые туманности. Полностью ионизованная плазма – в недрах Солнца и звезд.

9.2.18. Большое различие в массах электронов и ионов плазмы делает возможным существование в плазме квазиравновесных состояний электронов и ионов, которые могут быть характеризованы двумя температурами: T_e – электронной и T_i – ионной, причем $T_e >> T_i$. Например, при $P = 0{,}1$ мм рт. ст. в тлеющем разряде $T_e = 5 \cdot 10^4$ °С, $T_i \approx 300 - 500$ °С.

9.2.19. Температуры T должны быть столь высоки, чтобы за счет кинетической энергии сталкивающихся ядер $\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT$ им можно было сблизиться на расстояние порядка межъядерного взаимодействия $\frac{z^2e^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_0} = \frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT$, где $r_0 = 2 \cdot 10^{-15}$ м. Для $z = 1$ и $\varepsilon = 1$ получим

$$T = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2z^2e^2}{3kr_0} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot \left(1{,}6 \cdot 10^{-19}\right)^2}{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 2 \cdot 10^{-15}} \approx 5 \cdot 10^9 \text{ К}.$$

Однако из-за туннельного эффекта эта величина может быть уменьшена до 10^7 К. Изоляция такой горячей плазмы от стенок реактора осуществляется с помощью магнитной термоизоляции.

9.2.20. Принцип действия МГД генератора основан на разделении заряженных частиц быстро движущейся плазмы поперечным магнитным полем (под действием силы Лоренца).

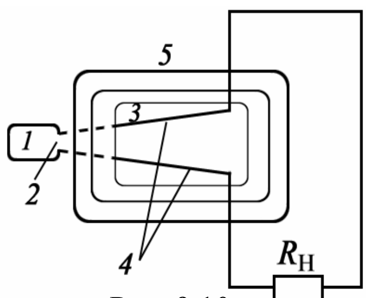


Рис. 9.10

Мощность генератора $N \sim 6v^2B^2$. Так, для B = 3 Тл и v = 2000 м/с, $N = 2\cdot10^3$ МВт/м^3, КПД ≈ 20 %. На рисунке 9.10: *1* – Генератор плазмы; *2* – Сопло; *3* – МГД-канал; *4* – Электроды с последовательно включенной нагрузкой; *5* – Магнитная система, создающая тормозящее магнитное поле.

9.2.21. В ионизационной камере без газового усиления ток идет за счет ионизации газа между обкладками конденсатора. Величина тока при работе камеры в интегральном режиме пропорциональна числу частиц, попавших в камеру. Временнóе разрешение в интегральном режиме ($\tau = RC = 10^{15}\cdot10^{-11} = 10^4$ с). В импульсном режиме ($\tau = RC = 10^{8}\cdot10^{-11} = 10^{-3}$ с). Камера может следить за быстродействующими друг за другом заряженными частицами.

9.2.22. В пропорциональном счетчике импульсы, вызываемые отдельными частицами, могут быть усилены в $10^3 - 10^4$ раз. Напряжение между электродами в камере попадает в область газового разряда – область пропорциональности, когда электроны, возникающие вблизи нити, могут быть ускорены до энергии, достаточной для ударной ионизации. Счетчик обычно выполняется в виде запаянной трубки, по центру которой натянута тонкая нить. По величине импульсов могут быть разделены частицы различной природы, а также разделены одинаковые частицы, но с разной энергией.

9.2.23. При упругом ударе выполняется закон сохранения энергии и импульса (тяжелая молекула для простоты считается покоящейся).

$$\begin{cases} \dfrac{mv_1^2}{2} = \dfrac{Mv^2}{2} + \dfrac{mv_2^2}{2}; \\ mv_1 = Mv - mv_2. \end{cases}$$

Переданная энергия равна

$$\Delta W = \frac{Mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2}\cdot\frac{4mM}{\left(m+M\right)^2} = W\cdot\frac{4mM}{\left(m+M\right)^2} \approx W\cdot\frac{4m}{M} << W.$$

Такой процесс характерен для плазмы – электрон обладает большой энергией, способен передавать тяжелому положительному иону лишь малую энергию, поэтому температуры ионов T_i и электронов T_e резко различны ($T_e >> T_i$) и долго не выравниваются.

9.2.24. Катодные лучи – пучок электронов, двигающихся от катода к аноду при малых давлениях газа в газоразрядной трубке $P = 0{,}01 \div 0{,}001$ мм рт. ст., когда катодное темное пространство распространяется до анода. По отклонению пучка этих частиц в поперечном магнитном поле может быть определен знак и отношение e/m – удельный заряд. Катодные лучи используют в ионных рентгеновских трубках для получения рентгеновских лучей.

9.2.25. При неупругом ударе законы сохранения энергии и импульса имеют вид (ΔW – энергия возбуждения молекулы)

$$\begin{cases} \dfrac{mv_1^2}{2} = \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{Mv^2}{2} + \Delta W; \\ mv_1 = mv + Mv, \end{cases}$$

откуда получаем

$$\Delta W = Mv_1 v - \frac{m+M}{m} \cdot \frac{Mv^2}{2}.$$

На возбуждение будет передаваться максимум энергии

$$\left(\frac{\partial \Delta W}{\partial v} = 0 \right) \text{ при } v = \frac{m}{M+m} v_1,$$

что соответствует максимальной переданной энергии ($M >> m$)

$$\Delta W_{\max} = \frac{M}{m+M} W \cong W.$$

В этом случае передается почти вся энергия электрона, что и имеет место при столкновении электрона с нейтральными атомами.

Задачи для самостоятельного решения

9.3.1. Какой наименьшей скоростью должен обладать электрон для того, чтобы ионизовать атом водорода? Потенциал ионизации атома водорода U = 13,6 В.

Ответ: $v = \sqrt{2eU/m_e} \approx 2,2 \cdot 10^6$ м/с.

9.3.2. При какой температуре атомы ртути имеют среднюю кинетическую энергию поступательного движения, достаточную для ионизации? Потенциал U ионизации атома ртути 10,4 В.

Ответ: $T = 2eU/(3k) = 8{\cdot}10^4$ К, где k – постоянная Больцмана.

9.3.3. При освещении сосуда с газом рентгеновскими лучами в 1 см^3 ионизируется $\Delta n/\Delta t$ = 10^{16} с$^{-1}$ молекул. В результате рекомбинации в сосуде установилось равновесие при концентрации n = 10^8 см$^{-3}$ ионов. Найти коэффициент рекомбинации.

Ответ: $r = (\Delta n/\Delta t)/n^2 = 10^{-6}$ м^3·с$^{-1}$.

9.3.4. Потенциал ионизации φ_i атома гелия равен 24,5 В. Найти энергию ионизации W_i.

Ответ: $W_i = e\varphi_i \approx 4{\cdot}10^{-18}$ Дж.

9.3.5. Энергия ионизации атома водорода W_i = 2,18·10^{-18} Дж. Определить потенциал ионизации водорода φ_i.

Ответ: $\varphi_i = W_i/e$ = 13,6 В.

9.3.6. Какой наименьшей скоростью v должен обладать электрон, чтобы ионизировать атом азота, если потенциал ионизации азота U = 14,5 В.

Ответ: $v = \sqrt{2eU/m_e} \approx 2,3 \cdot 10^6$ м/с.

9.3.7. Азот ионизируется рентгеновскими лучами. Определить проводимость азота, если концентрация заряженных ионов и электронов в условиях равновесия 10^{13} м$^{-3}$. Подвижность равна b_+ = 1,27·10^{-4} м^2/(В·с); b_- = 1,81·10^{-4} м^2/(В·с).

Ответ: $\sigma = en(b_+ + b_-)$ = 5·10^{-10} См.

9.3.8. В ионизационной камере ток насыщения плотностью $j_{\text{нас}}$ = 16 мкА/м^2 проходит между пластинами, расположенными на расстоянии l = 5 см. Определить эффективность q ионизатора.

Ответ: $q = j_{\text{нас}}/(el)$ = 2·10^{15} м$^{-3}$·с$^{-1}$.

9.3.9. Объем газа V = 0,5 л, заключенного между электродами ионизационной камеры, ионизируется рентгеновскими лучами. Сила тока насыщения $I_{\text{нас}}$ = 4 нА. Определить скорость генерации q ионов. Ионы одновалентные.

Ответ: $q = I_{\text{нас}}/(eV)$ = 5·10^{13} м$^{-3}$·с$^{-1}$.

9.3.10. Ток насыщения при несамостоятельном разряде $I_{\text{нас}}$ = 6,4 нА. Найдите эффективность ионизатора q. Объем газа в разрядном промежутке V = 0,25 л.

Ответ: $q = I_{\text{нас}}/(eV)$ = 10^7 м$^{-3}$·с$^{-1}$.

9.3.11. Определить ток насыщения $I_{\text{нас}}$ между плоскими электродами S = 100 см^2, расположенными на расстоянии l = 10 см. Ионы однозарядные. Ионизатор естественный n_0 = 5 см$^{-3}$·с$^{-1}$.

Ответ: $I_{\text{нас}} = en_0lS$ = 8·10^{-16} А.

9.3.12. Какую ускоренную разность потенциалов U должны пройти ионы водорода, чтобы вызвать ионизацию азота, потенциал ионизации которого φ_i = 14,5 В.

Ответ: $U = \dfrac{m+M}{M} \cdot \varphi_i = 15,54$ В,

где m и M – масса атома водорода и азота.

9.3.13. Какова концентрация одновалентных ионов в воздухе, если при напряженности поля E = 34 В/м плотность тока j = 2·10^{-6} А/м^2? b_+ = 1,38·10^{-4} м^2·В$^{-1}$·с$^{-1}$; b_- = 1,91·10^{-4} м^2·В$^{-1}$·с$^{-1}$.

Ответ: $n = \dfrac{j}{e(b_- + b_+)E} = 1,1 \cdot 10^{15}$ м$^{-3}$.

9.3.14. Первоначальная концентрация n_0 = 1,5·10^{15} м$^{-3}$ пар ионов вещества за счет рекомбинации уменьшается в η = 3 раза. За какое время t этот процесс происходит, если коэффициент рекомбинации r = 1,67·10^{-15} м^3·с$^{-1}$.

Ответ: $t = (\eta - 1)/(n_0 r) = 0{,}8$ с.

9.3.15. Найти коэффициент рекомбинации r в ионизованном газе, если за время t = 0,5 с после прекращения действия ионизатора первоначальная концентрация пар ионов n_0 = 2·10^{15} м$^{-3}$ уменьшилась в η = 5 раз.

Ответ: $r = (\eta - 1)/(n_0 t) = 4 \cdot 10^{-15}$ м^3/с.

9.3.16. Подвижность ионов азота b_- = 1,9·10^{-4} м^2/(В·с). Определить подвижность b_+ азота, если концентрация пар ионов n = 9,75·10^8 м$^{-3}$ при j = 5·10^{-11} А/м^2, E = 10^3 В/м,

Ответ: $b_+ = \dfrac{j}{neE} - b_- = 1{,}3 \cdot 10^{-4}$ м^2 /(В·с).

9.3.17. Через какой промежуток времени t после прекращения действия ионизатора число пар ионов вследствие рекомбинации уменьшится в η = 2 раза, если первоначальное число пар ионов n_0 = 1,5·10^{15} м$^{-3}$? Коэффициент рекомбинации r = 1,67·10^{-15} м^3·с$^{-1}$.

Ответ: $t = (\eta - 1)/(n_0 r) = 0{,}4$ с.

9.3.18. Определить первый потенциал ионизации молекулы одноатомного газа массой M, если для ударной ионизации нужно, чтобы электрон m_e прошел ускоряющую разность потенциалов U. Указание: Применить закон сохранения импульса и энергии.

Ответ: $\varphi_i = \dfrac{U}{1 + (m/M)}$.

9.3.19. Доказать, что минимальная кинетическая энергия, которой должны обладать электрон для ионизации молекулы одноатомного газа, равна $W_{\text{кин}} = W_i\left(1 + \dfrac{m}{M}\right)$, где W_i –энергия, необходимая для ионизации молекулы; M и m – масса молекулы и электрона соответственно.
Указание: Применить закон сохранения импульса и энергии.

9.3.20. Средняя напряженность электрического поля Земли составляет 130 В/м. Определить плотность тока проводимости в воздухе, если в 1 м^3 находится n = 7·10^8 м$^{-3}$ пар одновалентных ионов, обусловливающих проводимость. Подвижность ионов b_+ = 1,3·10^{-4} м^2/(В·с); b_- = = 1,8·10^{-4} м^2/(В·с).

Ответ: $j = enE(b_+ + b_-) = 4{,}5 \cdot 10^{-12}$ А/м^2.

9.3.21. Сила тока, текущего через ионизационную камеру, I = 2,4 мкА. Площадь электродов камеры S = 100 см^2, расстояние между ними l = 2 см, разность потенциалов U = 100 В. Какова концентрация ионов в ионизационной камере, если $b_+ = 1{,}4\cdot10^{-4}$ м^2/(В·с); $b_- = 1{,}9\cdot10^{-4}$ м^2/(В·с).

Ответ: $n = \dfrac{Il}{SeU(b_+ + b_-)} = 9{,}1\cdot10^{14}\ \text{м}^{-3}$.

9.3.22. Плотность тока насыщения в ионизационной камере $j_{\text{нас}}$ = = 8 мкА/м^2. Расстояние между электродами h = 0,05 м. Определить, сколько пар одновалентных ионов N образуется под действием ионизатора ежесекундно в единице объема.

Ответ: $q = N/(Vt) = j_{\text{нас}}/(eh) = 1\cdot10^{15}$ м$^{-3}\cdot$с$^{-1}$.

9.3.23. Азот ионизируется рентгеновскими лучами. Определить проводимость азота σ, если в условиях равновесия концентрация пар одновалентных ионов $n_0 = 10^6$ см$^{-3}$. Подвижность ионов равна $b_+ = 1{,}3\cdot10^{-4}$ м^2/(В·с), $b_- = 1{,}8\cdot10^{-4}$ м^2/(В·с).

Ответ· $\sigma = en(b_+ + b_-) = 5\cdot10^{-11}$ См.

9.3.24. Посредине между электродами в газоразрядной трубке пролетела α-частица, двигаясь параллельно электродам, и образовала на своем пути цепочку ионов. Через какое время τ ионы дойдут до электродов, если разность потенциалов U = 5000 В, расстояние между электродами d = 4 см, а подвижность ионов $b_\pm = 2\cdot10^{-4}$ м^2/(В·с).

Ответ: $\tau = d^2/(2b_\pm U)$ = 0,8 мс.

9.3.25. Газ, заключенный в ионизационной камере между плоскими пластинами, облучается рентгеновскими лучами. Определить плотность тока насыщения, если ионизатор образует $q = 4{,}5\cdot10^{13}$ см$^{-3}\cdot$с$^{-1}$. Принять, что каждый ион несет элементарный заряд. Расстояние между пластинами камеры d = 1,5 см.

Ответ: $j_{\text{нас}} = eqd \approx 0{,}11$ А/м^2.

В. Ток в вакууме

Основные формулы и обозначения

Плотность тока насыщения термоэмиссии электронов (формула Ричардсона – Дэшмана)

$$j_H = BT^2 \exp\left(-\frac{A}{kT}\right),$$

где $B=\dfrac{mek^2}{2\pi^2\hbar^3}=1{,}2\cdot 10^6$ А/(м$^2\cdot$К^2) $=120$ А/(см$^2\cdot$К^2); m – масса электрона; A – работа выхода электронов из металла; T – температура катода; e – элементарный заряд; k – постоянная Больцмана; $\hbar$ – постоянная Планка.

Для реальных металлов B = 15 – 350 А / (см^2·К^2).

Плотность тока в вакууме (в вакуумном диоде). Закон «трех вторых» Ленгмюра

$$j = CV^{3/2},$$

где $C=\dfrac{4}{9l^2}\sqrt{\dfrac{2e\varepsilon_0}{m}}$; V – напряжение между катодом и анодом; l – расстояние между катодом и анодом.

Задачи с решениями

Задача 1. Плотность тока насыщения двухэлектродной лампы при температуре T_1 равна j_{H1}, а при температуре T_2 – j_{H2}. Как определить материал, из которого сделан катод лампы?

Решение: Материал можно определить, зная работу выхода электронов из металла A. По формуле Ричардсона – Дэшмана плотность тока насыщения равна $j_{\text{Н}}=BT^2\exp\left(-\dfrac{A}{kT}\right)$. Находим отношение

$$\frac{j_{H_1}}{j_{H_2}}=\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2\exp\left[\frac{A}{k}\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)\right],$$

где k – постоянная Больцмана. Теперь легко находим A.

$$A=\frac{kT_1T_2\ln\left[\left(j_{H_1}T_2^2\right)/\left(j_{H_2}T_1^2\right)\right]}{T_1-T_2}.$$

Значение A позволяет определить материал катода.

Задача 2. Во сколько раз изменится удельная термоэлектронная эмиссия вольфрама, находящегося при температуре 2400 К, если повысить температуру вольфрама на 100 °С.

Дано:	
T_1 = 2400 К	
T_2 = 2500 К	
$k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К	
j_{H2}/j_{H1} – ?	

Решение: Удельной термоэлектронной эмиссией называют плотность тока насыщения. Тогда

$$j_{\text{Н}_1}=BT_1^2\exp\left(-\frac{A}{kT_1}\right),\quad j_{\text{Н}_2}=BT_2^2\exp\left(-\frac{A}{kT_2}\right).$$

По таблице 7 находим, что

$$A = 4{,}5 \text{ эВ} = 4{,}5 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 7{,}2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

При делении получаем

$$\frac{j_{H_2}}{j_{H_1}} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \exp\left[-\frac{A}{k}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)\right].$$

Вычисляем

$$\frac{j_{H_2}}{j_{H_1}} = \left(\frac{2500}{2400}\right)^2 \exp\left[-\frac{7{,}2 \cdot 10^{-19}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}}\left(\frac{1}{2500} - \frac{1}{2400}\right)\right] = 2{,}6.$$

Ответ: $j_{H2}/j_{H1} = 2{,}6$.

Задача 3. Катод и анод электронной лампы выполнены в виде плоского конденсатора. Между ними приложена разность потенциалов U. Определить мощность, потребляемую лампой в области выполнения закона Богуславского – Люнгмюра (Б – Г), если площадь анода S, расстояние между анодом и катодом l.

Решение: Мощность при любых ситуациях равна $P = IU$. Поэтому для решения нужно вычислить ток I. Применим закон Богуславского – Люнгмюра

$$I = BU^{3/2}, \text{ где } B = \frac{\sqrt{2}}{9\pi}\sqrt{\frac{e}{m}}\frac{S}{l^2}.$$

Окончательно имеем $$P = \frac{\sqrt{2}}{9\pi}\sqrt{\frac{e}{m}}\frac{S}{l^2}U^{5/2}.$$

Отметим, что наиболее полно закон Б – Г выполняется при малых значениях напряжения между катодом и анодом.

Задача 4. Пользуясь формулой Ричардсона – Дэшмана, найти соотношение для скорости изменения плотности тока насыщения с температурой.

Решение: Формула Ричардсона – Дэшмана $j_H = BT^2 \exp\left(-\frac{A}{kT}\right)$.

Скорость изменения плотности тока насыщения с температурой T равна производной $\partial j_H / \partial T$

$$\frac{\partial j_H}{\partial T} = 2BTe^{-\frac{A}{kT}} + B\frac{A}{k}e^{-\frac{A}{kT}} = B\left(2T + \frac{A}{k}\right)\exp\left(-\frac{A}{kT}\right).$$

Задача 5. При какой температуре вольфрам, покрытый торием, будет давать такую же удельную эмиссию, какую дает чистый вольфрам при $T = 2500$ К? Эмиссионная постоянная $B_{\text{W}} = 6\cdot10^5$ А/(м$^2\cdot$К^2) для чистого вольфрама и $B_{\text{W-Th}} = 3\cdot10^4$ А/(м$^2\cdot$К^2). Принять $A_{\text{W}} = 4{,}5$ эВ; $A_{\text{W-Th}} = 2{,}63$ эВ.

Дано:
$T = 2500$ К
$B_{\text{W}} = 6\cdot10^5$ А/(м$^2\cdot$К^2)
$B_{\text{W-Th}} = 3\cdot10^4$ А/(м$^2\cdot$К^2)
$A_{\text{W}} = 7{,}2\cdot10^{-19}$ Дж
$A_{\text{W-Th}} = 4{,}21\cdot10^{-19}$ Дж
$T_x - ?$

Решение: Плотность тока насыщения для чистой поверхности W и W-Th

$$j_{\text{W}} = B_{\text{W}} T^2 \exp\left(-\frac{A_{\text{W}}}{kT}\right),$$

$$j_{\text{W-Th}} = B_{\text{W-Th}} T_x^2 \exp\left(-\frac{A_{\text{W-Th}}}{kT_x}\right).$$

По условию $j_{\text{W-Th}} = j_{\text{W}}$, тогда

$$B_{\text{W-Th}} T_x^2 \exp\left(-\frac{A_{\text{W-Th}}}{kT_x}\right) = B_{\text{W}} T^2 \exp\left(-\frac{A_{\text{W}}}{kT}\right);$$

$$T_x^2 \exp\left(-\frac{A_{\text{W-Th}}}{kT_x}\right) = \frac{B_{\text{W}}}{B_{\text{W-Th}}} T^2 \exp\left(-\frac{A_{\text{W}}}{kT}\right).$$

Подставляя числовые значения, получим

$$T_x^2 \exp\left(-\frac{3{,}05\cdot10^4}{T_x}\right) = 0{,}109.$$

Решая методом последовательных итераций (или графически), находим $T_x = 1775$ К.

Ответ: $T_x = 1775$ К.

Задача 6. Во сколько раз катод из торированного вольфрама (1) при его рабочей температуре в $T = 1800$ К дает большую удельную эмиссию, чем катод из чистого вольфрама (2) при той же температуре? Эмиссионная постоянная и работа выхода для торированного вольфрама (W-Th) $B_1 = 3\cdot10^4$ А/(м$^2\cdot$К^2) и $A_1 = 2{,}63$ эВ; для чистого вольфрама (W) $B_2 = 6\cdot10^5$ А/(м$^2\cdot$К^2) и $A_2 = 4{,}5$ эВ.

Дано:
$T = 1800$ К
$B_1 = 3\cdot10^4$ А/(м$^2\cdot$К^2)
$B_2 = 6\cdot10^5$ А/(м$^2\cdot$К^2)
$A_1 = 4{,}21\cdot10^{-19}$ Дж
$A_2 = 7{,}2\cdot10^{-19}$ Дж
$j_{H_1}/j_{H_2} - ?$

Решение: Плотность тока насыщения для торированного вольфрама W-Th и чистой поверхности W

$$j_{\text{H}_1} = B_1 T^2 \exp\left(-\frac{A_1}{kT}\right);$$

$$j_{\text{H}_2} = B_2 T^2 \exp\left(-\frac{A_2}{kT}\right).$$

Отсюда

$$\frac{j_{H_1}}{j_{H_2}} = \frac{B_1}{B_2}\exp\left[\frac{A_2 - A_1}{kT}\right] = \frac{3\cdot 10^4}{6\cdot 10^5}\cdot\exp\left[\frac{(7{,}2-4{,}21)\cdot 10^{-19}}{1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 1800}\right] = 8{,}4\cdot 10^3.$$

Ответ: в 8400 раз.

Задача 7. Согласно теоретическим представлениям $B = emk^2/(2\pi^2\hbar^3)$, где m – масса электрона; k – постоянная Больцмана; $\hbar$ – постоянная Планка. Из формулы следует, что B является постоянной для всех металлов. Однако в экспериментах для различных металлов B различны. Например, $B_{\text{Ni}} = 1{,}2\cdot 10^6$ А/(м^2·К^2); $B_{\text{Pt}} = 0{,}3\cdot 10^6$ А/(м^2·К^2). Это изменение обусловлено поверхностными эффектами. Определите, во сколько раз катод из никеля дает большую удельную эмиссию, чем катод из платины при $T = 1800$ К.

Дано:
$T = 1800$ К
$B_{\text{Ni}} = 1{,}2\cdot 10^6$ А/(м^2·К^2)
$B_{\text{Pt}} = 0{,}3\cdot 10^6$ А/(м^2·К^2)
$A_{\text{Ni}} = 7{,}74\cdot 10^{-19}$ Дж
$A_{\text{Pt}} = 8{,}49\cdot 10^{-19}$ Дж
$j_{\text{Ni}}/j_{\text{Pt}}$ – ?

Решение: Используя формулу закона Ричардсона – Дэшмана, находим для $T = \text{const}$:

$$\frac{j_{\text{Ni}}}{j_{\text{Pt}}} = \frac{B_{\text{Ni}}}{B_{\text{Pt}}}\exp\left[\frac{1}{kT}\left(A_{\text{Pt}} - A_{\text{Ni}}\right)\right].$$

Вычисляем

$$\frac{j_{\text{Ni}}}{j_{\text{Pt}}} = \frac{1{,}2}{0{,}3}\cdot\exp\left[\frac{(8{,}49-7{,}74)\cdot 10^{-19}}{1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 1800}\right] = 81{,}9\,.$$

Ответ: $j_{\text{Ni}}/j_{\text{Pt}}$ = в 81,9 раз.

Примечание. Если $B = \text{const}$, то $j_{\text{Ni}}/j_{\text{Pt}} \cong 18$.

10. КОНТАКТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Основные формулы и обозначения

Внешняя контактная разность потенциалов двух металлов

$$U_{\text{внеш}} = \varphi_1 - \varphi_2 = (A_2 - A_1)/e,$$

где A_1 и A_2 – работа выхода электронов из металла; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл – элементарный заряд.

Внутренняя контактная разность потенциалов (классическая статистика)

$$U_{\text{внутр}} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_1}{n_2},$$

где n_1 и n_2 – концентрация электронов в металлах; k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура.

Термоэлектродвижущая сила, возникающая в цепи, когда спаи (контакты) двух разнородных металлов A и B имеют разные температуры T_1 и T_2 (явление Зеебека)

$$\mathcal{E} = \frac{k}{e}(T_2 - T_1) \ln \frac{n_A}{n_B} \text{ или } \mathcal{E} = \alpha(T_2 - T_1),$$

где n_A и n_B – соответственно концентрация электронов в металлах A и B; α – удельная термоЭДС двух металлов (термопары).

В соответствии с квантовой статистикой внутренняя контактная разность потенциалов равна

$$U_{\text{внутр}} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{h^2}{8me}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\left(n_1^{2/3} - n_2^{2/3}\right),$$

где h – постоянная Планка; m – масса электрона.

Явление Пельтье. Количество выделившейся или поглощенной в спае теплоты пропорционально заряду q, прошедшему через спай.

$$Q_{12} = \Pi_{12} q = \Pi_{12} It,$$

где Π_{12} – коэффициент Пельтье (ток I течет от звена 1 к звену 2). При перемене направления тока Q изменяет знак.

$$\Pi_{12} = \alpha_{12} T,$$

где α_{12} – удельная термоЭДС.

Явление Томсона. При прохождении тока I по однородному проводнику, вдоль которого имеется градиент температуры в элементе проводника dl в единицу времени, выделяется или поглощается теплота

$$dQ = \tau I \left(\frac{dT}{dl}\right) dl,$$

где τ – коэффициент Томсона; dT/dl – градиент температуры.

При изменении направления тока тепловой эффект меняется на обратный.

Задачи с решениями

Задача 1. Зазор между пластинами плоского конденсатора d = = 1 мм. Одна из пластин изготовлена из платины, другая – из алюминия. Пластины закреплены медным проводом. Какова будет напряженность E электрического поля между пластинами? Как будет направлено поле?

Дано:
$d = 10^{-3}$ м
$A_1 = 5{,}3$ эВ
$A_2 = 3{,}74$ эВ

E – ?

Решение: Между пластинами возникнет внешняя контактная разность потенциалов. Внешнее электрическое поле **E** будет направлено от металла с меньшей работой выхода (алюминий) к металлу с большей работой выхода (рис. 10.1).

$$U_{\text{внеш}} = (A_1 - A_2)/e,$$

где $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл – элементарный заряд.

$$E = U_{\text{внеш}}/d = (A_1 - A_2)/(ed).$$

Учитывая, что 1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж, находим

$$E = \frac{(5{,}29 - 3{,}74) \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-3}} = 1560 \text{ В/м}.$$

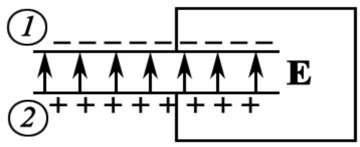


Рис. 10.1

Ответ: E = 1560 В/м.

Задача 2. Между электродами двухэлектродной лампы (диода) включена батарея с ЭДС $\mathcal{E}$ = 10 В. Материалом катода является вольфрам, материалом анода – никель. Какую кинетическую энергию K приобретают электроны на пути от катода к аноду (рис. 10.2)? Скоростью, с которой электроны вылетают из катода, можно пренебречь.

Дано:
$\mathcal{E} = 10$ В
$A_1 = 4{,}50$ эВ
$A_2 = 4{,}84$ эВ

K – ?

Решение: Между электродами лампы, выполненными из различных металлов, появится контактная разность потенциалов. Внешняя контактная разность потенциалов тормозит электроны, движущиеся к аноду, т.к. анод заряжается отрицательно, а катод – положительно.

$$U_{\text{внеш}} = \varphi_1 - \varphi_2 = (A_2 - A_1)/e,$$

где $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл – элементарный заряд.

Падением напряжения на источнике пренебрегаем. Тогда работа A электрического поля равна приращению кинетической энергии K электронов:

$$A = e(\mathcal{E} - U_{\text{внеш}}) = e\mathcal{E} - A_2 + A_1;$$

$$K = A = e\mathcal{E} - (A_2 - A_1).$$

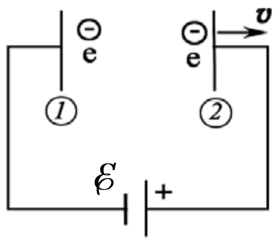


Рис. 10.2

Учитывая, что 1 эВ = $1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж, получим значение кинетической энергии электронов

$$K = 1{,}6\cdot10^{-19}\cdot10 - (4{,}84 - 4{,}5)\cdot1{,}6\cdot10^{-19} = 15{,}45\cdot10^{-19}\text{ Дж} = 9{,}66\text{ эВ}.$$

Ответ: K = 9,66 эВ.

Задача 3. Электроды вакуумного фотоэлемента (один цезиевый, другой медный) замкнуты снаружи накоротко. Цезиевый электрод освещают монохроматическим электромагнитным излучением. Найти: а) длину волны излучения, при которой появится фототок; б) максимальную скорость фотоэлектронов, подлетающих к медному электроду, если длина волны излучения равна 220 нм.

Дано:
A_1 = 1,90 эВ
A_2 = 4,50 эВ
$\lambda_2 = 2{,}2\cdot10^{-7}$ м

λ_1 – ? υ_m – ?

Решение: При контакте различных металлов электроны переходят из металла с меньшей работой выхода (цезий) в металл с большей работой выхода (медь). Поэтому внешняя контактная разность потенциалов $U_{внеш}$ тормозит электроны, движущиеся от катода к аноду.

Фототок в цепи фотоэлемента появится, когда электроны преодолеют внешнюю запирающую контактную разность потенциалов

$$U_{внеш} = (A_2 - A_1)/e,$$

где e – элементарный заряд.

Следовательно, минимальная кинетическая энергия электронов

$$K = eU_{внеш} = A_2 - A_1. \qquad (1)$$

Запишем уравнение Эйнштейна для фотоэффекта

$$hc/\lambda_1 = A_1 + K.$$

Учитывая (1), получим $hc/\lambda_1 = A_1 + (A_2 - A_1) = A_2$.

Отсюда длина волны излучения, при которой появится ток

$$\lambda_1 = hc/A_2.$$

Здесь $h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка; $c = 3\cdot10^8$ м/с – скорость света в вакууме; 1 эВ = $1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж.

$$\lambda_1 = \frac{6{,}63\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^8}{4{,}50\cdot1{,}6\cdot10^{-19}} = 2{,}76\cdot10^{-7}\text{ м} = 276\text{ нм}.$$

Для длины волны λ_2 можно записать:

$$\frac{hc}{\lambda_2} = A_1 + eU_{внеш} + \frac{m\upsilon_m^2}{2} = A_2 + \frac{m\upsilon_m^2}{2},$$

где υ_m – максимальная скорость, с которой электроны подлетают к медной пластинке; $m = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг – масса электрона.

$$\upsilon_m = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{hc}{\lambda_2} - A_2\right)}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$v_m = \sqrt{\frac{2}{9{,}1\cdot 10^{-31}}\left(\frac{6{,}63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}}{2{,}2\cdot 10^{-7}} - 4{,}50\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\right)} = 6{,}3\cdot 10^{5}\ \text{м/с}.$$

Ответ: а) $\lambda_1 = 276$ нм; б) $v_m = 6{,}3\cdot 10^5$ м/с.

Задача 4. 1) Два различных металла находятся в соприкосновении. Давление электронного газа в первом металле P_1 и работа выхода электрона из этого металла A_1; давление электронного газа во втором металле P_2 и работа выхода электрона из него A_2. Найти контактную разность потенциалов, если температура обоих металлов T. 2) Из указанных металлов составлена термопара с двумя спаями, находящимися при температурах T_1 и T_2. Найти термоэлектродвижущую силу.

Указание. Давление P электронного газа в металле связано с концентрацией n электронов и температурой T металла соотношением $P = nkT$, где k – постоянная Больцмана.

Дано:
P_1, P_2
A_1, A_2,
T, T_1, T_2

$U_{\text{внутр}}$ – ?
$\mathscr{E}$ – ?

Решение: Между наружными поверхностями металлов возникает внешняя контактная разность потенциалов

$$U_{\text{внеш}} = \varphi_1 - \varphi_2 = (A_2 - A_1)/e, \qquad (1)$$

где e – элементарный заряд.

Внутренняя разность потенциалов возникает в приконтактном слое внутри металлов. Классическая теория дает

$$U_{\text{внутр}} = \varphi_1' - \varphi_2' = \frac{kT}{e}\ln\frac{n_1}{n_2}, \qquad (2)$$

где n_1 и n_2 – концентрации свободных электронов в металлах 1 и 2.

Давления электронного газа в металлах:

$$P_1 = n_1kT, \qquad P_2 = n_2kT.$$

Отсюда находим

$$n_1/n_2 = P_1/P_2. \qquad (3)$$

Подставим отношение (3) в (2): $U_{\text{внутр}} = \dfrac{kT}{e}\ln\dfrac{P_1}{P_2}$.

2) По классической формуле термоЭДС находим:

$$\mathscr{E} = \frac{k}{e}(T_2 - T_1)\ln\frac{n_1}{n_2}.$$

Или, с учетом (3), $$\mathscr{E} = \frac{k}{e}(T_2 - T_1)\ln\frac{P_1}{P_2}.$$

Задача 5. Чему равно отношение числа свободных электронов в единице объема у висмута и сурьмы, если при нагревании одного из спаев на 100 °C возникает ЭДС $\mathscr{E} = 0{,}011$ В. Какой металл имеет больше свободных электронов в единице объема, если ток через нагретый спай идет от висмута к сурьме? Решить задачу в соответствии с классическими представлениями.

Дано:
$\Delta t = 100$ °C
$\mathscr{E} = 0{,}011$ В
$n_{\text{Sb}}/n_{\text{Bi}}$ – ?

Решение: Классическая теория дает следующую формулу для термоЭДС:

$$\mathscr{E} = \frac{k}{e}\left(T_2 - T_1\right)\ln\frac{n_A}{n_B},$$

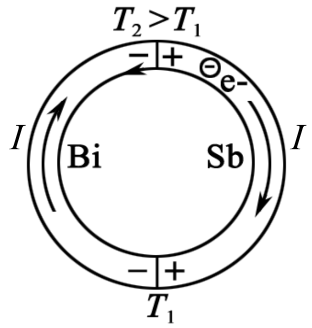


Рис. 10.3

где $T_2 - T_1 = \Delta t$ – разность температур спаев термопары; n_A и n_B – соответственно концентрация электронов в металлах A и B.

Отсюда

$$\ln\frac{n_A}{n_B} = \frac{e\mathscr{E}}{k\Delta t} = \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 0{,}011}{1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 100} = 1{,}276.$$

Следовательно, отношение концентраций свободных электронов

$$n_A/n_B = e^{1{,}276} = 3{,}58.$$

ЭДС в горячем спае всегда выше, чем в холодном, поэтому направление тока (направление движения положительно заряженных частиц) совпадает с направлением ЭДС горячего спая (рис. 10.3). Следовательно, диффузия электронов, обусловленная разностью их концентрации в металлах, в горячем спае направлена против направления тока, т.е. от сурьмы к висмуту. Значит концентрация свободных электронов в сурьме в 3,58 раз больше, чем в висмуте.

Ответ: $n_A/n_B = n_{\text{Sb}}/n_{\text{Bi}} = 3{,}58$.

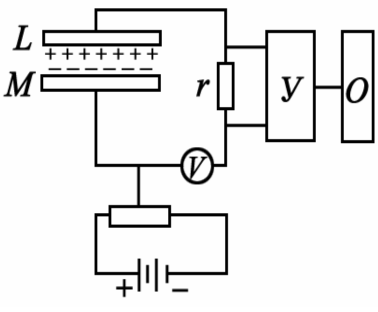


Рис. 10.4

Задача 6. Для измерения внешней контактной разности потенциалов применяется компенсационный метод. Пластинки из исследуемых материалов L и M (рис. 10.4) располагают параллельно на небольшом расстоянии друг от друга. Одна из них закреплена неподвижно, а другая колеблется с частотой $\nu = 30$ Гц. Пластинки соединены между собой проводами измерительной схемы. Между пластинками создается контактная разность потенциалов $\Delta\varphi$. На поверхности конденсатора C появляется заряд $q = C\Delta\varphi$. Так как $C(t)$, то в цепи течет ток $I = \dot{C}\Delta\varphi = \dfrac{dC}{dt}\Delta\varphi$. На сопротивлении r возникает переменное напряжение $U = r\Delta\varphi\frac{dC}{dt}$. Контактную разность потенциалов $\Delta\varphi$ компенсируют напряжением противоположного знака от батареи. Ток через сопротивление r прекращается. Осциллограф фиксирует «ноль». Определить $\Delta\varphi$, если $r = 10^7$ Ом, $C = C_0(1 + \cos\omega t)$. Площадь пластин $S = 10$ см^2, равновесное расстояние между ними $d_0 = 10$ мкм. Вольтметр показывает действующее значение $U_д = 71$ мВ.

Дано:
$\nu = 30$ Гц
$r = 10^7$ Ом
$S = 10^{-3}$ м^2
$d_0 = 10^{-5}$ м
$U_д = 0{,}071$ В

$\Delta\varphi$ – ?

Решение: Напряжение на сопротивлении r изменяется по закону

$$U(t) = r\Delta\varphi\frac{dC}{dt},$$

где $dC/dt = C_0\omega\sin\omega t$; $C_0 = \varepsilon\varepsilon_0 S/d_0$; $\varepsilon = 1$.

Следовательно, амплитудное значение напряжения

$$U_{ампл} = U_д\sqrt{2} = r\Delta\varphi\omega C_0.$$

Контактная разность потенциалов между пластинками равна

$$\Delta\varphi = \frac{U_д\sqrt{2}}{2\pi\nu r C_0} = \frac{U_д d_0}{\sqrt{2}\pi\nu r\varepsilon_0 S}$$

$$\Delta\varphi = \frac{0{,}071\cdot 10^{-5}}{\sqrt{2}\,\pi\cdot 30\cdot 10^7\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 10^{-3}} = 1{,}80 \text{ В.}$$

Ответ: $\Delta\varphi = 1{,}80$ В.

Примечание. На практике контактная разность потенциалов $\Delta\varphi$ равна величине компенсирующего напряжения батареи в момент, когда осциллограф (рис. 10.4) фиксирует «ноль». То есть $\Delta\varphi$ определяется непосредственно из эксперимента.

Задача 7. Имеется два металла с концентрацией свободных электронов $n_1 = 1{,}00\cdot 10^{28}$ м$^{-3}$ и $n_2 = 1{,}00\cdot 10^{29}$ м$^{-3}$. Определить внутреннюю контактную разность потенциалов $U_{внутр}$, возникающую при приведении этих металлов в соприкосновение, согласно квантовой теории.

Дано:
$n_1 = 1{,}00\cdot 10^{28}$ м$^{-3}$
$n_2 = 1{,}00\cdot 10^{29}$ м$^{-3}$
$h = 6{,}63\cdot 10^{-34}$ Дж·с
$m = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг
$e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл

$U_{внутр}$ – ?

Решение: При контакте металлов электроны переходят из металла с большей концентрацией в металл с меньшей концентрацией. В результате этого в приконтактном слое возникает скачок потенциала – внутренняя контактная разность потенциалов

$$U_{внутр} = \varphi_2 - \varphi_1;$$

$$U_{внутр} = \frac{h^2}{8me}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\left(n_2^{2/3} - n_1^{2/3}\right).$$

$$U_{\text{внутр}} = \frac{\left(6,63\cdot10^{-34}\right)^2}{8\cdot9,1\cdot10^{-31}\cdot1,6\cdot10^{-19}}\left(\frac{3}{3,14}\right)^{2/3}\left[\left(10^{29}\right)^{2/3}-\left(10^{28}\right)^{2/3}\right] = 6,07\ \text{В}.$$

Ответ: $U_{\text{внутр}}$ = 6,07 В.

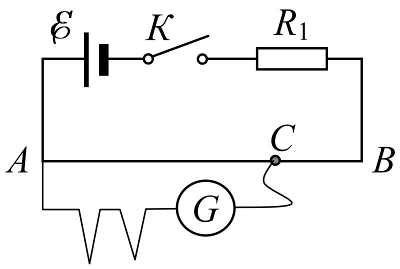


Рис. 10.5

Задача 8. Для определения ЭДС термопары методом компенсации используется схема (рис. 10.5). Вычислить величину термоЭДС, если ток через гальванометр равен нулю, когда $l_1 = AC$ = 40 см; $AB = l$ = 100 см; $\mathcal{E}_\sigma$ = 1,2 В; R_1 = 5 кОм; сопротивление реохорда R_{AB} = 10 Ом.

Дано:
$l_1 = AC$ = 40 см
$l = AB$ =100 см
$\mathcal{E}_\sigma$ = 1,2 В
$R_1 = 5\cdot10^3$ Ом
R_{AB} = 10 Ом

$\mathcal{E}$ – ?

Решение: Запишем уравнение Кирхгофа для двух контуров цепи:

$$I(R_1 + R_{AB}) = \mathcal{E}_\sigma; \qquad (1)$$

$$IR_{AC} = \mathcal{E}, \qquad (2)$$

где $\mathcal{E}$ – ЭДС термопары.

Внутреннее сопротивление батареи $r \ll R_1$, поэтому им можно пренебречь.

Сопротивление участка струны реохорда

$$R_{AC} = \frac{l_1}{l}R_{AB}. \qquad (3)$$

Выразим ЭДС термопары из уравнений (1) – (3)

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_\sigma\frac{R_{AC}}{R_1 + R_{AB}} = \mathcal{E}_\sigma\frac{R_{AB}}{R_1 + R_{AB}}\cdot\frac{l_1}{l}.$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_\sigma\left(\frac{R_{AB}}{R_1 + R_{AB}}\right)\frac{l_1}{l} = \left(\frac{1,2\cdot10}{5\cdot10^3 + 10}\right)\cdot\frac{40}{100} = 9,6\cdot10^{-4}\ \text{В} \approx 1\ \text{мВ}.$$

Ответ: $\mathcal{E}$ = 1 мВ.

Задача 9. Для определения температуры печи в нее вставлена термопара никель – нихром с постоянной α = 50 мкВ/°С, присоединенная к гальванометру с внутренним сопротивлением R = 100 Ом и с чувствительностью на одно деление 10^{-5} А. При температуре второго спая t_2 = +15 °С гальванометр дает отклонение b = 10 делений. Чему равна температура t_1 печи? Сопротивлением термопары пренебречь.

Дано:
$\alpha = 5{\cdot}10^{-5}$ В/°С
$R = 100$ Ом
$a = 10^{-5}$ А/дел
$b = 10$ делений
$t_2 = +15$ °С

t_1 – ?

Решение: ЭДС термопары

$$\mathcal{E} = \alpha(T_1 - T_2) = \alpha(t_1 - t_2), \qquad (1)$$

где t_1 – температура горячего спая (печи); α – постоянная термопары.

Сила тока в цепи

$$I = \mathcal{E}/R. \qquad (2)$$

С другой стороны,

$$I = ab. \qquad (3)$$

Подставив выражение (1) и (3) в (2), получим

$$ab = \frac{\alpha(t_1 - t_2)}{R}.$$

Отсюда находим температуру печи

$$t_1 = \frac{Rab}{\alpha} + t_2 = \frac{100 \cdot 10^{-5} \cdot 10}{5 \cdot 10^{-5}} + 15 = 215\ ^\circ\text{C}.$$

Ответ: $t_1 = 215$ °С.

Задача 10. Каково наибольшее (теоретически) количество электричества, которое протечет по термопаре медь – платина при поглощении горячим спаем одного джоуля теплоты? Температура горячего спая 100 °С, холодного – 0 °С; ЭДС $\mathcal{E}$ равна 0,76 мВ.

Дано:
$Q = 1$ Дж
$T_1 = 273$ К
$T_2 = 373$ К
$\mathcal{E} = 7{,}6{\cdot}10^{-4}$ В

q – ?

Решение: В горячем спае термопары поглощается теплота Пельтье:

$$Q = \Pi{\cdot}q. \qquad (1)$$

Тогда в холодном спае теплота Пельтье выделяется.

Здесь q – количество электричества, протекшее по термопаре; П – коэффициент Пельтье.

$$\Pi = \alpha T_2, \qquad (2)$$

где α – удельная термоЭДС термопары; T_2 – температура горячего спая.

ТермоЭДС термопары

$$\mathcal{E} = \alpha(T_2 - T_1).$$

Отсюда $\alpha = \mathcal{E}/(T_2 - T_1)$. Подставим в (2):

$$\Pi = \mathcal{E}\frac{T_2}{T_2 - T_1}. \qquad (3)$$

Из (1), с учетом (3), получаем

$$q = \frac{Q}{\Pi} = \frac{Q(T_2 - T_1)}{T_2\mathcal{E}} = \frac{1 \cdot 100}{373 \cdot 7{,}6 \cdot 10^{-4}} = 353 \text{ Кл}.$$

Ответ: $q = 353$ Кл.

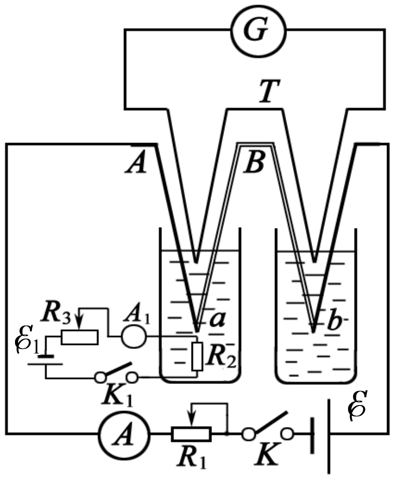


Рис. 10.6

Задача 11. Для измерения коэффициента Пельтье можно воспользоваться схемой (рис. 10.6). Здесь A и B – проволоки из различных металлов (медь и константан), помещенные в сосуды с жидкостью. Пропуская через проволоки ток I, сила которого регулируется реостатом R_1 (при замкнутом ключе K), можно добиться того, чтобы температура спаев a и b была различной. Пусть в результате эффекта Пельтье левый спай охлаждается, а правый нагревается. Разность температур этих спаев можно определить с помощью дифференциальной термопары T и гальванометра G. Изменение температуры спаев будет происходить до установления теплового равновесия между спаем и окружающей средой.

В результате стрелка гальванометра установится в определенном положении. В левый сосуд помещена спираль сопротивлением R_2, с помощью которой жидкость можно нагревать. При нагревании левого сосуда разность температур будет уменьшаться. Пусть удалось с помощью реостата R_3 установить ток I_1 через нагреватель так, что левый и правый спаи находятся при одинаковых температурах. При этом стрелка гальванометра не будет отклоняться.

Определить величину коэффициента Пельтье, зная сопротивление спирали R_2, ток через нее I_1 и общий ток I.

Дано: R_2, I_1, I

Π – ?

Решение: Количества теплоты Q_1 и Q_2, выделившегося в сосудах (спаях a и b) за время t при протекании тока I по цепи:

$$Q_1 = I^2Rt + \Pi It;$$
$$Q_2 = I^2Rt - \Pi It.$$

Здесь Π – коэффициент Пельтье; R – сопротивление проводников, опущенных в сосуды.

Тогда

$$Q_1 - Q_2 = 2\Pi It.$$

Количество теплоты, выделяющееся на сопротивлении R_2, равное $I_1^2R_2t$, должно компенсировать разность Q_1 и Q_2

$$I_1^2R_2t = Q_1 - Q_2 \text{ или } I_1^2R_2t = 2\Pi It.$$

Отсюда
$$\Pi = \frac{I_1^2R_2}{2I}.$$

Ответ: $\Pi = I_1^2R_2/(2I)$.

Задача 12. Один конец серебряного проводника находится при температуре 100 °С, а другой – при температуре 0 °С. По проводнику течет ток 10 А. Какое количество теплоты выделится в проводнике за 1 мин вследствие эффекта Томсона, если коэффициент Томсона для серебра $\tau = 1{,}5\cdot10^{-6}$ В/К.

Дано:
$t_2 = 100$ °С
$t_1 = 0$ °С
$I = 10$ А
$\tau = 1{,}5\cdot10^{-6}$ В/К
$t = 60$ с
Q – ?

Решение: Количество теплоты, выделяющееся в единицу времени на элементе проводника dl вследствие явления Томсона,

$$dQ = \tau I\left(\frac{dT}{dl}\right)dl,$$

где dT/dl – градиент температуры.

Средний градиент температуры по проводнику длиной l равен

$$\frac{\Delta T}{\Delta l} = \frac{t_2 - t_1}{l}.$$

За время t по всей длине проводника l выделяется количество теплоты Томсона

$$Q = \tau I t\frac{(t_2 - t_1)l}{l} = \tau I t\left(t_2 - t_1\right) = 1{,}5\cdot10^{-6}\cdot10\cdot60\cdot(100-0) = 0{,}09 \text{ Дж} = 90 \text{ мДж}.$$

При изменении направления тока в проводнике будет поглощаться такое же количество теплоты.

Ответ: $Q = 90$ мДж.

11. СИЛА ЛОРЕНЦА

Основные формулы и обозначения

Сила Лоренца (результирующая сила **F**, действующая на движущийся со скоростью $\boldsymbol{\upsilon}$ заряд q, если на него действует электрическое поле напряженностью **E** и магнитное поле индукцией **B**)

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\boldsymbol{\upsilon},\mathbf{B}],$$

Магнитная составляющая силы Лоренца

$$\mathbf{F}_m = q[\boldsymbol{\upsilon},\mathbf{B}].$$

Элементарная работа силы Лоренца

$$\delta A_m = (\mathbf{F}_m, d\mathbf{r}) = 0.\ \mathbf{F}_m \perp d\mathbf{r}.$$

Величина вектора магнитной индукции

$$\mathbf{B} = \frac{1}{q\upsilon_\perp^2}\left[\mathbf{F}_m, \boldsymbol{\upsilon}_\perp\right].$$

Циклотронная частота $\qquad \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{qB}{m},$

где m, q – масса и заряд частицы.

Период обращения $\qquad T = \dfrac{2\pi m}{qB},$

Задачи с решениями

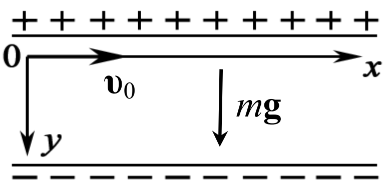


Рис. 11.1

Задача 1. Заряженная частица влетает в горизонтально расположенный плоский конденсатор (рис. 11.1). Начальная скорость частицы $\boldsymbol{\upsilon}_0$ параллельна пластинам. Опишите характер траектории и закон изменения скорости. (Силу вязкости считать по закону Стокса, $\mathbf{F}_\text{В} = \alpha\boldsymbol{\upsilon}$).

Решение: Для того чтобы решить эту задачу, необходимо: 1) записать уравнение движения частицы в векторном виде; 2) выбрать координатные оси x и y; 3) записать уравнение движения частицы в скалярном виде с учетом проекций всех сил на выбранные оси; 4) задать начальные условия. Уравнение движения имеет вид

$$m\frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} = \mathbf{P} + q\mathbf{E} + \alpha\boldsymbol{\upsilon}.$$

Здесь $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ – сила тяжести; $q\mathbf{E} = \mathbf{F}$ – кулоновская сила; $\mathbf{F}_В = \alpha\boldsymbol{\upsilon}$ – сила вязкости, направленная против движения, модуль $F_В$ пропорционален скорости υ движения частицы; α – коэффициент вязкости.

Обозначим $\mathbf{R} = \mathbf{P} + q\mathbf{E}$. Тогда $m\dfrac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} = \mathbf{R} + \alpha\boldsymbol{\upsilon}$.

Запишем это уравнение в проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} m\dfrac{d\upsilon_x}{dt} = 0 - \alpha\upsilon_x; \\ m\dfrac{d\upsilon_y}{dt} = R - \alpha\upsilon_y \end{cases} \text{ или } \begin{cases} m\dfrac{d\upsilon_x}{dt} = -\alpha\upsilon_x; \\ m\dfrac{d\upsilon_y}{dt} = R - \alpha\upsilon_y. \end{cases} \quad (1)$$

Зададим начальные условия:

$$t = 0 \begin{cases} x = 0, & \upsilon_x = \upsilon_0; \\ y = 0, & \upsilon_y = 0. \end{cases}$$

Решаем первое уравнение. Из (1)

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = -\alpha\upsilon_x; \qquad \frac{d\upsilon_x}{\upsilon_x} = -\frac{\alpha}{m}dt;$$

$$\ln\upsilon_x = -\frac{\alpha}{m}t + C.$$

Из начальных условий найдем C. При $t = 0$, $\upsilon_x = \upsilon_0$. Тогда $\ln\upsilon_0 = C$ и

$$\ln\upsilon_x = -\frac{\alpha}{m}t + \ln\upsilon_0; \quad \ln\frac{\upsilon_x}{\upsilon_0} = -\frac{\alpha}{m}t; \quad \frac{\upsilon_x}{\upsilon_0} = e^{-\frac{\alpha}{m}t};$$

$$\upsilon_x = \upsilon_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t}.$$

Это и есть закон изменения υ_x в зависимости от времени t.

Найдем закон изменения скорости υ_y:

$$m\frac{d\upsilon_y}{dt} = R - \alpha\upsilon_y.$$

Разделим переменные υ_y и t и проинтегрируем левую и правую части уравнения

$$\frac{d\upsilon_y}{(R/m) - (\alpha/m)\upsilon_y} = dt;$$

$$-\frac{m}{\alpha}\ln\left(\frac{R}{m} - \frac{\alpha}{m}\upsilon_y\right) = t + C. \quad (2)$$

Найдем C из начальных условий: $t = 0$; $\upsilon_y = 0$; $C = -\dfrac{m}{\alpha}\ln\dfrac{R}{m}$.

Подставим выражение для C в (2)

$$-\frac{m}{\alpha}\ln\left(\frac{R}{m}-\frac{\alpha}{m}\upsilon_y\right)=t-\frac{m}{\alpha}\ln\frac{R}{m};$$

$$-\frac{m}{\alpha}\ln\left(\frac{R}{m}-\frac{\alpha}{m}\upsilon_y\right)+\frac{m}{\alpha}\ln\frac{R}{m}=t;$$

$$-\frac{\alpha}{m}t=\ln\left[\left(\frac{R}{m}-\frac{\alpha}{m}\upsilon_y\right)\Big/\left(\frac{R}{m}\right)\right].$$

Отсюда находим $$\upsilon_y=\frac{R}{\alpha}\left(1-e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right).$$

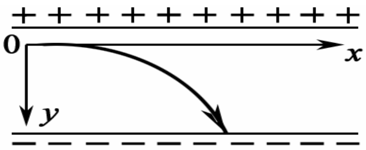


Рис. 11.2

Окончательно можно записать:

$$\upsilon_x=\upsilon_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t};\qquad \upsilon_y=\frac{R}{\alpha}\left(1-e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right).$$

Проанализируем эти выражения.

С увеличением t $\upsilon_x\to 0$; $\upsilon_y\to R/\alpha$, т.е. частица будет двигаться в вертикальном направлении (рис. 11.2). Переход в прямолинейный режим происходит тем быстрее, чем больше вязкость среды (α) и меньше масса частицы m.

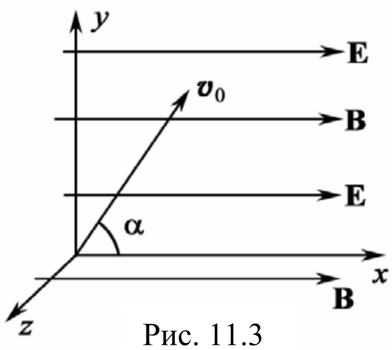


Рис. 11.3

Задача 2. Положительно заряженная частица массой m и зарядом q влетает со скоростью $\boldsymbol{\upsilon}_0$ в пространство, в котором существует электрическое (**E**) и магнитное (**B**) поля одинакового направления (**E** $\downarrow\downarrow$ **B**). Вектор скорости составляет угол α с направлением силовых линий **E** и **B** (рис. 11.3). Начальные условия $t=0$; $x=y=z=0$. Исследовать траекторию движения частицы.

Решение: Проведем качественный анализ решения. Запишем в векторном виде уравнение движения частицы с учетом всех сил, действующих на нее:

$$m\mathbf{a}=\mathbf{F}_m+\mathbf{F}_k. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{F}_m$ – сила, обусловленная существованием магнитного поля; $\mathbf{F}_k$ – сила, действующая со стороны электрического поля. Запишем уравнение (1) в проекциях на оси координат:

$$0x:\quad ma_x=F_k;$$

$$0y \text{ и } 0z:\quad ma_\perp=F_m.$$

$$ma_x=qE; \tag{2}$$

$$ma_\perp=q\upsilon_\perp B. \tag{3}$$

Таким образом, векторному уравнению (1) соответствуют два независимых скалярных уравнения. Отсюда следует, что движение частицы можно представить как совокупность двух независимых движений: 1) равноускоренное движение вдоль линий поля под действием электрической силы (2); 2) равномерное движение по окружности вокруг линий поля под действием магнитной силы (3). Траектория частицы будет иметь вид спирали с постоянным радиусом R и возрастающим шагом h. Найдем радиус R винтовой траектории частицы и период вращения T. В движении по окружности в плоскости YZ электрическая сила не участвует, поэтому радиус винтовой траектории R и период T выражается такими же формулами, как если бы электрического поля не было:

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv_0 \sin\alpha}{qB}; \qquad T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Запишем кинематическое уравнение, описывающее движение частицы вдоль силовых линий $x = x(t)$. Так как движение вдоль x равноускоренное, то:

$$x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}. \tag{4}$$

Здесь v_{0x} – начальное значение скорости относительно x, $v_{0x} = v_0\cos\alpha$; a_x – ускорение относительно оси x, $a_x = qE/m$.

Допустим, что частица совершила n оборотов вокруг силовых линий за время $t = nT$, здесь T – период вращения частицы. Найдем шаг винтовой траектории на n-м обороте:

$$h = x_n - x_{n-1};$$

$$h = v_{0x}T + \frac{a_x(2n-1)T^2}{2} = v_0\cos\alpha \cdot T + \frac{qE(2n-1)T^2}{2m}.$$

Задача 3. Положительно заряженная частица влетает в область пространства, где существуют взаимно перпендикулярные электрические и магнитные поля ($\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$), причем вектор начальной скорости $\mathbf{v}_0$ перпендикулярен им обоим (рис. 11.4). Как будет выглядеть траектория частицы?

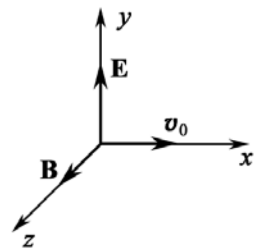


Рис. 11.4

Решение: Движение частицы в электрическом поле описывается силой $\mathbf{F} = \mathbf{F}_k + \mathbf{F}_m$. В этом случае электрическая и магнитная силы во все время движения частицы ориентированы в плоскости XY.

Магнитная составляющая силы Лоренца зависит от скорости частицы, а скорость зависит от электрической составляющей. Поэтому электрическая и магнитная составляющие силы Лоренца в данном случае являются зависимыми, и уравнение динамики

$$m\mathbf{a} = q\mathbf{E} + q\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{B}$$

нельзя разделить на два независимых уравнения: а) одно с электрической; б) другое с магнитной силой. Поэтому движение частицы в этом случае нельзя представить совокупностью независимых движений в полях **E** и **B**.

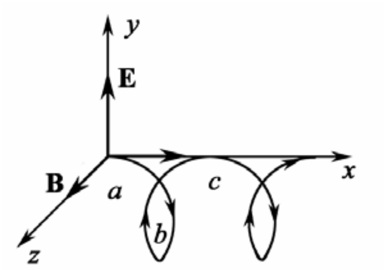


Рис. 11.5

Расчет движения частицы в скрещенных полях **E** и **B** ($\mathbf{E}\perp\mathbf{B}$), показывает, что частица движется по окружности в плоскости, перпендикулярной **B**, а сама эта окружность перемещается в направлении $[\mathbf{E}, \mathbf{B}]$ (рис. 11.5). Когда частица движется против поля ($a \to b$), то она тормозится, теряет скорость, поэтому поле искривляет ее траекторию сильно (обл. b); когда частица движется в направлении поля ($b \to c$), то она набирает скорость и поле искривляет ее траекторию слабее (обл. c). В результате получается «дрейф» в направлении оси x

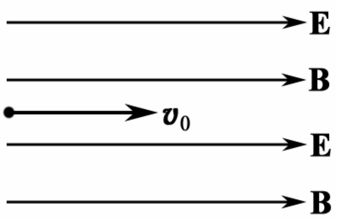


Рис. 11.6

Задача 4. Электрон влетает в однородное поле **E** и **B** (причем $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$) вдоль силовых линий (рис. 11.6). Определить касательное (a_τ) и нормальное (a_n) ускорения электрона.

Решение: Движение электрона в электрическом поле описывается силой Лоренца $\mathbf{F} = \mathbf{F}_k + \mathbf{F}_m$ или в скалярном виде

$$F = eE\cos\alpha + e\upsilon B\sin\beta,$$

где e – заряд электрона.

Так как скорость электрона направлена вдоль линий индукции магнитного поля (т.е. $\sin\beta = 0$), то $\mathbf{F}_m$ сила на электрон не действует. Остается электрическая составляющая силы Лоренца, т.е. $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$. Эта сила сообщает электрону ускорение, направленное против поля **E**. Движение электрона прямолинейное и равноускоренное, и поэтому в формуле

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2};$$

$$a_n = \upsilon^2/R = 0.$$

Поэтому $a_\tau = a = d\upsilon/dt$. Но $F_k = ma_\tau = eE$.

Тогда $$a_\tau = a = F_k/m = eE/m.$$

Задача 5. Электрон влетает перпендикулярно силовым линиям электромагнитного поля со скоростью v_0 (рис. 11.7). Поля параллельны, т.е. $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$. Определить касательное ускорение (a_τ) и нормальное ускорение (a_n) электрона в начальный момент времени.

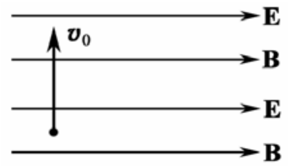


Рис. 11.7

Решение: Движение частицы в электромагнитном поле описывается силой Лоренца (рис. 11.8):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_m + \mathbf{F}_k;\ \mathbf{F} = e\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{B} + e\mathbf{E};\ \mathbf{F}_k \perp \boldsymbol{\upsilon},\ \mathbf{F}_m \perp \boldsymbol{\upsilon}.$$

Следовательно, $\mathbf{F} \perp \boldsymbol{\upsilon}$; $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$.

Вектор полного ускорения $\mathbf{a} \perp \boldsymbol{\upsilon}$, поэтому $a_\tau = 0$, следовательно, $|\boldsymbol{\upsilon}| = v_0$. Тогда

$$a = a_n = \frac{F}{m} = \frac{1}{m}\sqrt{(eE)^2 + (ev_0B)^2}\,.$$

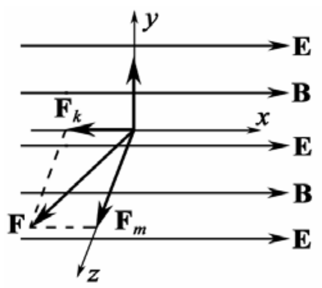


Рис. 11.8

Задача 6. Электрон, обладающий скоростью $v = 2\cdot10^6$ м/с, влетел в однородное магнитное поле с индукцией $B = 5{,}7\cdot10^{-4}$ Тл под углом $\alpha = 30°$ к направлению линий поля (рис. 11.9). Определите радиус R и шаг h винтовой линии, по которой движется электрон.

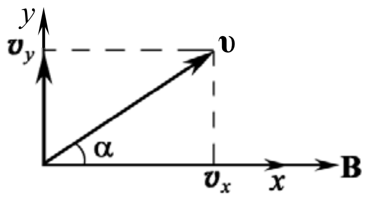


Рис. 11.9

Дано:	**Решение:** Электрическое поле $\mathbf{E} = 0$ по условию задачи, поэтому сила Лоренца $\mathbf{F} = e[\boldsymbol{\upsilon}, \mathbf{B}]$.
$v = 2\cdot10^6$ м/с	$F = evB\sin\alpha$. (1)
$B = 5{,}7\cdot10^{-4}$ Тл	Так как векторы $\mathbf{F}$ и $\boldsymbol{\upsilon}$ взаимно перпендикулярны,
$\alpha = 30°$	то величина скорости v не будет изменяться под действием силы $\mathbf{F}$.
$h - ?\ R - ?$	

Постоянная сила F, перпендикулярная скорости, вызывает движение по окружности. Следовательно, электрон, влетевший в магнитное поле, будет двигаться, во-первых, по окружности в плоскости, перпендикулярной полю $\mathbf{B}$, со скоростью, равной $v_y = v\sin\alpha$ (рис. 11.10).

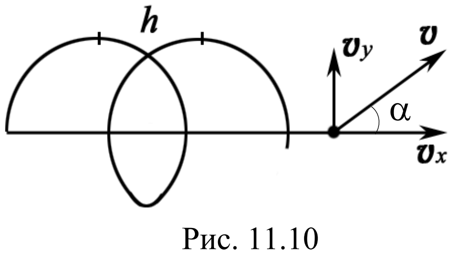


Рис. 11.10

Одновременно он будет двигаться и вдоль поля со скоростью

$$v_x = v\cos\alpha.$$

В результате одновременного движения по окружности и по прямой электрон будет двигаться по винтовой линии.

Определим радиус и шаг винтовой линии.

Радиус окружности, по которой движется электрон, найдем следующим образом. Сила Лоренца F вызывает движение по окружности, следовательно, она является центростремительной силой $F_{\text{цс.}}$. Поэтому можно записать равенство $F = F_{\text{цс}}$.

Подставим в это равенство выражение для центростремительной силы $F_{\text{цс}} = \dfrac{m\upsilon_y^2}{R} = \dfrac{m\upsilon^2 \sin^2\alpha}{R}$ и силы Лоренца из формулы (1). Решив полученное уравнение относительно R, найдем

$$R = \frac{m\upsilon \sin\alpha}{eB}. \qquad (2)$$

Подставим числовые значения в формулу (2) и произведем вычисления:

$$R = \frac{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 2\cdot 10^{6}\cdot 0{,}5}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 0{,}0057} = 1{,}0\cdot 10^{-2}\ \text{м} = 1{,}0\ \text{см}.$$

Шаг винтовой линии будет равен пути, пройденному электроном вдоль поля со скоростью υ_x за время, которое понадобится электрону для того, чтобы совершить один оборот:

$$h = \upsilon_x T, \qquad (3)$$

где $T = 2\pi R/\upsilon_y$ – период обращения электрона.

Подставив выражение для T в формулу (3), найдем

$$h = \frac{2\pi R \upsilon_x}{\upsilon_y},$$

или

$$h = \frac{2\pi R \upsilon \cos\alpha}{\upsilon \sin\alpha} = 2\pi R\ \text{ctg}\alpha.$$

Подставив в эту формулу числовые значения величин, получим

$$h = 2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}01\cdot 1{,}73 = 0{,}109\ \text{м} \cong 11\ \text{см}.$$

Ответ: $R = 1$ см; $h = 11$ см.

Задача 7. Электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U = 500$ В, попал в однородное магнитное поле с индукцией $B = 1{,}5$ мТл. Определить радиус R кривизны траектории и частоту ν обращения электрона в магнитном поле. Вектор скорости перпендикулярен линиям магнитного поля. Действием силы тяжести можно пренебречь.

Дано:	
$U = 500$ В	
$B = 1{,}5\cdot 10^{-3}$ Тл	
R – ? ν – ?	

Решение: Радиус кривизны траектории электрона определим исходя из следующих соображений: на движущийся в магнитном поле электрон действует сила Лоренца **F**.

Сила Лоренца перпендикулярна к вектору скорости и, следовательно, является в данном случае центростремительной силой, т.е. $F = F_{цс}$.

Подставляя выражения $F = evB\sin\alpha$ и $F_{цс} = mv^2/R$, получим

$$evB\sin\alpha = mv^2/R, \tag{1}$$

где e и v – заряд и скорость электрона; m – масса электрона; α – угол между направлениями вектора скорости $\mathbf{v}$ и вектора индукции $\mathbf{B}$ (в нашем случае $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$ и $\alpha = 90°$, $\sin\alpha = 1$).

Из формулы (1) найдем

$$R = \frac{mv}{eB}. \tag{2}$$

Входящий в выражение (2) импульс $p = mv$ может быть выражен через кинетическую энергию $E_К = p^2/(2m)$ электрона:

$$mv = \sqrt{2mE_К}. \tag{3}$$

Но кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U, определяется равенством

$$E_К = eU.$$

Подставив это выражение $E_К$ в формулу (3), получим

$$mv = \sqrt{2meU}.$$

Радиус кривизны равен

$$R = \frac{\sqrt{2meU}}{eB} = \frac{\sqrt{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 500}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 1{,}5\cdot 10^{-3}} = 5\cdot 10^{-2}\ \text{м} = 5\ \text{см}.$$

Для определения частоты обращения воспользуемся формулой, связывающей частоту со скоростью и радиусом:

$$\nu = \frac{v}{2\pi R}. \tag{4}$$

Подставив в формулу (4) выражение (2), получим

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\frac{e}{m}B = \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 1{,}5\cdot 10^{-3}}{2\cdot 3{,}14\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}} = 4{,}2\cdot 10^{7}\ \text{с}^{-1}.$$

Ответ: $R = 5$ см; $\nu = 4{,}2\cdot 10^{7}$ с$^{-1}$.

Задача 8. Пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов $U = 300$ В, влетает в однородное магнитное поле $\mathbf{B}$, направленное перпендикулярно плоскости чертежа $\odot$ (рис. 11.11). Ширина поля $b = 2{,}5$ см. В отсутствие магнитного поля пучок электронов попадает в точку A экрана, расположенного на расстоянии $l = 5$ см от

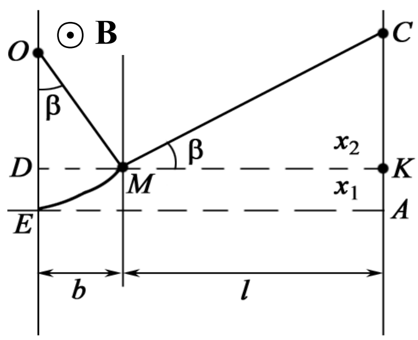


Рис. 11.11

границы магнитного поля. При включении магнитного поля пятно смещается в точку C. Найти смещение $x = AC$ пучка электронов, если известно, что индукция магнитного поля B = 14,6 мкТл.

Дано:
U = 300 В
$b = 2{,}5\cdot10^{-2}$ м
$l = 5\cdot10^{-2}$ м
$B = 1{,}46\cdot10^{-5}$ Тл
x – ?

Решение: На участке EM электроны движутся по окружности радиуса $R = OE = OM$, под действием силы Лоренца. На участке MC, после выхода из поля **B**, электроны движутся по прямой линии.

По условию задачи смещение $x_1 = ED$. Смещение x_1 можно найти из соотношения $x_1 = OE - OD$.

Из прямоугольного треугольника ODM можно найти OD.

$$OD = \sqrt{R^2 - b^2}.$$

Таким образом, $$x_1 = R - \sqrt{R^2 - b^2}.$$

Из подобия треугольников MCK и ODM находим x_2

$$\frac{x_2}{l} = \frac{b}{\sqrt{R^2 - b^2}} \quad \text{или} \quad x_2 = \frac{b\cdot l}{\sqrt{R^2 - b^2}}.$$

Общее смещение

$$x = R - \sqrt{R^2 - b^2} + \frac{b\cdot l}{\sqrt{R^2 - b^2}}. \qquad (1)$$

Таким образом, для решения задачи необходимо вычислить радиус R окружности, по которой электроны начинают двигаться в магнитном поле.

Зная величину силы Лоренца $F = evB$ и нормальное ускорение, которое она создает, получаем $F = ma_n = mv^2/R = evB$ или

$$R = mv/(eB). \qquad (2)$$

Скорость электрона $$v = \sqrt{2eU/m}. \qquad (3)$$

Комбинируя уравнения (1) – (3), получаем

$$x = \sqrt{\frac{2mU}{eB^2}} - \sqrt{\frac{2mU}{eB^2} - b^2} + \frac{b\cdot l}{\sqrt{2mU/\left(eB^2\right) - b^2}}$$

или $$x = R - \sqrt{R^2 - b^2} + \frac{b\cdot l}{\sqrt{R^2 - b^2}},$$

где $R = \sqrt{\dfrac{2mU}{eB^2}} = \sqrt{\dfrac{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 300}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 1{,}46^2\cdot 10^{-10}}} = 4$ м; $R^2 = 16$ м.

Тогда $x = 4 - \sqrt{16 - \left(2{,}5\cdot 10^{-2}\right)^2} + \dfrac{2{,}5\cdot 10^{-2}\cdot 5\cdot 10^{-2}}{\sqrt{16 - \left(2{,}5\cdot 10^{-2}\right)^2}} = 3{,}9\cdot 10^{-4}\text{ м} = 0{,}39\text{ мм}.$

Ответ: x = 0,39 мм.

Задача 9. Магнитное поле с индукцией $B = 0{,}01$ Тл и электрическое поле напряженностью $E = 10^3$ В/м направлены одинаково. Электрон влетает в данное электромагнитное поле со скоростью $\upsilon = 10^5$ м/с. Найти нормальное, тангенциальное и полное ускорение электрона для случаев: а) скорость электрона направлена вдоль силовых линий **E**; б) скорость электрона направлена перпендикулярно полям **E**, **B**.

Дано:
$B = 0{,}01$ Тл
$E = 10^3$ В/м
$\upsilon = 10^5$ м/с
a_n – ? a_τ – ? a – ?

Решение: а) Вектор скорости $\boldsymbol{\upsilon}$ электрона и вектор **B** коллинеарны, $\sin\alpha = 0$. $F_m = e\upsilon B\sin\alpha = 0$. Поэтому $a_n = 0$.

Тангенциальное ускорение находим из 2-го закона Ньютона

$$a_\tau = F/m = eE/m;$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = a_\tau.$$

Подставляя численные значения, получаем

$$a_\tau = \frac{eE}{m} = \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10^3}{9{,}11\cdot 10^{-31}} = 1{,}76\cdot 10^{14}\ \text{м/с}^2.$$

Отмечаем, что при движении с таким ускорением необходимо учитывать релятивистский эффект, что выходит за рамки данной задачи.

б) Нормальное ускорение находим, зная величину силы Лоренца:

$$F_m = e\upsilon B = ma_n;$$

$$a_n = \frac{e\upsilon B}{m} = \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10^5\cdot 10^{-2}}{9{,}11\cdot 10^{-31}} = 1{,}76\cdot 10^{14}\ \text{м/с}^2.$$

Тангенциальное ускорение $a_\tau = \dfrac{eE}{m} = \dfrac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10^3}{9{,}11\cdot 10^{-31}} = 1{,}76\cdot 10^{14}$ м/с^2.

Полное ускорение равно

$$a = \sqrt{\left(\frac{e\upsilon B}{m}\right)^2 + \left(\frac{eE}{m}\right)^2} = 1{,}76\cdot 10^{14}\cdot\sqrt{2} = 2{,}49\cdot 10^{14}\ \text{м/с}^2.$$

Ответ: $a_\tau = 1{,}76\cdot 10^{14}$ м/с^2; $a_n = 1{,}76\cdot 10^{14}$ м/с^2; $a = 2{,}49\cdot 10^{14}$ м/с^2.

Задача 10. Пучок нерелятивистских заряженных частиц проходит, не отклоняясь, через область A (рис. 11.12.1), в которой созданы поперечные взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля с напряженностью $E = 1{,}5\cdot 10^4$ В/м и индукцией $B = 10$ мТл. Если магнитное поле выключить, след пучка на экране Э смещается на $\Delta x = 15$ см. Определить удельный заряд q/m частиц, если известны $l_1 = 3{,}1$ см и $l_2 = 6{,}0$ см.

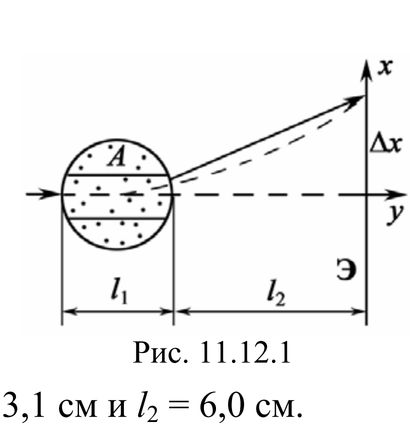


Рис. 11.12.1

Дано:	
$l_1 = 3{,}1\cdot10^{-2}$ м	
$l_2 = 6\cdot10^{-2}$ м	
$E = 1{,}5\cdot10^4$ В/м	
$B = 0{,}01$ Тл	
$\Delta x = 0{,}15$ м	
q/m – ?	

Решение: При включенных полях пучок частиц проходит область A, не отклоняясь. Из механики известно, что это возможно в том случае, если сумма сил, приложенных к частице, равна нулю.

$$\sum \mathbf{F} = 0;\ \mathbf{F}_К + \mathbf{F}_m = 0.$$

Легко догадаться, что электрическая ($\mathbf{F}_К$) и магнитная ($\mathbf{F}_m$) составляющие силы Лоренца равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположных направлениях.

$$qE = q\upsilon B\sin\beta, \quad (1)$$

где β – угол между векторами $\boldsymbol{\upsilon}$ и $\mathbf{B}$. По условию задачи $\beta = 90°$.

Из (1) находим скорость частиц в пучке

$$\upsilon = \frac{qE}{qB} = \frac{E}{B}. \quad (2)$$

При выключенном магнитном поле частицы проходят участок l_1 в электрическом поле. Время t движения частиц по оси y с учетом (2) равно

$$t = \frac{l_1}{\upsilon} = \frac{l_1 qB}{qE} = \frac{l_1 B}{E}. \quad (3)$$

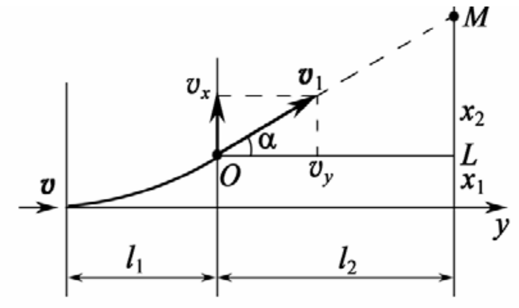


Рис. 11.12.2

За это время частицы проходят в направлении оси x расстояние x_1 (рис. 11.12.2) и вылетают из области A со скоростью υ_1 под углом α к оси y. В области l_2 частицы движутся равномерно и прямолинейно.

В области l_1 частицы движутся равноускоренно с ускорением

$$a_x = qE/m. \quad (4)$$

Поэтому, с учетом (3), $x_1 = \dfrac{a_x t^2}{2} = \dfrac{q}{m}\left(\dfrac{l_1^2 B^2}{2E}\right)$.

Из треугольника OLM определяем $x_2 = l_2 \mathrm{tg}\alpha$, где $\mathrm{tg}\alpha = \upsilon_x/\upsilon_y$.

Так как $\upsilon_x = a_x t$; $\upsilon_y = \upsilon$, то

$$x_2 = l_2 \frac{\upsilon_x}{\upsilon} = l_2 \frac{a_x t}{\upsilon}. \quad (5)$$

Величину x_2 находим из уравнений (2) – (5)

$$x_2 = \frac{q}{m}\left(\frac{l_1 l_2 B^2}{E}\right);$$

$$\Delta x = x_1 + x_2 = \frac{q}{m}\left(\frac{l_1^2 B^2}{2E} + \frac{2l_1 l_2 B^2}{2E}\right).$$

Окончательно

$$\frac{q}{m} = \frac{2E\Delta x}{l_1 B^2 (l_1 + 2l_2)}.$$

Подставляем численные значения, получим

$$\frac{q}{m} = \frac{2\cdot 15\cdot 10^3\cdot 0{,}15}{31\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-4}\cdot (3{,}1+12)\cdot 10^{-2}} = 9{,}6\cdot 10^9 \text{ Кл/кг}.$$

Ответ: q/m = 9,6·10^9 Кл/кг; протоны.

Задача 11. Пучок нерелятивистских протонов проходит, не отклоняясь, через область, в которой созданы однородные поперечные взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля с E = 120 кВ/м и B = 50 мТл. Затем пучок попадает на заземленную мишень. Найти силу, с которой пучок действует на мишень, если ток в пучке I = 0,8 мА.

Дано:
$E = 1{,}2\cdot 10^5$ В/м
$B = 5\cdot 10^{-2}$ Тл
$I = 8\cdot 10^{-4}$ А
F – ?

Решение: Средняя сила, с которой пучок протонов действует на мишень, равна $\mathbf{F} = \frac{\sum \Delta\mathbf{p}}{\Delta t}$, где $\Sigma\Delta\mathbf{p}$ – изменение импульса протонов, падающих на мишень; Δt – время, за которое происходит изменение импульса.

Величина средней силы равна

$$F = \Sigma\Delta p/\Delta t. \tag{1}$$

Импульс N протонов, попадающих в мишень, равен

$$p = Nm\langle v\rangle,$$

где $\langle v\rangle$ – средняя скорость протонов в пучке, $\langle v\rangle \equiv v$; m – масса протона.

Так как происходит «поглощение» протонов (мишень заземлена), то

$$\Sigma\Delta p = p = Nmv. \tag{2}$$

Для решения задачи необходимо найти v. По условию задачи пучок протонов проходит поля, не отклоняясь. Следовательно, сила Лоренца $\mathbf{F} = \mathbf{F}_К + \mathbf{F}_m = e\mathbf{E} + e[\mathbf{v},\mathbf{B}] = 0$. Силы $\mathbf{F}_К$ и $\mathbf{F}_m$ направлены по одной прямой, но в противоположные стороны, т.е. $F_К = F_m$ или $eE = evB$. Тогда

$$v = E/B. \tag{3}$$

Из (1) – (3) находим

$$F = NmE/B\Delta t. \tag{4}$$

Найдем количество N протонов, ударяющих в мишень за время Δt. Очевидно, что в мишень за время Δt попадут все протоны, находящиеся на расстоянии $x = v\Delta t$ от мишени. Предположим, что поперечное сечение пучка равно S. Следовательно, за время Δt на мишень попадут протоны, находящиеся в объеме $V = Sv\Delta t$. Если концентрация протонов в пучке равномерна и равна n, то $N = nSv\Delta t$.

Таким образом, для решения задачи необходимо определить концентрацию протонов в пучке

$$F = \frac{Nmv}{\Delta t} = \frac{nSv^2 m\Delta t}{\Delta t} = nSmv^2 .$$

Используя известное соотношение для плотности тока,

$$j = \frac{I}{S} = env ;\quad n = \frac{I}{evS} .$$

Окончательно,

$$F = \frac{ImE}{eB} .$$

После подстановки числовых значений, получим

$$F = \frac{8\cdot 10^{-4}\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}\cdot 1{,}2\cdot 10^{5}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 50\cdot 10^{-3}} = 2\cdot 10^{-5}\ \text{Н} = 20\ \text{мкН} .$$

Ответ. $F = 20$ мкН.

Задача 12. Существуют взаимоисключающие утверждения: а) Магнитная часть силы Лоренца $\mathbf{F}_m = q[\boldsymbol{\upsilon},\mathbf{B}]$ не совершает работы, $\delta A = \mathbf{F}_m d\mathbf{r} = 0$; б) Благодаря действию силы Лоренца на концах движущегося проводника возникает разность потенциалов $\Delta\varphi = E\cdot l$ (ЭДС индукции), т.е. именно эта сила, раздвигая заряды, совершает работу. Объяснить указанный парадокс.

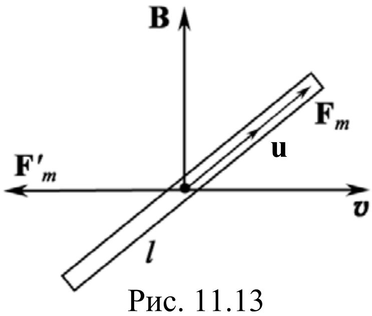


Рис. 11.13

Решение: Рассмотрим движение проводника длиной l поперек постоянного и однородного магнитного поля **B** (рис. 11.13).

Сила Лоренца $\mathbf{F}_m$, действующая на электроны движущегося с постоянной скоростью $\boldsymbol{\upsilon}$ проводника, равна

$$\mathbf{F}_m = -e[\boldsymbol{\upsilon},\mathbf{B}],$$

где e – элементарный заряд.

Эта сила действует вдоль стержня и приводит к тому, что на одном конце появляется избыток отрицательного заряда, а на другом (ближе к нам) – избыток положительного. Работа силы F_m при перемещении электронов равна

$$A = \int_l \mathbf{F}_m d\mathbf{r} = -evBl.$$

Избыток разноименных зарядов на концах проводника соответствует появлению разности потенциалов $\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = \frac{A}{-e} = \upsilon Bl.$$

Таким образом, ясно, что эта разность потенциалов обусловлена работой силы Лоренца $\mathbf{F}_m$.

Обращаем внимание, что сила $\mathbf{F}_m$ в рассматриваемой ситуации является лишь одной из составляющих силы Лоренца.

Под действием $\mathbf{F}_m$ свободные электроны в проводнике обретают дополнительную компоненту скорости $\mathbf{u}$ вдоль стержня.

Полная скорость электрона $\boldsymbol{\upsilon}_e$ будет равна

$$\boldsymbol{\upsilon}_e = \mathbf{u} + \boldsymbol{\upsilon}.$$

Тогда полная сила Лоренца $\mathbf{F}$ является векторной суммой двух составляющих

$$\mathbf{F} = -e[\boldsymbol{\upsilon}_e,\mathbf{B}] = -e[\mathbf{u},\mathbf{B}] - e[\boldsymbol{\upsilon},\mathbf{B}];$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}'_m + \mathbf{F}_m;$$

$$\mathbf{F}'_m = -\,e[\mathbf{u},\mathbf{B}]; \quad \mathbf{F}_m = -\,e[\boldsymbol{\upsilon},\mathbf{B}].$$

Сила $\mathbf{F}'_m$ противоположна по направлению скорости движения стержня $\boldsymbol{\upsilon}$ (см. рис. 11.13). Работа соответствующих составляющих силы Лоренца за время dt равна

$$\delta A_1 = \mathbf{F}_m\, d\mathbf{l} = -e[\boldsymbol{\upsilon},\mathbf{B}]\mathbf{u}dt.$$

$$\delta A_2 = \mathbf{F}'_m\, d\mathbf{l} = -\,e[\mathbf{u},\mathbf{B}]\boldsymbol{\upsilon}dt.$$

Сумма этих работ равна

$$\delta A_1 + \delta A_2 = -eB\{[\boldsymbol{\upsilon},\mathbf{u}] + [\mathbf{u},\boldsymbol{\upsilon}]\}dt = 0, \text{ т.к. } [\boldsymbol{\upsilon},\mathbf{u}] = -[\mathbf{u},\boldsymbol{\upsilon}].$$

Что и требовалось доказать.

Заметим, что при движении проводника с постоянной скоростью $\boldsymbol{\upsilon}$ вправо и наличии $\mathbf{F}'_m$, направленной влево, это условие выполняется только тогда, когда к проводнику приложена внешняя сила $|\mathbf{F}_{\text{внеш}}| = |\mathbf{F}'_m|$. Условие $|\mathbf{F}_{\text{внеш}}| = |\mathbf{F}'_m|$ обеспечивает постоянство скорости движения проводника, а работа внешней силы, обуславливает ЭДС индукции. Иначе утверждение о том, что сила Лоренца производит работу, противоречит закону сохранения энергии.

Задачи для самостоятельного решения

11.1. Показать, что какой бы скоростью $\boldsymbol{\upsilon}$ ($\upsilon << c$) ни обладал электрон, влетающий в однородное магнитное поле $\mathbf{B}$, и какой бы угол $\alpha \neq 0$ не образовало направление $\boldsymbol{\upsilon}$ с направлением $\mathbf{B}$, электрон опишет виток винтовой линии за одно и то же время T.

Ответ: $T = 2\pi m_e/(qB)$.

11.2. Электрон влетает в постоянное однородное магнитное поле **B** (рис. 11.14) и в этот момент находится в точке A, обладая скоростью $\mathbf{v}$, образующей с направлением поля угол α. Описав один виток винтовой линии, он окажется в точке C. Чему равно AC?

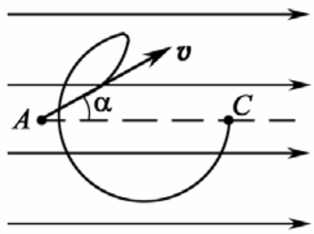


Рис. 11.14

Ответ: $AC = 2\pi m_e v\cos\alpha/(eB)$.

11.3. Заряженная частица движется по окружности радиуса R = 100 мм в однородном магнитном поле с индукцией B = 10 мТл. Найти ее скорость v и период T обращения, если частицей является нерелятивистский протон.

Ответ: $v = eBR/m_p = 1\cdot10^5$ м/с; $T = 2\pi m_p/(eB) = 6{,}55$ мкс.

11.4. Протон, ускоренный разностью потенциалов U = 500 кВ, пролетает поперечное однородное поле (рис. 11.15) с индукцией B = 0,51 Тл. Толщина области с полем d = 10 см. Найти угол α отклонения протона от первоначального направления движения.

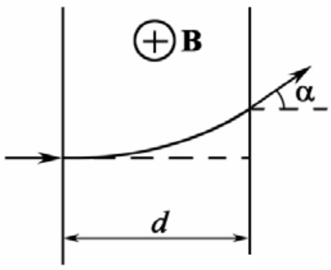


Рис. 11.15

Ответ: $\alpha = \arcsin\left(Bd\sqrt{\dfrac{e}{2m_pU}}\right) = 30^\circ$.

11.5. Электрон, ускоренный разностью потенциалов U = 1000 В, движется в однородном магнитном поле под углом α = 30° к вектору **B**, модуль которого B = 29 мТл. Найти шаг h винтовой линии электрона.

Ответ: $h = 2\pi\sqrt{\dfrac{2m_eU}{eB^2}}\cdot\cos\alpha = 2{,}0$ см.

11.6. Нерелятивистские протоны движутся прямолинейно в области, где созданы однородные взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля с E = 4000 В/м и B = 50 мТл. Траектория протонов лежит в плоскости xz (рис. 11.16) и составляет угол φ = 30° с осью x. Найти шаг винтовой линии, по которой будут двигаться протоны после выключения электрического поля.

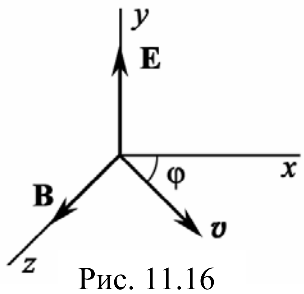


Рис. 11.16

Ответ: $h = 2\pi m_p E\cdot\mathrm{tg}\varphi\Big/\left(eB^2\right) = 6$ см.

11.7. Протон движется по окружности в однородном магнитном поле с индукцией B = 10 мТл. Найти радиус R окружности, если скорость протона равна $v = 1\cdot10^4$ м/с.

Ответ: $R = m_p v/(eB) = 0{,}01$ м.

11.8. В пространстве, где созданы электрическое и магнитное поля, однородные поперечные взаимно перпендикулярные, движутся нерелятивистские протоны. Траектория протонов лежит в области xz (рис. 11.17) и составляет угол $\alpha = 30°$ с осью x. Шаг винтовой линии, по которой двигаются протоны после выключения электрического поля, равен h = 0,06 м. Определить величину E, если B = 50 мТл.

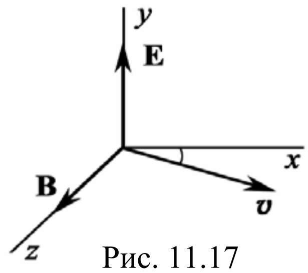


Рис. 11.17

Ответ: $E = \dfrac{heB^2}{2\pi m_p \operatorname{tg}\alpha} = 120$ кВ/м.

11.9. Релятивистский электрон движется по окружности радиусом R = 100 мм в однородном магнитном поле B = 10 мТл. Найти скорость υ и период T обращения электрона.

Ответ: $\upsilon = \dfrac{c}{\sqrt{1+(m_0c)^2/(eBR)^2}} = 1{,}5\cdot10^8$ м/с; $T = \dfrac{2\pi m_0}{eB\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = 4$ нс.

11.10. Электрон влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно силовым линиям. Скорость электрона $\upsilon = 4\cdot10^7$ м/с. Индукция магнитного поля равна $B = 1\cdot10^{-3}$ Тл. Чему равны тангенциальное a_τ и нормальное a_n ускорения электрона в магнитном поле?

Ответ: $a_\tau = 0$; $a_n = a = \upsilon eB/m_e = 7\cdot10^{15}$ м/с^2.

11.11. Электрон, ускоренный разностью потенциалов U = 1 кВ, влетает в однородное магнитное поле, перпендикулярное направлению его движения. Индукция магнитного поля $B = 1{,}2\cdot10^{-3}$ Тл. Найти момент L импульса электрона.

Ответ: $L = 2m_eU/B = 1{,}5\cdot10^{-24}$ кг·м^2·с$^{-1}$.

11.12. Заряженная частица движется в магнитном поле по окружности со скоростью $\upsilon = 10^6$ м/с. Индукция магнитного поля равна B = 0,3 Тл. Радиус окружности R = 0,04 м. Найти заряд q частицы, если энергия частицы E = 12 кэВ.

Ответ: $q = 2E/(\upsilon BR) = 3{,}2\cdot10^{-19}$ Кл.

11.13. Протон влетает в однородное магнитное поле под углом $\alpha = 30°$ к линиям индукции B и движется по спирали, шаг h которой равен 1,5 см. Кинетическая энергия протона равна $E_к$ = 435 эВ. Найти магнитную индукцию B.

Ответ: $B = \dfrac{2\pi\sqrt{2E_K m_p}\cdot\cos\alpha}{eh} = 1{,}1$ Тл.

11.14. α-частица, момент импульса L которой равен $1{,}33\cdot10^{-22}$ кг·м^2 ·с$^{-1}$, движется по окружности в магнитном поле B = 2,5·10^{-2} Тл. Найти кинетическую энергию $E_к$ α-частицы.

Ответ: $E_к = Lq_\alpha B/(2m_\alpha)$ = 500 эВ.

11.15. Первоначально α-частица движется свободно со скоростью υ = 3,5·10^6 м/с. В некоторый момент времени в окрестности частицы создается перпендикулярное к ее скорости однородное магнитное поле с индукцией B = 1 Тл. Найти модуль и направление ее магнитного момента p_m.

Ответ: $p_m = m_\alpha\upsilon^2/(2B)$ = 4,1·10^{-14} Дж/Тл; $\mathbf{p}_m \uparrow\uparrow \mathbf{B}$.

11.16. Винтовая линия, по которой движется электрон в однородном магнитном поле, имеет диаметр d = 8 см и шаг h = 20 см. Индукция магнитного поля B = 5·10^{-3} Тл. Определить скорость электрона.

Ответ: $\upsilon = \dfrac{eBd}{2m_e \sin\alpha} = 4{,}5\cdot10^7$ м/с, где $\alpha = \arcsin\left(\dfrac{\pi d}{h}\right) = 51^\circ 47'$.

11.17. Вычислить скорость υ, которую приобретает электрон, пройдя разность потенциалов U, равную: а) 100 В; б) 100 кВ.

Ответ: а) υ = 5,9·10^6 м/с; б) $\upsilon = c\sqrt{1-\left[m_0c^2\big/\left(eU+m_0c^2\right)^2\right]^2} = 1{,}64\cdot10^8$ м/с.

11.18. Электрон влетает в плоский горизонтальный конденсатор параллельно его пластинам со скоростью υ_0 = 10^7 м/с. Длина конденсатора l = 5 см, напряженность электрического поля E = 100 В/см. При вылете из конденсатора электрон попадает в магнитное поле B = 0,01 Тл. Вектор $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$. Найти радиус R траектории электрона.

Ответ: $R = \dfrac{m_e}{eB}\sqrt{\upsilon_0^2 + \left(\dfrac{eEl}{m_e\upsilon_0}\right)^2} = 7{,}6$ мм.

11.19. Магнитное поле с индукцией B = 5·10^{-4} Тл и электрическое поле E = 10 В/см взаимно перпендикулярны и однородны. Скорость электронов $\boldsymbol{\upsilon}$, влетающих в пространство с полями, перпендикулярна векторам **B** и **E**. Найти скорость электронов υ, если электроны не испытывают отклонения, и радиус R кривизны траектории после выключения поля E.

Ответ: $\upsilon = E/B$ = 2·10^6 м/с; $R = m_e\upsilon/(eB)$ = 2,3 см.

11.20. Электрон, ускоренный полем **E** при $\Delta\varphi$ = 400 В, попадает в однородное магнитное поле H = 1000 А/м. Вектор скорости $\boldsymbol{\upsilon}$ электрона перпендикулярен линиям **H**. Найти радиус R кривизны траектории электрона в магнитном поле.

Ответ: $R = \dfrac{1}{\mu_0 H}\sqrt{\dfrac{2\Delta\varphi m_e}{e}} = 5{,}37$ см.

11.21. Заряженная частица с кинетической энергией $E_К = 2$ кэВ движется в однородном магнитном поле по окружности радиусом $R = 4$ мм. Определить силу Лоренца $F_Л$, действующую на частицу со стороны поля.

Ответ: $F_Л = 2E_К/R = 0{,}16$ пН.

11.22. Два иона с одинаковыми зарядами, пройдя одну и ту же ускоряющую разность потенциалов, влетают в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции. Один ион, масса которого $m_1 = 12$ а.е.м., описал дугу окружности радиусом $R_1 = 2$ см. Определить массу m_2 (в а.е.м.) другого иона, который описал дугу окружности радиусом $R_2 = 2{,}31$ см.

Ответ: $m_2 = m_1(R_2/R_1)^2 = 16$ а.е.м.

11.23. Протон движется по окружности в однородном магнитном поле $B = 2$ Тл. Определить силу эквивалентного тока I, создаваемого движением протона.

Ответ: $I = e^2B/(2\pi m_p) = 4{,}9\cdot 10^{-12}$ А $= 4{,}9$ пА.

11.24. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10$ мТл по винтовой линии, радиус которой $R = 1{,}5$ см и шаг $h = 10$ см. Определить период T обращения электрона и его скорость v.

Ответ: $T = 2\pi m_e/(eB) = 3{,}5$ нс;

$v = h/(T\cos\alpha) = 4\cdot 10^7$ м/с, где $\alpha = \mathrm{arctg}(2\pi R/h) = 43{,}3°$.

11.25. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 2$ Тл движется α-частица. Траектория ее движения представляет собой винтовую линию с радиусом $R = 1$ см и шагом $h = 6$ см. Определить кинетическую энергию $E_К$ движения частицы.

Ответ: $E_К = \dfrac{1}{2m_\alpha}\left(\dfrac{q_\alpha BR}{\sin\alpha}\right)^2 = 6\cdot 10^{-15}$ Дж, где $\alpha = \mathrm{arctg}(2\pi R/h) = 46{,}3°$.

12. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА. ЗАКОН БИО – САВАРА – ЛАПЛАСА. ЗАКОН АМПЕРА. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТОКОВ

А. Магнитное поле постоянного тока. Закон Био – Савара – Лапласа

Основные формулы и обозначения

Закон Био – Савара – Лапласа определяет индукцию магнитного поля $d\mathbf{B}$ элементарного отрезка тока $I d\mathbf{l}$ на расстоянии $\mathbf{r}$ от его оси

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I[d\mathbf{l},\mathbf{r}]}{r^3}, \qquad dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl\sin\alpha}{r^2},$$

где $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная; α – угол между векторами $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$.

Принцип суперпозиции (наложения) магнитных полей

$$\mathbf{B} = \sum_i \mathbf{B}_i, \text{ или } \mathbf{B} = \int_{(L)} d\mathbf{B},$$

где $\mathbf{B}$ – магнитная индукция результирующего поля; $\mathbf{B}_i$ – магнитная индукция складываемых полей.

Индукция магнитного поля B_0 на оси кольца с током I

$$B_0 = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(a^2+R^2\right)^{3/2}},$$

и в центре кольца $B_ц$

$$B_ц = \frac{\mu_0 I}{2R},$$

где R – радиус кольца; a – расстояние от центра кольца до данной точки.

Индукция магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии r от бесконечно длинного ($L >> r$) проводника с током I

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Магнитная индукция короткого проводника с током I (рис. 12.1)

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right).$$

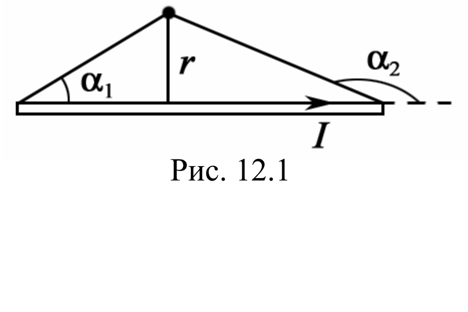


Рис. 12.1

Б. Сила Ампера

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l},\mathbf{B}], \quad dF = IBdl\cdot\sin\alpha,$$

где $Id\mathbf{l}$ – бесконечно малый элемент проводника с током, помещенный в магнитное поле $\mathbf{B}$; dF – модуль силы Ампера; α – угол между векторами $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{B}$;

$$d\mathbf{F} = [\mathbf{j},\mathbf{B}]dV,$$

где $\mathbf{j}$ – плотность тока; dV – элементарный объем проводника.

На провод конечной длины l, помещенный в магнитное поле $\mathbf{B}$, действует сила Ампера

$$\mathbf{F} = I\int\limits_{(l)}[d\mathbf{l},\mathbf{B}].$$

Сила взаимодействия на единицу длины двух проводников с токами I_1 и I_2

$$F_{\text{ед}} = \frac{F}{l} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2I_1I_2}{d},$$

где d – расстояние между проводниками; l – длина проводника, μ - магнитная проницаемость среды.

Задачи с решениями

Общие положения

При исследовании магнитного поля необходимо выделить источники магнитного поля и их взаимное расположение.

Характеристики магнитного поля произвольной системы токов и движущихся электрических зарядов рассчитываются на основе закона Био – Савара – Лапласа и принципа суперпозиции. Наиболее существенным, как и для электрических полей, является учет векторного характера принципа суперпозиции.

Задача 1. Определить модуль вектора магнитной индукции **B** магнитного поля, созданного системой тонких проводников (рис.12.2), по которым идет ток I = 6 А, в точке A, являющейся центром кругового проводника радиуса R = 5 см. В точке O проводники не касаются друг друга

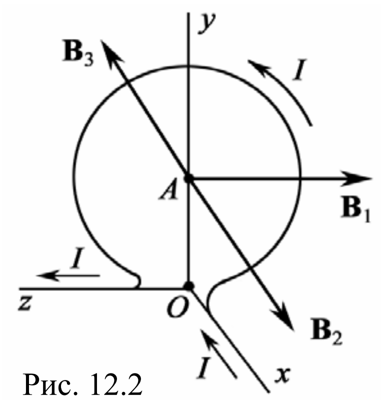


Рис. 12.2

Дано:	
$I = 6$ А	
$R = 0{,}05$ м	
$B - ?$	

Решение: Магнитное поле создается тремя источниками: полубесконечным прямым проводником xO, круговым проводником радиуса R, центр которого расположен в точке A, а его плоскость совпадает с плоскостью zOy, и полубесконечным прямым проводником Oz.

По всем проводникам течет один и тот же ток I. Вектор $\mathbf{B}_1$ магнитной индукции поля проводника xO лежит в плоскости zOy и направлен против оси Oz; вектор $\mathbf{B}_2$ магнитной индукции кругового тока лежит в плоскости xOy и направлен по оси Ox; вектор $\mathbf{B}_3$ магнитной индукции проводника Oz лежит в той же плоскости xOy, но направлен противоположно вектору $\mathbf{B}_2$ (см. рис.12.2). Модули векторов $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_3$ равны

$$B_1 = B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\cos 90^\circ - \cos 180^\circ) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}.$$

Модуль вектора $\mathbf{B}_2$ (круговой ток) $B_2 = \dfrac{\mu_0 I}{2R}$.

Модуль вектора магнитной индукции найдем, используя принцип суперпозиции полей

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3,$$

$$B = \sqrt{B_1^2 + \left(B_2 - B_3\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 I}{2R} - \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\right)^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\sqrt{2\left(2\pi^2 - 2\pi + 1\right)}.$$

Проведем вычисления

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 6}{4\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2}}\sqrt{2 \cdot \left(2 \cdot \pi^2 - 2 \cdot \pi + 1\right)} = 6{,}4 \cdot 10^{-5}\ \text{Тл} = 64\ \text{мкТл}.$$

Ответ: $B = 64$ мкТл.

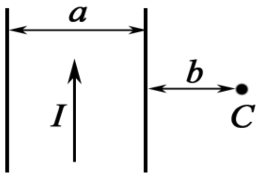


Рис. 12.3.1

Задача 2. По тонкой ленте шириной a = 20 см течет ток I = 6 А. Определить магнитную индукцию в точке C, отстоящей от ленты на расстоянии b = 10 см (рис. 12.3.1).

Дано:	
$a = 0{,}2$ м	
$b = 0{,}1$ м	
$I = 6$ А	
$B - ?$	

Решение: Проводник нельзя считать ни тонким, ни элементом тока, следовательно, непосредственное применение закона Био – Савара – Лапласа в данном случае невозможно. Поэтому разбиваем ленту на узкие ленточки шириной dx так, чтобы каждую из них можно было считать тонким линейным проводником.

Рассмотрим одну такую полоску шириной dx, находящуюся на расстоянии x от точки C, в которой необходимо определить индукцию B (рис. 12.3.2).

Элементарный ток этой ленточки равен $dI = I\dfrac{dx}{a}$. Он создает в точке C элементарную индукцию dB

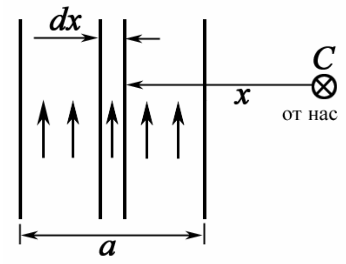


Рис. 12.3.2

$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi x}dI = \frac{\mu_0}{2\pi x}\frac{I}{a}dx.$$

Отсюда после интегрирования получаем

$$B = \int_a^{a+b}\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\ln\frac{a+b}{a}.$$

Подставляя численные значения, вычисляем B по модулю

$$B = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 6}{2\pi\cdot 0,2}\cdot\ln\frac{3}{2} = 2,4\cdot 10^{-6}\text{ Тл} = 2,4\text{ мкТл}.$$

Ответ: B = 2,4 мкТл.

Задача 3. Тонкая лента шириной l свернута в трубку радиусом R (рис. 12.4). По ленте течет равномерно распределенный по ее ширине ток I. Определить модуль вектора магнитной индукции в произвольной точке на оси трубки.

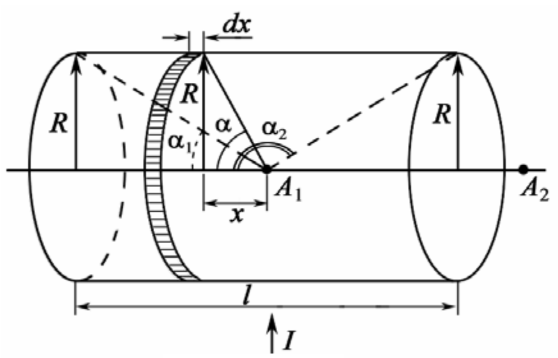


Рис. 12.4

Решение: Так как данный проводник нельзя считать ни тонким, ни элементом тока, то для решения задачи нельзя использовать закон Био – Савара – Лапласа. Здесь также трудно использовать теорему о циркуляции, так как магнитное поле лишено симметрии.

Для решения разделим трубку на столь узкие кольца, чтобы каждое из них можно было считать за тонкий круговой проводник. Рассмотрим одно такое узкое кольцо шириной dx, находящееся на расстоянии x от произвольной точки A_1. Элементарный ток этого узкого кольца $dI = \dfrac{dx}{l}I$ создает в точке A_1 элементарную магнитную индукцию (магнитное поле кругового тока)

$$dB = \frac{\mu_0 R^2 dI}{2\left(R^2+x^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I R^2}{2l\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}dx.$$

Удобнее выбрать за переменную интегрирования угол α, под которым радиус каждого узкого кольца виден из точки A_1. Так как (рис. 12.4)

$$x = R\text{ctg}\alpha, \qquad dx = -\frac{Rd\alpha}{\sin^2\alpha}, \quad R^2 + x^2 = \frac{R^2}{\sin^2\alpha},$$

то

$$dB = -\frac{\mu_0 I \sin\alpha d\alpha}{2l}.$$

Так как нас интересует модуль вектора **B**, то знак “минус” можно опустить. Отсюда после интегрирования получаем

$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} -\frac{\mu_0 I \sin\alpha d\alpha}{2l} = -\frac{\mu_0 I}{2l}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) = \frac{\mu_0 I}{2l}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2), \quad (1)$$

где $\alpha_1 < \alpha_2$.

Если ввести ток на единичную длину трубки $I_0 = I/l$, то формула (1) примет вид

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{2}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2). \quad (2)$$

Формула (2) справедлива и для соленоида, если учесть соотношение $I_0 = nI_1$, где n – число витков на единичную длину соленоида; I_1 – сила тока в соленоиде. Итак, для конечного соленоида

$$B = \frac{\mu_0 n I_1}{2}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2). \quad (3)$$

Полученные формулы (1) – (3) справедливы и для точки A_2, находящейся на оси трубки вне ее (см. рис. 12.4). Заметим, что для точки A_1 угол α_2 всегда тупой, а для точки A_2 – всегда острый (исключая точки на торцах трубки). Полезно исследовать различные частные случаи: точка A_1 расположена в середине трубки, на ее концах и т.д., а также случай бесконечной трубки или соленоида ($l \to \infty$).

Данный тип задач может быть использован при организации семинаров по частично поставленным задачам, когда учащимся предлагается самостоятельно выбрать точки исследования.

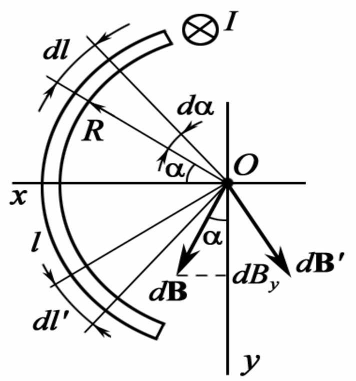


Рис. 12.5

Задача 4. Ток течет по длинному прямому проводнику, сечение которого имеет форму тонкой дуги длиной l и радиусом R (рис. 12.5). Определить индукцию магнитного поля в точке O, если $R = 0{,}1$ м, $I = 6$ А, $l = \pi R/2$.

Решение: Легко видеть, что проводник нельзя считать ни тонким прямым проводником, ни элементом тока. Следовательно, мы не можем непосредственно использовать закон Био – Савара – Лапласа и его следствие. Так как магнитное поле несимметрично, то сомнительно, что теорема о циркуляции может дать положительный результат.

Разделим проводник на столь узкие длинные прямые проводники, чтобы каждый из них можно было принять за тонкий длинный прямой проводник. Магнитное поле тонкого прямого бесконечного проводника можно рассчитать по формуле

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \tag{1}$$

Рассмотрим один такой проводник шириной dl. Элементарный ток этого проводника $dI = \dfrac{dl}{l} I$ в точке O создает магнитное поле, элементарная индукция которого по (1)

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I dl}{2\pi l R}.$$

Легко видеть, что результирующий вектор **B** направлен по оси Oy (следовательно, $B_x = 0$). Проекция вектора $d\mathbf{B}$ на ось Oy

$$dB_y = \frac{\mu_0 I dl}{2\pi l R} \cos\alpha.$$

За переменную интегрирования выберем угол α. Так как $dl = Rd\alpha$, то

$$dB_y = \frac{\mu_0 I \cos\alpha d\alpha}{2\pi l}.$$

Отсюда после интегрирования получаем

$$B_y = \int\limits_{-\alpha_0/2}^{+\alpha_0/2} \frac{\mu_0 I \cos\alpha d\alpha}{2\pi l} = \frac{\mu_0 I}{\pi l} \sin\frac{\alpha_0}{2},$$

где $\alpha_0 = l/R$ – центральный угол дуги l.

По условию задачи $l = \pi R/2$, следовательно, $\alpha_0 = \pi/2$. Тогда

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{\pi l} \sin\frac{\alpha_0}{2} = \frac{2\mu_0 I}{\pi^2 R} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-7} \cdot 6}{\pi \cdot 0{,}1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1{,}08 \cdot 10^{-5}\ \text{Тл} = 10{,}8\ \text{мкТл}.$$

Ответ: B = 10,8 мкТл.

Задача 5. По тонкой прямой бесконечной ленте шириной l идет ток I. Рассчитать индукцию магнитного поля этого тока в произвольной точке O (рис. 12.6), если I = 6 А, l = 0,1 м, r_0 = 0,1 м.

Решение: Свяжем точку O с системой координат, оси которой направим, как показано на рисунке. Для расчета магнитного поля разделим ленту на столь узкие участки, чтобы каждый из них можно было принять за тонкий прямой бесконечный проводник. Рассмотрим один

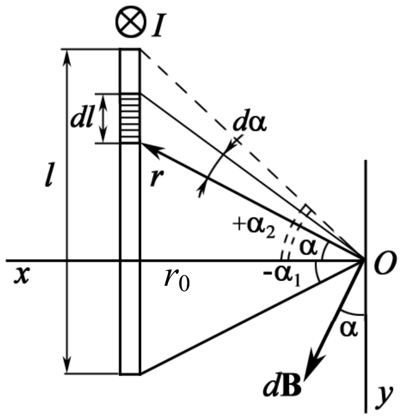


Рис. 12.6

такой участок проводника шириной dl. Элементарный ток этого участка $dI = \frac{dl}{l} I$ создает в точке O магнитное поле, модуль магнитной индукции которого

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I dl}{2\pi l r}.$$

Точка O удалена от плоскости на расстояние r_0. Тогда

$$r = \frac{r_0}{\cos\alpha}, \qquad dl = \frac{r d\alpha}{\cos\alpha} = \frac{r_0 d\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

Таким образом, $$dB = \frac{\mu_0 I d\alpha}{2\pi l \cos\alpha}.$$

Найдем проекции вектора $d\mathbf{B}$ на оси Ox и Oy:

$$dB_x = dB\sin\alpha = \frac{\mu_0 I \sin\alpha d\alpha}{2\pi l \cos\alpha}; \qquad dB_y = dB\cos\alpha = \frac{\mu_0 I d\alpha}{2\pi l}.$$

Отсюда после интегрирования получим

$$B_x = \int_{-\alpha_1}^{+\alpha_2} \frac{\mu_0 I \sin\alpha d\alpha}{2\pi l \cos\alpha} = \frac{\mu_0 I}{2\pi l} \ln\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}; \; B_y = \int_{-\alpha_1}^{+\alpha_2} \frac{\mu_0 I d\alpha}{2\pi l} = \frac{\mu_0 I(\alpha_2 + \alpha_1)}{2\pi l}. \quad (1)$$

Из полученных формул видно, что индукция магнитного поля не зависит от расстояния между тонкой лентой с током I и точкой O.

Введя ток на единичную ширину ленты $I_0 = I/l$, найдем

$$B_x = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}; \quad B_y = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}(\alpha_2 + \alpha_1).$$

В случае симметричного расположения точки O (при $\alpha_1 = \alpha_2$) имеем $B_x = 0$, $B_y = \mu_0 I_0 \alpha_1/\pi$. Для ленты бесконечной ширины (т.е. плоскости) $B_x = 0$, $B_y = \mu_0 I_0/2$ (поле плоскости с равномерно распределенным током I_0 однородно).

Подставляя численные значения в (1) и принимая $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 45°$, получим

$$B_x = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 6}{2\pi\cdot 0{,}1} \ln\frac{1\cdot 2}{\sqrt{2}} = 4{,}2\cdot 10^{-6}\ \text{Тл} = 4{,}2\ \text{мкТл};$$

$$B_y = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 6}{2\pi\cdot 0{,}1}\left(\frac{\pi}{4} + 0\right) = 9{,}4\cdot 10^{-6}\ \text{Тл} = 9{,}4\ \text{мкТл}.$$

Тогда, индукция магнитного поля в точке O будет равна

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{4{,}2^2 + 9{,}4^2} = 10{,}3\ \text{мкТл}.$$

Ответ: $B = 10{,}3$ мкТл.

Задача 6. Кольцо радиусом R = 0,1 м составлено из двух проводников длиной l и $2l$. Сечения проводников равно соответственно $2S$ и S (рис. 12.7.1). Определить индукцию магнитного поля в центре кольца, если к нему по бесконечно длинным проводам подводится постоянный ток I_0 = 5 А.

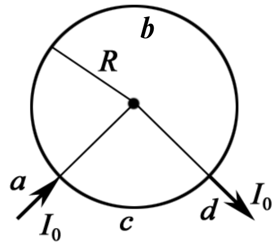


Рис.12.7.1

Решение: Согласно общему правилу решения задач для системы проводников a, b, c, d применим принцип суперпозиции полей

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_a + \mathbf{B}_b + \mathbf{B}_c + \mathbf{B}_d,$$

где B_a и B_d – магнитные поля, создаваемые полубесконечно длинными проводниками. Центр кольца находится на продолжении этих токов. Следовательно, по закону Био – Савара – Лапласа $B_a = B_d = 0$.

Для элемента dl кругового тока имеем $dB = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\,dl}{R^2}$. Тогда магнитная индукция B_b и B_c создана кусочками круговых токов (рис. 12.7.2) I_1 и I_2.

$$B_b = \int\limits_{L_1}\frac{\mu_0 I_1 dl}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I_1 L_1}{4\pi R^2}; \qquad B_c = \int\limits_{L_2}\frac{\mu_0 I_2 dl}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I_2 L_2}{4\pi R^2},$$

где $L_1 = \dfrac{2}{3}(2\pi R)$; $L_2 = \dfrac{1}{3}2\pi R$ – по условию задачи.

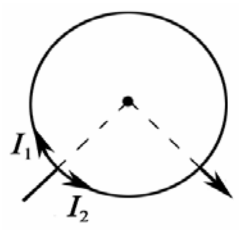


Рис. 12.7.2

В результате, $B_b = \dfrac{\mu_0 I_1}{3R}$; $\qquad B_c = \dfrac{\mu_0 I_2}{6R}$.

Найдем токи I_1 и I_2. Для этого составим эквивалентную схему (рис. 12.7.3)

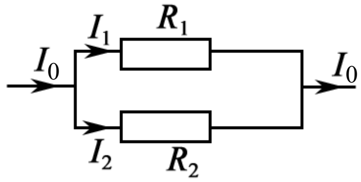


Рис. 12.7.3

Имеем два уравнения

$$I_0 = I_1 + I_2; \qquad I_1 R_1 = I_2 R_2,$$

где $R_1 = \rho\dfrac{2l}{2S}$; $R_2 = \rho\dfrac{l}{S}$. То есть, $R_1 = R_2$.

Следовательно, $I_1 = I_2 = I_0/2$.

Результирующее магнитное поле $\mathbf{B} = \mathbf{B}_b + \mathbf{B}_c$, где векторы $\mathbf{B}_b$ и $\mathbf{B}_c$ направлены по одной прямой, но в противоположные стороны, поэтому

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{6R} - \frac{\mu_0 I_0}{12R} = \frac{\mu_0 I_0}{12R}.$$

Проведем вычисления: $B = \dfrac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 5}{12\cdot 0{,}1} = 5{,}2\cdot 10^{-6}$ Тл $= 5{,}2$ мкТл.

Ответ: B = 5,2 мкТл.

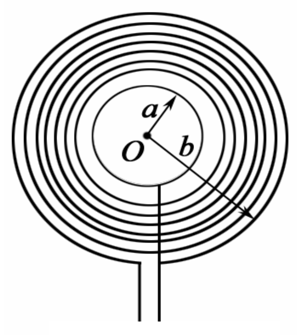


Рис. 12.8.1

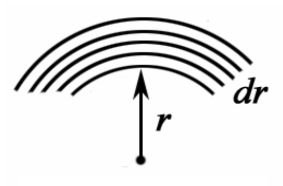


Рис. 12.8.2

Задача 7. Тонкий провод с изоляцией образует плоскую спираль из $N = 200$ плотно расположенных витков, по которым течет постоянный ток $I = 6$ А (рис. 12.8.1). Радиусы внутреннего и внешнего витков равны $a = 1$ см, $b = 10$ см. Найти магнитную индукцию B в центре спирали.

Решение: Известно, что вклад от одного витка радиуса r равен $B_1 = \dfrac{\mu_0 I}{2r}$, а от всех витков $B = \int B_1 dN$, где dN – число витков в интервале от r до $r + dr$ (рис. 12.8.2). Очевидно, что

$$dN = \frac{N}{b-a} dr.$$

Смысл $N/(b-a)$ заключается в том, что это есть число витков на единицу длины по радиусу.

$$B = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2} \frac{N}{(b-a)} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I N}{2(b-a)} \ln\frac{b}{a}.$$

Проводим вычисления:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 6 \cdot 200}{2 \cdot (10-1) \cdot 10^{-2}} \ln\frac{10}{1} = 1{,}93 \cdot 10^{-2} \text{ Тл} = 19{,}3 \text{ мТл}.$$

Ответ: $B = 19{,}3$ мТл.

Задача 8. Определить магнитную индукцию B короткой катушки длиной $L = 20$ см и содержащей $N = 500$ витков в точке, лежащей на оси катушки на расстоянии $l_1 = 5$ см от ее конца. Радиус R катушки, по которой течет ток $I = 6$ А, равен 5,0 см.

Решение: Для решения задачи необходимо выполнить рисунок.

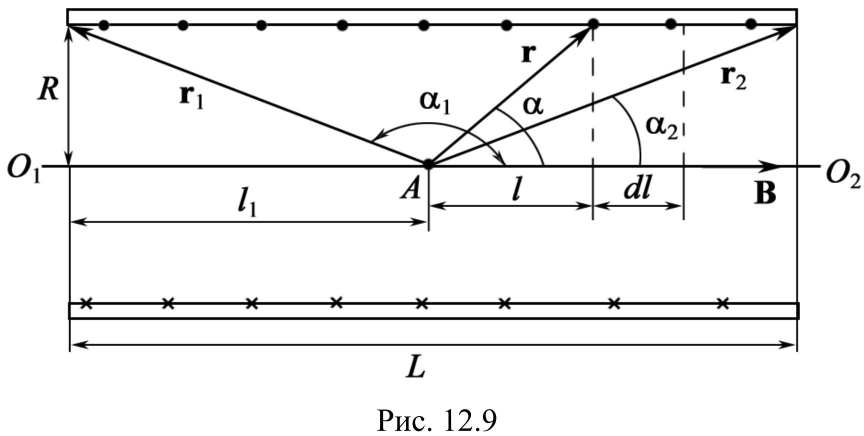


Рис. 12.9

На рисунке 12.9 показано сечение катушки. Точками показаны витки с током, направленным к нам, крестиками – от нас.

Очевидно, что магнитная индукция **B** в любой точке A, лежащей на оси O_1O_2 соленоида, направлена вдоль оси по правилу буравчика и численно равна алгебраической сумме индукций магнитных полей, создаваемых в точке A всеми витками

$$\mathbf{B} = \int_1^N \mathbf{B}_i .$$

Проведем из точки A к какому-либо витку радиус-вектор **r**, образующий с осью O_1O_2 угол α. Индукция $\mathbf{B}_i$ магнитного поля витка с током в точке A численно равна

$$B_i = \frac{\mu\mu_0}{2}\frac{IR^2}{\left(R^2 + l^2\right)^{3/2}}.$$

На малый участок длины соленоида dl приходится ndl витков, где $n = N/l$, создающих в точке A магнитное поле, индукция которого численно равна

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{2}\frac{IR^2}{\left(R^2 + l^2\right)^{3/2}} ndl. \qquad (1)$$

Выразим переменные величины dl и $\sqrt{R^2 + l^2} = r$ через одну независимую переменную – угол α. Как видно из рисунка, расстояние $l = R\text{ctg}\alpha$, откуда

$$dl = -\frac{Rd\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Длина радиуса-вектора **r** равна

$$r = \sqrt{R^2 + l^2} = R/\sin\alpha.$$

Подставив в уравнение (1) выражения для dl и $(R^2 + l^2)^{3/2}$, после сокращений получим

$$dB = -\frac{1}{2}\mu\mu_0 nI \sin\alpha d\alpha. \qquad (2)$$

Для нахождения числового значения магнитной индукции в точке A поля соленоида с током необходимо проинтегрировать выражение (2) по всем значениям α. Углы, которые образуют с осью соленоида радиусы-векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, проведенные к крайним виткам соленоида, равны α_1 и α_2 (см. рис. 12.9).

$$B = -\frac{1}{2}\mu\mu_0 nI \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha d\alpha.$$

Магнитная индукция **B** в произвольной точке A оси соленоида численно равна

$$B = \frac{1}{2}\mu\mu_0 nI\left(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\right), \text{ где } \alpha_2 < \alpha_1. \qquad (3)$$

По условию задачи $\alpha_1 > 90°$ (см. рис. 12.9). Следовательно,

$$\cos\alpha_1 = -\frac{l_1}{\sqrt{R^2 + l_1^2}}; \qquad \cos\alpha_2 = \frac{L - l_1}{\sqrt{R^2 + (L - l_1)^2}}. \qquad (4)$$

Можно доказать, что при прочих равных условиях **B** наибольшая в точке, лежащей на середине оси соленоида,

$$B_{\max} = \frac{\mu\mu_0 nIL}{\sqrt{4R^2 + L^2}}.$$

Подставляя численные значения в уравнения (4) и (3), находим

$$\cos\alpha_1 = -\frac{5}{\sqrt{25+25}} = -0,707; \;\; \cos\alpha_2 = \frac{15}{\sqrt{25 + (20-5)^2}} = 0,95;$$

$$B = \frac{1}{2}\frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 500\cdot 6}{0,2}(0,95 - (-0,707)) = 0,0156 \text{ Тл} = 15,6 \text{ мТл}.$$

Ответ: 15,6 мТл.

Задача 9. Два параллельных бесконечно длинных провода, по которым текут в одном направлении токи I = 60 А, расположены на расстоянии d = 10 см друг от друга. Определить индукцию магнитного поля в точке, отстоящей от одного проводника на расстоянии r_1 = 5 см и от другого – на расстоянии r_2 = 12 см.

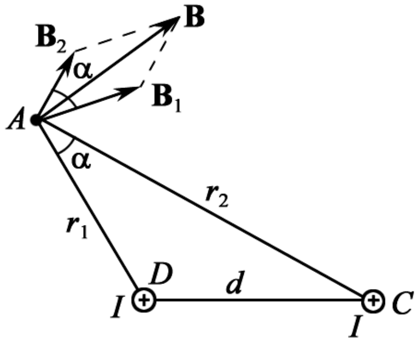


Рис. 12.10

Решение: Для нахождения индукции магнитного поля **B** в указанной точке A (рис. 12.10) определим направления векторов индукций $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ полей, создаваемых каждым проводником в отдельности и, применяя принцип суперпозиции, находим результирующее поле

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2.$$

Модуль **B** равен

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos\alpha}, \qquad (1)$$

где α – угол между векторами $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$.

Значения индукций B_1 и B_2 находим из закона Био – Савара – Лапласа (для прямых длинных проводников)

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}, \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}.$$

Подставляя B_1 и B_2 в формулу (1), получим

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{2}{r_1 r_2}\cos\alpha}. \qquad (2)$$

Вычислим $\cos\alpha$. Заметим, что $\alpha = \angle DAC$ (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами). Поэтому по теореме косинусов запишем

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\alpha,$$

Отсюда

$$\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2}.$$

Подставляя данные, вычислим значение косинуса

$$\cos\alpha = \frac{5^2 + 12^2 - 10^2}{2\cdot 5\cdot 12} = 0{,}575.$$

Подставляя в формулу (2) значения μ_0, I, r_1, r_2 и значение $\cos\alpha$, определим магнитную индукцию

$$B = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 60}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{0{,}05^2}+\frac{1}{0{,}12^2}+\frac{0{,}575}{0{,}05\cdot 0{,}12}} = 2{,}85\cdot 10^{-4}\ \text{Тл} = 285\ \text{мкТл}.$$

Ответ: B = 285 мкТл.

Задача 10. Ток I течет по тонкому проводу, изогнутому, как показано на рисунке 12.11. Найти магнитную индукцию в точке O, если $2\alpha_0 = \pi/2$, a = 0,1 м, I = 6 А.

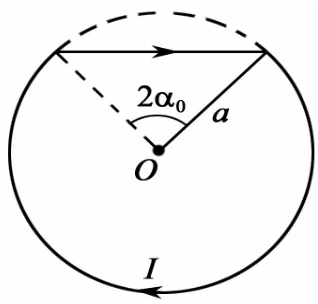


Рис. 12.11

Решение: Воспользуемся принципом суперпозиции для системы, состоящей из двух проводников, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$, где $\mathbf{B}_1$ – индукция магнитного поля короткого проводника с током; $\mathbf{B}_2$ – индукция магнитного поля кругового тока. Индукция магнитного поля элемента короткого проводника с током

$$dB_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\cos\alpha}{b}d\alpha,$$

где $b = a\cos\alpha_0$. Тогда

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi b}\int_{\pi-\alpha_0}^{\alpha_0}\cos\alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\cdot\frac{\sin\alpha_0 - \sin(\pi-\alpha_0)}{\cos\alpha_0} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\operatorname{tg}\alpha_0.$$

Индукция магнитного поля кругового тока от ¾ окружности кольца

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2a}\cdot\frac{2\pi - 2\alpha_0}{2\pi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}(\pi - \alpha_0).$$

Суммируя B_1 и B_2, получим

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left(\mathrm{tg}\alpha_0 + \pi - \alpha_0\right). \qquad (1)$$

Ясно, что если $\alpha_0 \to 0$, то проводник имеет вид кольца и

$$B = \frac{\mu_0 I}{2a}.$$

Подставляя в (1) численные значения, находим

$$B = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 6}{2\pi\cdot 0{,}1}\left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} + \pi - \frac{\pi}{4}\right) \cong 4{,}0\cdot 10^{-5}\ \text{Тл} = 40\ \text{мкТл}.$$

Ответ: B = 40 мкТл.

Задача 11. Тонкий диск, радиус которого 25 см, сделан из диэлектрика и равномерно заряжен по поверхности. Заряд диска 0,5 Кл. Диск вращается в воздухе вокруг оси, проходящей через его центр и перпендикулярной его плоскости, с постоянной угловой скоростью, делая n = 5 об/с. Определить магнитную индукцию в центре диска.

Дано:
R = 0,25 м
q = 0,5 Кл
n = 5 об/с
μ = 1
B – ?

Решение: Вращающийся заряженный диск эквивалентен бесконечно большому числу бесконечно малых концентрических кольцевых токов. Магнитные поля в общем центре кольцевых токов направлены в одну и ту же сторону перпендикулярно плоскости диска. Магнитная индукция dB в центре кольцевого тока dI, радиус которого r, равна

$$dB = \mu\mu_0 \frac{dI}{2r}. \qquad (1)$$

Поверхностная плотность заряда q диска равна $\sigma = q/(2\pi R^2)$. Поэтому заряд dq, находящийся на поверхностях бесконечно тонкого кольца, ограниченного цилиндрическими поверхностями радиусов r и $r + dr$, выразится формулой

$$dq = 2\sigma\cdot 2\pi r dr = \frac{2q}{R^2} r dr.$$

Сила тока, соответствующая n оборотам этого кольца за секунду,

$$dI = n\cdot dq = \frac{2q}{R^2} n r dr.$$

Подставив в (1) dI и проинтегрировав по r от 0 до R, получим

$$B = \frac{\mu\mu_0 q n}{R^2}\int_0^R dr = \frac{\mu\mu_0 q n}{R}.$$

Произведем вычисления:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,5 \cdot 5}{0,25} = 1,26 \cdot 10^{-5}\ \text{Тл} = 12,6\ \text{мкТл}.$$

Ответ: B = 12,6 мкТл.

Задачи для самостоятельного решения

12.1.1. По двум бесконечно длинным проводам текут токи силой I_1 = 50 А и I_2 = 100 А в противоположных направлениях. Расстояние d между проводниками равно 20 см. Определить магнитную индукцию B в точке, удаленной на r_1 = 25 см от первого и на r_2 = 40 см от второго провода.

Ответ: $B = \frac{\mu_0}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{I_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{r_2}\right)^2 - \frac{I_1 I_2}{r_1^2 r_2^2}\left(r_1^2 + r_2^2 - d^2\right)} = 21,2\ \text{мкТл}$.

12.1.2. Два бесконечно длинных прямых провода скрещены под прямым углом. По проводам текут токи силой I_1 = 80 А и I_2 = 60 А. Расстояние d между проводами равно 10 см. Определить магнитную индукцию B в точке A, одинаково удаленной от обоих проводников (рис. 12.12).

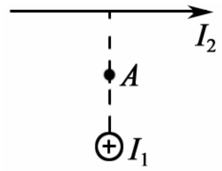


Рис. 12.12

Ответ: $B = \frac{\mu_0}{\pi d}\sqrt{I_1^2 + I_2^2} = 400\ \text{мкТл}$.

12.1.3. По бесконечно длинному прямому проводу, согнутому под углом α = 120°, течет ток силой I = 50 А. Найти индукцию магнитного поля в точках, лежащих на биссектрисе угла и удаленных от вершины его на расстояние a = 5 см.

Ответ: $B_1 = \sqrt{3}\,\frac{\mu_0 I}{2\pi a} = 346\ \text{мкТл}$; $B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a\sqrt{3}} = 116\ \text{мкТл}$.

12.1.4. По четырем длинным прямым параллельным проводникам, проходящим через вершины квадрата (сторона квадрата a = 30 см) перпендикулярно плоскости, текут одинаковые токи I = 10 А, причем по трем проводникам токи текут в одном направлении, а по четвертому – в противоположном. Определить индукцию магнитного поля в центре квадрата.

Ответ: $B = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a} = 18,9\ \text{мкТл}$.

12.1.5. По контуру в виде равностороннего треугольника идет ток силой I = 40 А. Длина a стороны треугольника равна 30 см. Определить магнитную индукцию B в точке пересечения высот.

Ответ: $B = 9\mu_0 I/(2\pi a)$ = 240 мкТл.

12.1.6. Очень длинный проводник с током $I = 5$ А изогнут в форме прямого угла. Найти индукцию магнитного поля в точке, которая отстоит от плоскости, в которой лежит проводник, на $l = 35$ см и находится на перпендикуляре к проводникам, проходящим через точку изгиба.

Ответ: $B = \dfrac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi l}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right) = 2$ мкТл.

12.1.7. Три прямых провода с токами I, $I/4$, $3I/4$ лежат в плоскости и соединены в точке O (рис. 12.13). Найти индукцию магнитного поля на прямой, проходящей через точку O, перпендикулярно всем трем проводам, на расстоянии l от точки O.

Ответ: $B = \sqrt{5}\mu_0 I/(8\pi l)$.

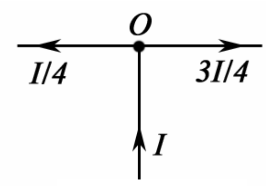


Рис. 12.13

12.1.8. По бесконечно длинному прямому изогнутому проводу (рис. 12.14) течет ток $I = 100$ А. Определить магнитную индукцию B в точке O, если $r = 10$ см.

Ответ: $B = \dfrac{\pi + 4}{8\pi}\cdot\dfrac{\mu_0 I}{r} = 357$ мкТл.

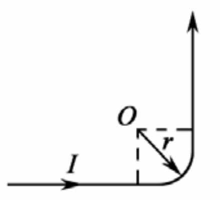


Рис. 12.14

12.1.9. По тонкому проводу, согнутому в виде прямоугольника, течет ток силой $I = 60$ А. Длины сторон прямоугольника равны $a = 30$ см и $b = 40$ см. Определить магнитную индукцию B в точке пересечения диагоналей.

Ответ: $B = 2\mu_0 I\sqrt{a^2 + b^2}/(\pi ab) = 200$ мкТл.

12.1.10. Ток силой $I = 6{,}28$ А циркулирует в контуре, имеющем форму равнобочной трапеции (рис. 12.15). Отношение оснований трапеции равно 2. Найти магнитную индукцию B в точке A, лежащей в плоскости трапеции. Меньшее основание трапеции $l = 100$ мм, расстояние $b = 50$ мм.

Ответ: $B = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi b}\cdot\dfrac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2 + b^2}} = 8{,}9$ мкТл.

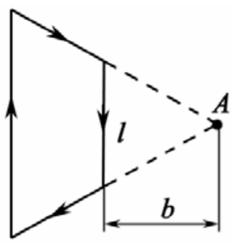


Рис. 12.15

12.1.11. По проводнику в виде тонкого кольца (рис. 12.16) радиусом $R = 10$ см течет ток. Чему равна сила I этого тока, если магнитная индукция B поля в точке A равна 1 мкТл? Угол $\beta = 10°$.

Ответ: $I = 2BR/(\mu_0 \sin^3\beta) = 30$ А.

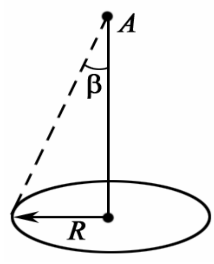


Рис. 12.16

12.1.12. Цепь постоянного тока включает однородное кольцо и два подсоединенных к нему очень длинных радиальных проводника. Чему равна магнитная индукция в центре кольца (рис. 12.17)?

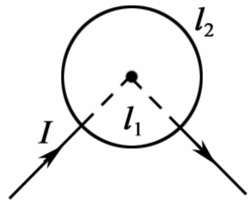


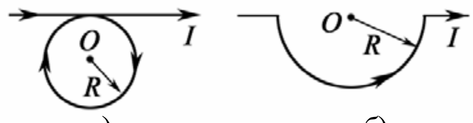
Рис. 12.17

Ответ: $B = \dfrac{\mu_0}{2R} \cdot \dfrac{I_1 l_1 - I_2 l_2}{l_1 + l_2} = 0$.

12.1.13. По тонкому проволочному кольцу течет ток. Не изменяя силы тока в проводнике, ему придали форму квадрата. Во сколько раз изменилась магнитная индукция в центре контура?

Ответ: $B_2 / B_1 = 8\sqrt{2} / \pi^2 = 1{,}15$.

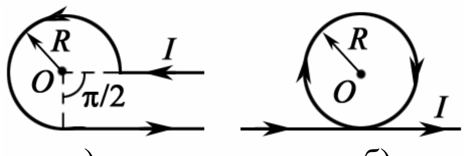
12.1.14. Бесконечно длинный тонкий проводник с током I = 50 А имеет изгиб (плоскую петлю) радиусом R = 10 см. Определить в точке O магнитную индукцию B поля, создаваемого этим током, в случаях а) и б), изображенных на рисунке 12.18.



а) Рис. 12.18 *б)*

Ответ: а) $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}(\pi + 1) = 414$ мкТл; б) $B = \dfrac{\mu_0 I}{4R} = 157$ мкТл.

12.1.15. Бесконечно длинный тонкий проводник с током I = 50 А имеет изгиб (плоскую петлю) радиусом R = 10 см. Определить в точке O магнитную индукцию B поля, создаваемого этим током, в случаях а) и б), изображенных на рис. 12.19.



а) Рис. 12.19 б)

Ответ: а) $B = \dfrac{\mu_0 I}{8\pi R}(3\pi + 2) = 286$ мкТл; б) $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}(\pi + 1) = 414$ мкТл.

12.1.16. По плоскому контуру из тонкого провода (рис. 12.20) течет ток силой I = 10 А. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого этим током в точке O. Радиус R изогнутой части контура равен 20 см.

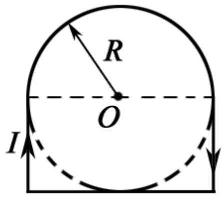


Рис. 12.20

Ответ: $B = \dfrac{\mu_0 I}{2R}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\right) = 30$ мкТл.

12.1.17. Напряженность H магнитного поля в центре кругового витка радиусом R = 8 см равна 30 А/м. Определить напряженность H_1 на оси витка в точке, расположенной на расстоянии d = 6 см от центра витка.

Ответ: $H_1 = \dfrac{HR^3}{\left(R^2 + d^2\right)^{3/2}} = 15{,}36$ А/м.

12.1.18. По плоскому контуру из тонкого провода (рис. 12.21) течет ток силой I = 50 А. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого этим током в точке O. Радиус R изогнутой части контура равен 10 см.

Ответ: $B = \dfrac{\mu_0 I}{8R}\left(3 + \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\right) = 271$ мкТл.

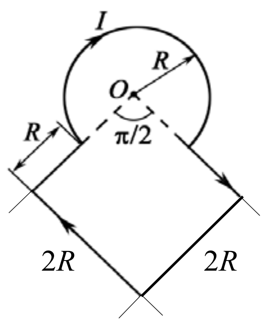


Рис. 12.21

12.1.19. Бесконечно длинный тонкий проводник с током силой I = 50 А имеет изгиб (плоскую петлю) радиусом R = 10 см (рис. 12.22). Определить индукцию магнитного поля, создаваемого этим током в точке O.

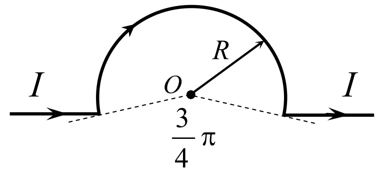


Рис. 12.22

Ответ: $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}\left(\dfrac{5\pi}{8} - \dfrac{1-\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}\right) = 176$ мкТл, где $\alpha = 3\pi/4$.

12.1.20. Найти индукцию магнитного поля в точке O, если проводник с током I = 8 А имеет вид, показанный на рисунке 12.23. Радиус изогнутой части проводника R = 10 см, прямолинейные участки очень длинные.

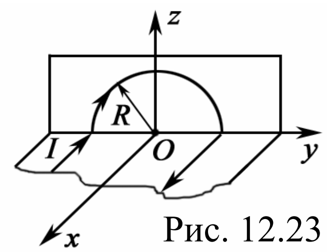


Рис. 12.23

Ответ: $B = \dfrac{\mu_0 I}{2R}\sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{\pi^2}} = 0{,}3$ мТл.

12.1.21. По двум бесконечно длинным прямым проводам, скрещенным под прямым углом (рис. 12.24), текут токи силой I_1 = 30 А и I_2 = 40 А. Расстояние d между проводами равно 20 см. Определить магнитную индукцию B в точке C, одинаково удаленной от обоих проводов на расстояние, равное d.

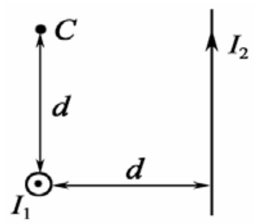


Рис. 12.24

Ответ: $B = \dfrac{\mu_0}{2\pi d}\sqrt{I_1^2 + I_2^2} = 50$ мкТл.

12.1.22. Бесконечно длинный тонкий проводник с током I = 10 А имеет петлю радиусом R = 6 см (рис. 12.25). Определить индукцию магнитного поля на оси кольца на расстоянии h = 8 см от кольца.

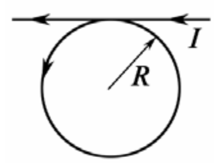


Рис. 12.25

Ответ: $B = \dfrac{\mu_0 I}{2}\sqrt{\dfrac{1}{\pi^2(R^2+h^2)} + \dfrac{R^4}{(R^2+h^2)^3} + \dfrac{2R^3}{\pi(R^2+h^2)^{5/2}}} = 38$ мкТл.

12.1.23. По обмотке очень короткой катушки радиусом r = 16 см течет ток I = 5 А. Сколько витков N проволоки намотано на катушку, если напряженность H магнитного поля в ее центре равна 800 А/м?

Ответ: $N = 2rH/I = 51$.

12.1.24. Ток I = 200 А течет по длинному прямому проводнику, сечение которого имеет форму тонкого полукольца (рис. 12.26) радиусом R = 10 см. Найти индукцию магнитного поля в точке O.

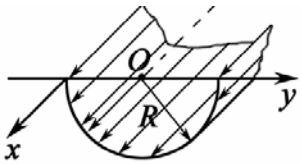


Рис. 12.26

Ответ: $B = \dfrac{\mu_0 I}{\pi^2 R} = 255$ мкТл.

12.1.25. Тонкий провод с изоляцией образует плоскую спираль из N = 100 плотно расположенных витков (рис. 12.27), по которым течет ток $I = 8\cdot10^{-3}$ А. Радиусы внутреннего и внешнего витков равны a = 50 мм, b = 100 мм. Найти индукцию магнитного поля в центре спирали.

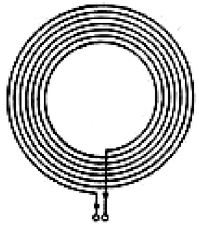


Рис. 12.27

Ответ: $B = \dfrac{\mu_0 IN\ln(b/a)}{2(b-a)} = 7$ мкТл.

12.1.26. Эбонитовый шар радиусом R = 5 см заряжен равномерно распределенным поверхностным зарядом плотностью $\sigma = 10^{-5}$ Кл/м^2. Шар приводится во вращение вокруг своей оси с угловой скоростью ω = 62,8 рад/с. Найти индукцию магнитного поля в центре шара.

Ответ: $B = \dfrac{2}{3}\mu_0\omega\sigma R = 2{,}6\cdot10^{-11}$ Тл.

12.1.27. Катушка длиной l = 20 см содержит N = 100 витков. По обмотке катушки идет ток силой I = 5 А. Диаметр d катушки равен 20 см. Определить магнитную индукцию B в точке, лежащей на оси катушки на расстоянии a = 10 см от ее конца.

Ответ: $B = \dfrac{2\mu_0 IN}{l}\left(\dfrac{a+l}{\sqrt{d^2+4(a+l)^2}} - \dfrac{a}{\sqrt{4a^2+d^2}}\right) = 0{,}76$ мТл.

Б. Закон Ампера. Взаимодействие токов

Задачи с решениями

Задача 1. С какой силой действует постоянный ток силой I = 10 А, проходящий по прямолинейному бесконечно длинному проводнику, на контур из провода, изогнутого в форме квадрата? Проводник расположен в плоскости контура параллельно двум его сторонам. Длина стороны контура l = 40 см, сила тока в нем I_1 = 2,5 А. Направления токов указаны на рисунке. Расстояние от прямолинейного тока до ближайшей стороны контура равно $a = 2$ см.

Дано:
$I = 10$ А
$I_1 = 2{,}5$ А
$\mu = 1$
$l = 0{,}4$ м
$a = 0{,}02$ м

F – ?

Решение: Во всех точках контура $ACDE$ (рис. 12.28) векторы **B** индукции магнитного поля прямолинейного тока I направлены перпендикулярно плоскости контура (за чертеж при выбранных на рисунке направлении тока I и взаимном расположениихаs прямолинейного проводника и контура). Стороны контура AC и DE одинаково расположены по отношению к прямолинейному проводнику с током I, однако направления тока I_1 в них прямо противоположны.

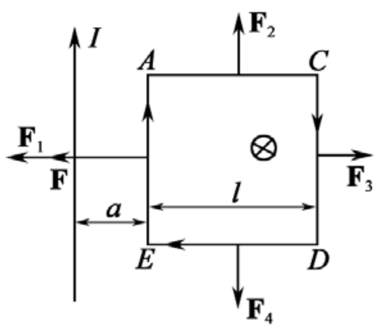


Рис. 12.28

Поэтому силы $\mathbf{F}_2$ и $\mathbf{F}_4$, действующие со стороны магнитного поля тока I на участки AC и DE контура с током I_1, численно равны и противоположны по направлению:

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_4, \text{ так что } \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_4 = 0.$$

Таким образом, результирующая сила **F**, действующая на контур, равна векторной сумме сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_3$, приложенных к сторонам контура EA и CD: $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_3$. Силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_3$ направлены в противоположные стороны и численно равны:

$$F_1 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1I}{a}l, \qquad F_3 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1I}{a+l}l.$$

Результирующая сила **F** направлена в ту же сторону, что и сила $\mathbf{F}_1$, и численно равна

$$F = F_1 - F_3 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}2II_1l\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l}\right) = \frac{\mu\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{II_1l^2}{a(a+l)}.$$

Произведем вычисления:

$$F = \frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot10\cdot2{,}5\cdot0{,}4^2}{2\pi\cdot0{,}02\cdot0{,}42} = 9{,}52\cdot10^{-5}\text{ Н} = 95{,}2\text{ мкН}.$$

Ответ: $F = 95{,}2$ мкН.

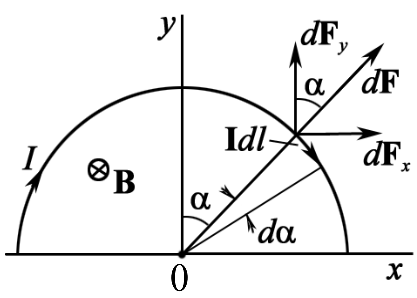


Рис. 12.29

Задача 2. Проводник в виде тонкого полукольца радиусом $R = 10$ см находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 50$ мТл. По проводнику течет ток $I = 10$ А. Найти силу F, действующую на проводник, если плоскость полукольца перпендикулярна линиям индукции (проводящие провода находятся вне поля).

Дано:
$R = 0{,}1$ м
$B = 0{,}05$ Тл
$I = 10$ А

F – ?

Решение: Можно непосредственно применять закон Ампера, однако, используя принцип суперпозиции, нужно помнить, что силы $d\mathbf{F}$ ориентированы не одинаковым образом относительно осей координат (рис. 12.29).

Разделим проводник на столь малые участки, чтобы каждый из них можно было считать элементом с током $Id\mathbf{l}$. Все элементы с током образуют угол $\pi/2$ с векторами $\mathbf{B}$ внешнего магнитного поля (угол $(\mathbf{B}\hat{\ }Id\mathbf{l}) = \pi/2$, поэтому модуль силы Ампера равен

$$dF = IdlB\sin(\pi/2) = IdlB.$$

Однако угол α (см. рис. 12.29) изменяется от 0 до $\pi/2$, $dl = R\cdot d\alpha$. Поэтому проекции силы Ампера, действующей на элементом с током, на ось $0x$ и $0y$ равны:

$$dF_x = dF\sin\alpha;\ \sum dF_x = 0;\ dF_y = dF\cos\alpha.$$

$$F_y = 2\int_0^{\pi/2} dF\cos\alpha = 2\int_0^{\pi/2} IdlB\cos\alpha = 2IRB\int_0^{\pi/2}\cos\alpha d\alpha = 2IRB.$$

Проведя вычисления, получаем $F = 2\cdot 10\cdot 0{,}1\cdot 0{,}05 = 0{,}1$ Н.

Ответ: $F = 0{,}1$ Н.

Задача 3. По сравнению с предыдущей задачей изменим направление вектора $\mathbf{B}$ так, чтобы все силы Ампера $d\mathbf{F}$ были направлены вдоль какой-либо оси (рис. 12.30), но изменялись по модулю. Такие задачи назовем поставленными с неопределенным набором данных. В приведенном примере необходимо создать соответствующую конфигурацию полей и проводников.

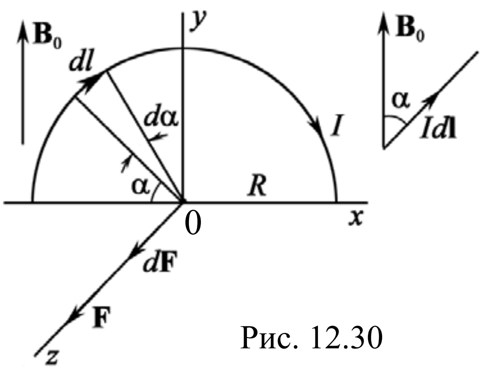


Рис. 12.30

Очевидно, что задача формулируется следующим образом. В однородном магнитном поле с индукцией B_0 расположен тонкий проводник в виде полуокружности радиуса R, по которому течет ток I в направлении, показанном на рисунке. Определить силу, действующую на проводник, если B_0 направлена по оси y, если $R = 0{,}1$ м; $B_0 = 0{,}05$ Тл; $I = 10$ А.

Дано:
$R = 0{,}1$ м
$B_0 = 0{,}05$ Тл
$I = 10$ А

F – ?

Решение: Сила Ампера, действующая на элемент с током, $dF = IdlB_0\sin\alpha$, где $dl = Rd\alpha$.

Легко видим, что все элементарные векторы $d\mathbf{F}_i$ направлены вдоль оси $0z$. Поэтому векторное суммирование сводится к арифметическому

$$F = \int_0^{\pi} IB_0 dl \sin\alpha = IRB_0 \int_0^{\pi} \sin\alpha d\alpha = 2IRB_0 = 2\cdot 10\cdot 0{,}1\cdot 0{,}05 = 0{,}1 \text{ Н}.$$

Ответ: $F = 0{,}1$ Н.

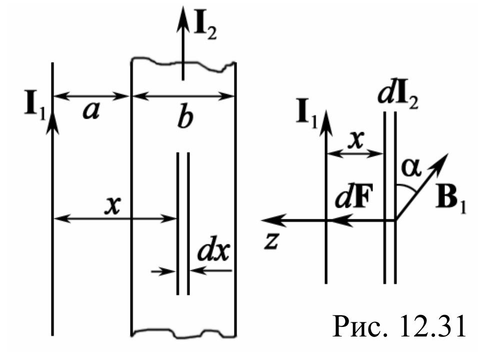


Рис. 12.31

Задача 4. По двум длинным параллельным проводникам текут постоянные токи $I_1 = 2$ А и $I_2 = 10$ А. Расстояние между проводниками $a = 10$ см, ширина правого проводника $b = 5$ см. Имея в виду, что оба проводника лежат в одной плоскости, найти силу магнитного взаимодействия между ними в расчете на единицу их длины (рис. 12.31).

Дано:
$I_1 = 2$ А
$I_2 = 10$ А
$a = 0{,}1$ м
$b = 0{,}05$ м
$F_{\text{ед}}$ – ?

Решение: Применять закон Ампера в виде $F = I_2B_1l$, где $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$, нельзя, т.к. второй проводник является ленточным. Очевидно, что если его разбить на элементарные ленточки шириной dx с токами $dI_2 = \frac{I_2}{b}dx$ (рис. 12.31), то тогда можно применить закон Ампера.

Итак,
$$dF_{\text{ед}} = \frac{dF}{dl} = dI_2 B_1.$$

Все $dF_{\text{ед}}$ направлены по оси z.

$$F_{\text{ед}} = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0}{2\pi x}\frac{I_1 I_2}{b}dx = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{b}\int_a^{a+b}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b}\cdot \ln\frac{a+b}{a}.$$

Проведя вычисления, получим

$$F_{\text{ед}} = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 2\cdot 10}{2\pi\cdot 0{,}05}\cdot \ln\frac{15}{10} = 3{,}2\cdot 10^{-5} \text{ Н/м} = 32 \text{ мкН/м}.$$

Ответ: 32 мк Н/м.

Задача 5. Ток течет по длинному однослойному соленоиду, радиус сечения которого равен R. Число витков на единицу длины n. Найти предельную силу тока, при которой может наступить разрыв обмотки, если предельная нагрузка на разрыв проволоки обмотки равна F_0.

Решение: Все витки соленоида находятся в одинаковых условиях, поэтому рассмотрим один виток (рис. 12.32). На элемент длины витка $dl = Rd\alpha$, согласно закону Ампера, действует сила

$$dF = B_c Idl,$$

где B_c – индукция магнитного поля, в котором находится элемент тока.

Внутри соленоида везде индукция равна $B = \mu_0 I \cdot n$, а на наружной стороне равна нулю.

Поэтому

$$B_c = \frac{B}{2} = \frac{1}{2}\mu_0 nI.$$

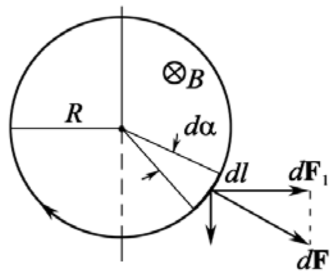


Рис. 12.32

Рассмотрим силу, действующую на половину витка

$$dF_1 = dF\sin\alpha;$$

$$F_1 = \int dF\sin\alpha = \int_0^{\pi} B_c IR\sin\alpha d\alpha = B_c IR\int_0^{\pi}\sin\alpha d\alpha.$$

После интегрирования (интеграл равен 2)

$$F_1 = \mu_0 nI^2R.$$

Эта сила, с которой одна половина витка действует на другую. Так как половина обмотки содержит два конца, то разрыв будет тогда, когда

$$F_0 = F_1/2 = \mu_0 nI^2R/2.$$

Окончательно $I = \sqrt{\dfrac{2F_0}{\mu_0 nR}}$.

Задача 6. Катушку с током I поместили в однородное магнитное поле так, что ее ось совпала с направлением поля. Обмотка катушки однослойная из медного провода диаметром d, радиус витков R (рис. 12.33). При каком минимальном значении индукции внешнего поля B обмотка катушки может быть разорвана, если предел прочности меди равен σ?

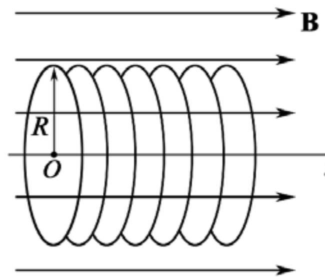


Рис. 12.33

Решение: Сила, действующая на элемент длины одного витка (согласно закону Ампера), равна

$$dF = B_x Idl = B_x IRd\alpha,$$

где $dl = Rd\alpha$ – элемент длины; B_x – магнитная индукция, которая состоит из индукции внешнего поля B и индукции поля, создаваемого катушкой B_c. Индукция магнитного поля катушки B_c (см. задачу 5) равна

$$B_c = \frac{\mu_0 nI}{2}.$$

Значение внешнего поля $\mathbf{B}_x$ будет минимальным, если векторы индукции $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}_c$ параллельны. Тогда выражение для силы, действующей на элемент тока, будет иметь вид

$$dF = \left(B + B_c\right)IRd\alpha = \left(B + \frac{\mu_0 I}{2d}\right)IRd\alpha. \tag{1}$$

Здесь учтено, что число витков n на единицу длины равно $n = 1/d$. Найдем предельную нагрузку

Сила, действующая на половину витка $F_1 = \int dF \sin\alpha$. После интегрирования, с учетом (1), получим

$$F_1 = \left(B + \frac{\mu_0 I}{2d}\right) IR \int_0^{\pi} \sin\alpha d\alpha = 2\left(B + \frac{\mu_0 I}{2d}\right) IR.$$

Эта сила, с которой одна половина витка действует на другую. Разрыв произойдет, когда предельная нагрузка на сечение провода $\pi d^2/4$, будет равна

$$F_0 = \frac{F_1}{2} = \left(B + \frac{\mu_0 I}{2d}\right) IR.$$

Предельная нагрузка F_0 связана с пределом прочности σ следующим соотношением:

$$F_0 = \sigma \frac{\pi d^2}{4}.$$

Приравнивая правые части двух последних уравнений, получим выражение для индукции внешнего магнитного поля

$$B = \frac{\pi d^2 \sigma}{4IR} - \frac{\mu_0 I}{2d}.$$

Задача 7. По двум одинаковым квадратным плоским контурам со стороной a = 20 см текут токи по I = 10 А. Определить силу взаимодействия контуров, если расстояние между плоскостями, в которых лежат контуры, равно 2 мм.

Дано:
$I_1 = I_2 = 10$ А
$a = 0{,}2$ м
$d = 2 \cdot 10^{-3}$ м
F – ?

Решение: Из закона Ампера следует, что два параллельных прямых провода с токами $I_1 = I_2 = I$, расположенными на расстоянии d, взаимодействуют с силой на единицу длины, равной

$$F_{\text{ед}} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}. \quad (1)$$

Чтобы применить написанную формулу, нужно доказать, что проводники, о которых идет речь в задаче, удовлетворяют формулировке закона (1).

Так как $d << a$ (2 мм << 200 мм), мы имеем четыре параллельных проводника, достаточно длинных. Отношение d/a составляет 0,01. Следовательно, с точностью 1 % можно считать правильной формулу (1).

Умножив (1) на общую длину проводника (равную $4a$), получаем

$$F = 4a \cdot F_{\text{ед}} = 4a \cdot \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d} = \frac{2\mu_0 I^2 a}{\pi d}.$$

После вычисления имеем

$$F = \frac{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^2 \cdot 0{,}2}{\pi \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 8 \cdot 10^{-3}\ \text{Н} = 8\ \text{мН}.$$

Ответ: F = 8 мН.

Задача 8. Медный диск A может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси O, совпадающей с одной из силовых линий магнитного поля **B** (рис. 12.34). По шинам L пропускают ток I, при этом диск начинает вращаться. Легкость вращения обеспечивается соответствующей конструкцией устройства. Радиус диска R = 0,1 м, сила тока в цепи I = 6 А, магнитная индукция B = 0,1 Тл. Определить полный вращающий момент M, действующий на диск, и его направление.

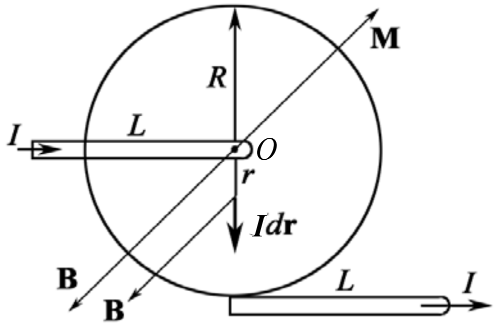


Рис. 12.34

Дано:
I = 6 А
R = 0,1 м
B = 0,1 Тл
M – ?

Решение: Ток в диске идет вдоль вертикального радиуса, играющего роль проводника с током $Id\mathbf{r}$ (см. рис. 12.34). Сила Ампера $d\mathbf{F}$, действующая на элемент $d\mathbf{r}$, численно равна

$$dF = IBdr \cdot \sin\alpha,$$

где α – угол между векторами **B** и $d\mathbf{r}$, $\sin\alpha = 1$.

Сила dF перпендикулярна вертикальному радиусу диска. Поэтому $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ равен

$$dM = rdF = IBrdr.$$

Полный вращающий момент M, действующий на диск, равен сумме всех элементарных моментов

$$M = \int_0^R dM = IB\int_0^R rdr = \frac{1}{2}IBR^2.$$

Произведя вычисления, имеем

$$M = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1^2 = 3 \cdot 10^{-3}\ \text{Н} \cdot \text{м}.$$

Ответ. $M = 3 \cdot 10^{-3}$ Н·м.

Задача 9. Два длинных провода с пренебрежимо малым сопротивлением замкнуты с одного конца на сопротивление R, а с другого конца подключены к источнику постоянного напряжения. Радиус сечения каждого провода в $\eta = 20$ раз меньше расстояния между осями проводов. При каком значении сопротивления R результирующая сила взаимодействия проводов обратится в нуль?

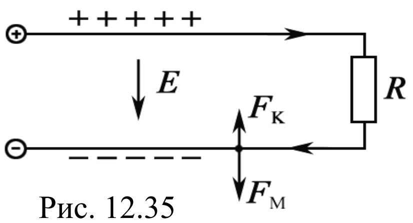


Рис. 12.35

Решение: На каждом из проводов (протекает по ним ток или нет) имеются избыточные поверхностные заряды (рис. 12.35). Поэтому кроме магнитной силы $F_м$ необходимо учесть и электрическую – $F_к$. Пусть на единицу длины провода приходится избыточный заряд λ. Тогда электрическая сила, действующая на единицу длины провода со стороны другого провода, может быть найдена с помощью теоремы Гаусса (см. главу 2):

$$F_К = \lambda E = \lambda \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{l} = \frac{2\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0 l},$$

где l – расстояние между осями проводов.

Магнитную силу, действующую также на единицу длины провода, можно найти по формуле

$$F_м = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I^2}{l},$$

где I – сила тока в проводе.

Обе силы – электрическая и магнитная – направлены в противоположные стороны. Электрическая сила обусловливает притяжение проводов, магнитная – их отталкивание. Найдем отношение этих сил:

$$\frac{F_м}{F_К} = \frac{\varepsilon_0\mu_0 I^2}{\lambda^2}. \qquad (1)$$

Между величинами I и λ существует определенная связь. По определению емкости $C = \lambda/U = \lambda/(RI)$, где $U = RI$. Емкость двух проводников, рассчитанная из геометрии и конечного размера проводников, равна $C = \pi\varepsilon_0/\ln\eta$. Приравнивая емкости, имеем

$$\frac{\lambda}{RI} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\eta}. \qquad (2)$$

Поэтому из соотношения (2) следует, что

$$\frac{I}{\lambda} = \frac{\ln\eta}{\pi\varepsilon_0 R}. \qquad (3)$$

После подстановки (3) в (1) получим

$$\frac{F_м}{F_К} = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \frac{\ln^2 \eta}{\pi^2 R^2}. \qquad (4)$$

Результирующая сила взаимодействия обращается в нуль, когда последнее отношение равно единице. Это будет при $R = R_0$, где

$$R_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot \frac{\ln \eta}{\pi} = 359{,}2 \text{ Ом}.$$

Если $R < R_0$, то $F_м > F_К$ – провода отталкиваются, если же $R > R_0$, то $F_м < F_К$ – провода притягиваются. Это можно наблюдать на опыте.

Таким образом, утверждение, что провода, по которым текут токи одного направления, притягиваются, справедливо лишь в том случае, когда электрической частью взаимодействия можно пренебречь, т.е. при достаточно малом сопротивлении R.

Кроме того, измерив силу взаимодействия между проводами с током (а сила всегда измеряется как результирующая), нельзя определить силу тока I.

Задача 10. Момент сил Ампера. В поле длинного прямого проводника с током I_0 находится контур с током I (рис. 12.36.1). Плоскость контура перпендикулярна прямому проводнику. Найти момент сил Ампера, действующий на этот контур. Необходимые размеры системы указаны на рисунке.

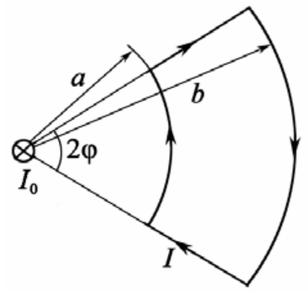


Рис. 12.36.1

Решение: Силы Ампера, действующие на криволинейные участки контура, равны нулю. Силы же, действующие на прямолинейные участки, создают пару сил. Момент этой пары сил надо вычислить.

Выделим два малых элемента контура (рис. 12.36.2). Из рисунка видно, что момент соответствующей им пары сил

$$dM = AD \cdot dF = 2x\text{tg}\varphi dF, \qquad (1)$$

где элементарная сила Ампера

$$dF = IBdr. \qquad (2)$$

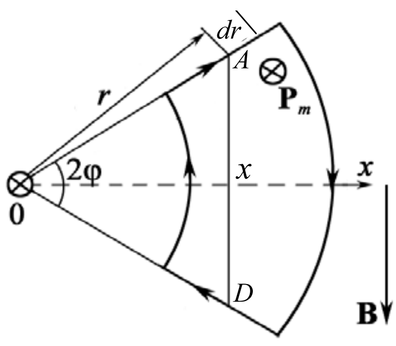


Рис. 12.36.2

Зависимость магнитной индукции B от расстояния r до бесконечного прямого провода с током I находим с помощью теоремы о циркуляции:

$$B = \mu_0 I_0 / (2\pi r). \qquad (3)$$

Подставим (3) в (2), затем (2) в (1) и учитывая, что $x = r\cos\varphi$, проинтегрируем полученное выражение $dM = \dfrac{\mu_0 I_0 I}{\pi}\sin\varphi dr$ по r от a до b. В результате найдем

$$M = \int_a^b dM = \frac{\mu_0 I_0 I}{\pi}\sin\varphi\int_a^b dr = \frac{\mu_0}{\pi} I_0 I\left(b-a\right)\sin\varphi.$$

Причем вектор **M** направлен влево относительно векторов $\mathbf{P}_m$ и **B**. Заметим, что $\mathbf{M} = [\mathbf{P}_m, \mathbf{B}]$. На рис. 12.36.2 вектор $\mathbf{P}_m = IS\cdot\mathbf{n}$ отмечен $\otimes$. Вектор **B** указан стрелкой.

После поворота контура векторы $\mathbf{P}_m$ и **B** будут совпадать по направлению.

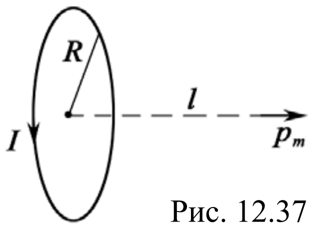


Рис. 12.37

Задача 11. Небольшая катушка с током, имеющая магнитный момент $\mathbf{P}_m$, находится на оси кругового витка радиусом R, по которому течет ток I. Найти силу **F**, действующую на катушку, если ее расстояние от центра витка равно l, а вектор $\mathbf{P}_m$ ориентирован, как показано на рис. 12.37.

Решение: Искомая сила определяется так:

$$\mathbf{F} = p_m \partial\mathbf{B}/\partial n, \tag{1}$$

где **B** – магнитная индукция поля, создаваемого витком в месте нахождения катушки.

Выберем ось z в направлении вектора $\mathbf{P}_m$, тогда проекция (1) на эту ось будет иметь вид

$$F_z = p_m \partial B_z/\partial z = p_m \partial B/\partial z,$$

где учтено, что при заданном направлении тока в витке $B_z = B$.

Магнитная индукция B определяется формулой (магнитное поле на оси витка с током на расстоянии z от центра)

$$B_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}.$$

Поэтому

$$\left.\frac{\partial B}{\partial z}\right|_{z=l} = -\frac{3}{2}\frac{\mu_0 I R^2 l}{\left(l^2 + R^2\right)^{5/2}}.$$

Вследствие того, что $\partial B/\partial z < 0$, проекция силы $F_z < 0$, т.е. вектор **F** направлен в сторону витка с током I. В векторном виде полученный результат запишется так:

$$\mathbf{F} = -\frac{3}{2}\frac{\mu_0 I R^2 l}{\left(l^2 + R^2\right)^{5/2}}\mathbf{P}_m.$$

Если бы вектор $\mathbf{P}_m$ (а значит, и ось z) был направлен в противоположную сторону, то $B_z = -B$ и $\partial B_z/\partial z > 0$, а следовательно, $F_z > 0$, и вектор $\mathbf{F}$ был бы направлен вправо, т.е. опять против вектора $\mathbf{P}_m$.

Задачи для самостоятельной работы

12.2.1. В однородном магнитном поле с индукцией B = 0,01 Тл помещен прямой проводник длиной l = 20 см (подводящие провода находятся вне поля). Определить силу F, действующую на проводник, если по нему течет ток силой I = 50 А, а угол α между направлением тока и вектором магнитной индукции равен 30°.

Ответ: $F = IBl\sin\alpha$ = 50 мН.

12.2.2. В однородном магнитном поле, индукция которого B = 20 мТл в плоскости, перпендикулярной линиям индукции, расположен проводник длиной l = 3 см, согнутый в форме полукольца и обтекаемый током I = 0,1 А. Найти силу, действующую на данный проводник со стороны магнитного поля.

Ответ: $F = F_y = 2IBl/\pi$ = 38 мкН.

12.2.3. В однородном магнитном поле, индукция которого B = 20 мТл, в плоскости, перпендикулярной линиям индукции, расположен прямой проводник длиной l = 3 см, обтекаемый током I = 0,1 А. Найти силу, действующую на данный проводник со стороны магнитного поля.

Ответ: $F = IBl$ = 60 мкН.

12.2.4. По двум одинаковым квадратным контурам со стороной a = 40 см текут токи силой I = 10 А в каждом. Определить силу F взаимодействия контуров, если расстояние d между соответственными сторонами контуров равно 1 мм.

Ответ: $F = 2\mu_0 I^2 a/(\pi d)$ = 16 мН.

12.2.5. По двум параллельным прямым проводам длиной l = 250 см каждый, находящимся на расстоянии d = 20 см друг от друга, текут одинаковые токи силой I = 1 кА. Вычислить силу взаимодействия токов.

Ответ: $F = \mu_0 I^2 l/(2\pi d)$ = 2,5 Н.

12.2.6. По трем параллельным проводам (прямым), находящимся на одинаковом расстоянии d = 50 см друг от друга, текут одинаковые токи силой I = 50 А. В двух проводах направления токов совпадают. Вычислить силу, действующую на отрезок длиной a = 1 м третьего провода.

Ответ: $F = \dfrac{\sqrt{3}\mu_0 I^2 a}{2\pi d} = 1{,}73$ мН.

12.2.7. Прямой провод длиной l = 10 см, по которому течет ток силой I = 20 А, находится в однородном магнитном поле с индукцией B = 10 мТл. Найти угол α между направлениями вектора магнитной индукции и тока, если на провод действует сила F = 10 мН.

Ответ: $\alpha = \arcsin\dfrac{F}{IlB} = \dfrac{\pi}{6}$.

12.2.8. По двум тонким проводам, изогнутым в виде кольца, радиусом R = 10 см, текут одинаковые токи силой I = 10 А в каждом. Найти силу F взаимодействия этих колец, если плоскости, в которых лежат кольца, параллельны, а расстояние d между центрами колец равно 1 мм.

Ответ: $F = \mu_0 I^2 R/d$ = 12,6 мН.

12.2.9. Квадратная проволочная рамка расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом так, что две ее стороны параллельны проводу. По рамке и по проводу текут одинаковые токи силой I = 100 А. Определить силу F, действующую на рамку, если ближайшая к проводу сторона рамки находится на расстоянии, равном ее длине.

Ответ: $F = \mu_0 I^2/(4\pi)$ = 1 мН.

12.2.10. В плоскости с бесконечно длинным прямым проводником с током I_1 = 5 А расположена прямоугольная рамка, обтекаемая током I_2 = 1 А. Найти силы, действующие на каждую сторону рамки со стороны поля, создаваемого прямым током, если длинная сторона b = 20 см параллельна прямому току и находится от него на расстоянии x_0 = 5 см, меньшая сторона a = 10 см.

Ответ: $F_1 = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi x_0} = 4$ мкН ; $F_2 = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\cdot\ln\dfrac{x_0 + a}{x_0} = 1{,}1$ мкН .

12.2.11. Шины генератора представляют собой две параллельные медные полосы длиной l = 2 м каждая, отстоящие друг от друга на расстоянии d = 20 см. Определить силу F взаимного отталкивания шин в случае короткого замыкания, когда по ним течет ток силой I = 10 кА.

Ответ: $F = \mu_0 I^2 l/(2\pi d)$ = 200 Н.

12.2.12. Между полюсами электромагнита в горизонтальном магнитном поле находится проводник, расположенный горизонтально, причем его направление перпендикулярно магнитному полю. Какой ток I должен идти через проводник, чтобы он висел не падая, если индукция поля равна B = 0,01 Тл и масса единицы длины проводника m_l = 0,01 кг/м?

Ответ: $I = m_l g/B$ = 9,8 А.

12.2.13. Горизонтальные рельсы находятся на расстоянии l = 0,3 м друг от друга. На них лежит стержень, перпендикулярный рельсам. Какой должна быть индукция магнитного поля для того, чтобы стержень начал двигаться, если по нему пропускается ток I_0 = 50 А? Коэффициент трения стержня о рельсы μ = 0,2. Масса стержня m = 0,5 кг.

Ответ: $B = \mu mg/(Il)$ = 66,3 мТл.

12.2.14. Ток I течет по длинному однослойному соленоиду, радиус R сечения которого равен 10 см. Число витков на единицу длины соленоида $n = 2\cdot10^4$ м$^{-1}$. Найти предельную силу тока, при которой может наступить разрыв обмотки, если предельная нагрузка на разрыв проволоки обмотки равна $F_{пр}$ = 100 Н.

Ответ: $I_{пр} = \sqrt{2F_{пр}/(\mu_0 nR)} = 282$ А.

12.2.15. Катушку с током I = 100 А поместили в однородное магнитное поле так, что ее ось совпала с направлением поля. Обмотка катушки однослойная из медного провода диаметром d = 0,1 мм, радиус витков R = 30 мм. При каком значении индукции внешнего поля обмотка катушки может быть разорвана? Предел прочности меди $\sigma_m = 3\cdot10^8$ Н/м^2.

Ответ: $B = \pi d^2\sigma_m/(4RI)$ = 0,79 Тл.

12.2.16. Медный провод (ρ_{Cu} = 8400 кг/м^3) сечением S = 2,5 мм^2 согнут в виде трех сторон квадрата и может поворачиваться вокруг оси OO'. Найти индукцию поля (направление указано на рис. 12.38), если при пропускании тока I = 16 А угол отклонения θ = 20 °.

Ответ: $B = \left(\dfrac{2\rho gS}{I}\right)\operatorname{tg}\theta = 9{,}4$ мТл.

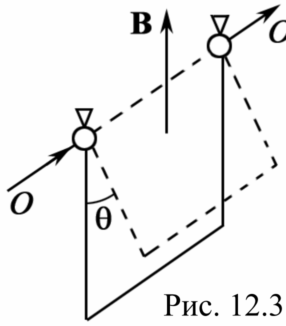


Рис. 12.38

12.2.17. Горизонтальные рельсы находятся на расстоянии l = 0,3 м друг от друга. На них лежит стержень, перпендикулярный рельсам. Вся система находится в однородном магнитном поле $B = 6{,}6\cdot10^{-2}$ Тл. Какой ток I_0 нужно пропустить, чтобы стержень массой 0,5 кг начал движение? Вектор **B** перпендикулярен рельсам и стержню, коэффициент трения стержня о рельсы μ = 0,2.

Ответ: $I_0 = \mu mg/(Bl)$ = 50,5 А.

12.2.18. Постоянный ток I = 14 А течет по длинному прямому проводнику, сечение которого имеет форму тонкого полукольца радиуса R = 5,0 см. Такой же ток течет в противоположном направлении по тонкому проводнику, расположенному на «оси» первого проводника (точка O на рис. 12.39). Найти силу магнитного взаимодействия данных проводников на единицу их длины.

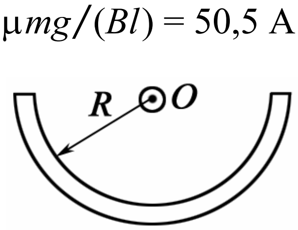


Рис. 12.39

Ответ: $F = \mu_0 I^2/(\pi^2 R)$ = 0,5 мН/м.

12.2.19. Замкнутый контур с током I находится в поле длинного прямого проводника с током I_0. Плоскость контура перпендикулярна к прямому проводнику. Найти момент сил Ампера, действующих на замкнутый контур, если он имеет вид, показанный на рис. 12.40.

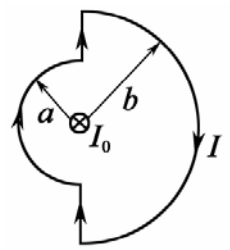


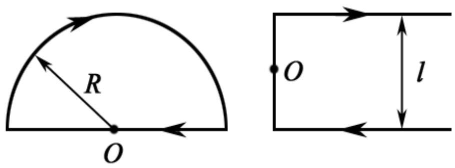
Рис. 12.40

Ответ: $M = \frac{\mu_0}{\pi}(b-a)I_0 I.$

12.2.20. Квадратная рамка с током $I = 0{,}9$ А расположена в одной плоскости с длинным прямым проводником, по которому течет ток $I_0 = 5$ А. Сторона рамки $a = 8$ см. Проходящая через середины противоположных сторон ось рамки параллельна проводу и отстоит от него на расстоянии, которое в $\eta = 1{,}5$ раза больше стороны рамки. Найти силу Ампера, действующую на рамку.

Ответ: $F = \frac{2\mu_0 I_0 I}{\pi\left(4\eta^2 - 1\right)} = 0{,}45 \text{ мкН}$.

12.2.21. Найти модуль и направление силы, действующей на единицу длины тонкого проводника с током $I = 8$ А, в точке O, если проводник изогнут, как показано: а) на рис. 12.41, *а*, и радиус закругления $R = 10$ см; б) на рис.12.41, *б*, и расстояние между длинными параллельными друг другу участками проводника $l = 20$ см.



а) *б*)

Рис. 12.41

Ответ: а) $F = \frac{\mu_0 I^2}{4R} = 0{,}20 \text{ мН/м}$; б) $F = \frac{\mu_0 I^2}{\pi l} = 0{,}13 \text{ мН/м}$.

12.2.22. Катушку с током I поместили в однородное магнитное поле так, что ее ось совпала с направлением поля. Обмотка катушки однослойная из медного провода диаметром $d = 0{,}1$ мм, радиус $R = 30$ мм. При каком значении тока обмотка катушки может быть разорвана, если индукция магнитного поля $B = 0{,}8$ Тл? Предел прочности меди $\sigma_{Cu} = 3\cdot 10^8$ Н/м^2.

Ответ: $I_{пр} = \frac{\pi d^2 \sigma_{Cu}}{4RB} = 98 \text{ А}$

12.2.23. Два длинных прямых взаимно перпендикулярных провода отстоят друг от друга на расстояние a. В каждом проводе течет ток I. Найти максимальное значение силы Ампера на единицу длины провода в этой системе.

Ответ: $F_{max} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi a}$.

12.2.24. Система состоит из двух параллельных друг другу плоскостей с токами, которые создают между плоскостями однородное магнитное поле с индукцией B. Вне этой области магнитное поле отсутствует. Найти магнитную силу, действующую на единицу поверхности каждой плоскости.

Ответ: $F = B^2/(2\mu_0)$.

12.2.25. Укрепленную на конце коромысла весов небольшую катушку K с числом витков $N = 200$ поместили в зазор между полюсами магнита (рис. 12.42). Площадь сечения катушки $S = 1$ см^2, длина плеча OA коромысла $l = 30$ см. В отсутствие тока через катушку весы уравновешены. После того как через катушку пустили ток $I = 22$ мА, для восстановления равновесия пришлось изменить груз на чаше весов на $\Delta m = 60$ мг. Найти индукцию магнитного поля в месте нахождения катушки.

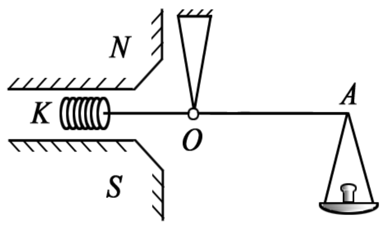


Рис. 12.42

Ответ: $B = \Delta mgl/(NIS) = 0{,}4$ Тл.

13. ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРА B (закон полного тока). МАГНИТНЫЙ ПОТОК

Закон полного тока для магнитного поля в вакууме (теорема о циркуляции вектора **B**)

$$\oint_{(L)} \mathbf{B}\, d\mathbf{l} = \oint_{(L)} B_l dl = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} I_i = \mu_0 I_0 ,$$

где $d\mathbf{l}$ – вектор элементарной длины контура, направленной вдоль обхода контура L; $B_l = B\cos\alpha$ – составляющая вектора **B** в направлении касательной контура L; α – угол между векторами **B** и $d\mathbf{l}$; $I_0 = \sum_{i=1}^{N} I_i$ – алгебраическая сумма токов, находящийся внутри контура.

Поток вектора **B** (магнитный поток) сквозь произвольную поверхность S

$$\Phi = \int \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = \int B_n dS,$$

где B_n – проекция вектора **B** на направление нормали к площадке dS.

Потокосцепление (полный магнитный поток, сцепленный со всеми витками соленоида)

$$\Psi = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i = \mu\mu_0 I \left(\frac{N}{l}\right)^2 V,$$

где μ – магнитная проницаемость сердечника; $N,\ l,\ V$ – полное число витков, длина и объем соленоида.

Задачи с решениями

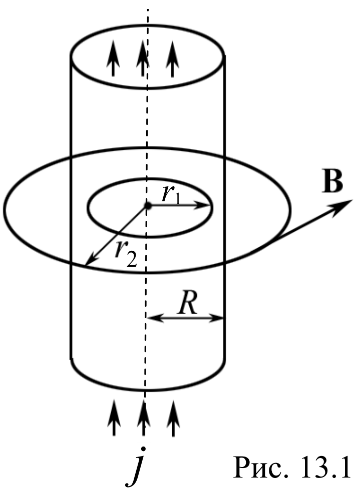


Рис. 13.1

Задача 1. Пусть в стержне радиусом R = 0,1 м течет ток I = 6 А с однородной плотностью j. Найти распределение магнитного поля B внутри и снаружи стержня. Провести вычисления для r_1 = 8 см и r_2 = 16 см.

Решение: Поскольку проводник имеет конечный радиус (рис. 13.1), отличный от нуля, воспользуемся теоремой о циркуляции.

При $r_1 \le R$ (внутри стержня) имеем:

$$\oint_{(L_1)} \mathbf{B}\, d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S j dS \;\Rightarrow\; B_1 \cdot 2\pi r_1 = \frac{\mu_0 I}{\pi R^2} \pi r_1^2 ,$$

или

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r_1.$$

Вне стержня $\oint\limits_{(L_2)} \mathbf{B}\, d\mathbf{l} = B_2 \cdot 2\pi r_2 = \mu_0 I$, где $B_2 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r_2}$ – магнитное поле оказывается таким, как если бы полный ток протекал по оси стержня, а величина вектора индукции магнитного поля определяется как индукция от бесконечного длинного проводника с током.

Подставим численные значения

$$B_1 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 6}{2\pi \cdot 0{,}1^2} \cdot 0{,}08 = 9{,}6 \cdot 10^{-6}\ \text{Тл} = 9{,}6\ \text{мкТл}\ \ (r_1 \le R);$$

$$B_2 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 6}{2\pi \cdot 0{,}16} = 7{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{Тл} = 7{,}5\ \text{мкТл}\ \ (r_2 > R).$$

Ответ: B_1 = 9,6 мкТл; B_2 = 7,5 мкТл.

Задача 2. Определить индукцию B и напряженность H магнитного поля на оси тороида без сердечника, по обмотке которого, содержащей N = 200 витков, идет ток I = 5 А. Внешний диаметр d_1 тороида равен 30 см, внутренний – d_2 = 20 см.

Решение: Для определения напряженности магнитного поля внутри тороида вычислим циркуляцию вектора **H** вдоль линии магнитной индукции поля: $\oint H dl$.

Из условия симметрии следует, что линии магнитной индукции тороида представляют собой окружности и что во всех точках этой линии напряженности одинаковы. Поэтому в выражении циркуляции напряженность H можно вынести за знак интеграла, а интегрирование проводить в пределах от нуля до $2\pi r$, где r – радиус окружности, совпадающей с линией индукции, вдоль которой вычисляется циркуляция, т.е.

$$\oint\limits_L H dl = H \int\limits_0^{2\pi r} dl = 2\pi r H. \qquad (1)$$

С другой стороны, в соответствии с законом полного тока циркуляция вектора напряженности магнитного поля равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром, вдоль которого вычисляется циркуляция:

$$\oint\limits_L H_l dl = \sum_{i=1}^{n} I_i. \qquad (2)$$

Приравняв правые части равенства (1) и (2), получим

$$2\pi rH = \sum_{i=1}^{n} I_i. \qquad (3)$$

Линия, проходящая вдоль тороида, охватывает число токов, равное числу витков тороида. Сила тока во всех витках одинакова. Поэтому формула (3) примет вид $2\pi rH = NI$, откуда

$$H = \frac{NI}{2\pi r}. \qquad (4)$$

Для средней линии тороида $r = (R_1 + R_2)/2 = (d_1 + d_2)/4$. Подставив это выражение r в формулу (4), найдем

$$H = \frac{2NI}{\pi\left(d_1 + d_2\right)} = \frac{2 \cdot 200 \cdot 5}{\pi \cdot \left(0,3 + 0,2\right)} = 1273 \text{ А/м}.$$

Магнитная индукция B_0 в вакууме связана с напряженностью поля соотношением $B_0 = \mu_0 H$. Следовательно,

$$B_0 = \frac{2\mu_0 NI}{\pi(d_1 + d_2)} = \mu_0 H = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1273 = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}.$$

Ответ: $H = 1,27$ кА/м; $B_0 = 1,6$ мТл.

Задача 3. Замкнутый тороид имеет $N = 400$ витков из тонкого провода, намотанных в один слой. Средний диаметр тороида $d = 25$ см. Определить напряженность и индукцию магнитного поля внутри тороида, при значениях силы тока в обмотке тороида $I_1 = 0,5$ А и $I_2 = 5$ А.

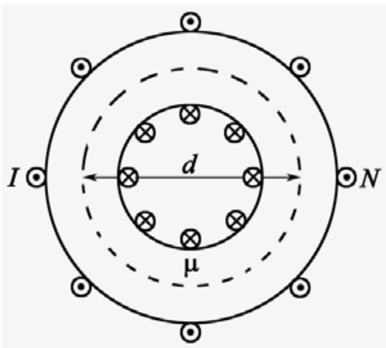


Рис. 13.2

Решение: Применяя теорему о циркуляции вектора **H** вдоль окружности с диаметром d (средняя линия тороида, рис. 13,2)

$$H \cdot \pi d = IN,$$

находим напряженность магнитного поля внутри тороида (см. задачу 2)

$$H = IN/(\pi d).$$

Отсюда после расчета получаем

$$H_1 = 254,6 \text{ А/м}, \; H_2 = 2546 \text{ А/м};$$

$$B_1 = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}, \; B_2 = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}.$$

Ответ: $B_1 = 3,2 \cdot 10^{-4}$ Тл,; $B_2 = 3,2 \cdot 10^{-3}$ Тл.

Задача 4. Дан плоский неограниченный лист с током. Это может быть медный лист равномерной толщины, в котором ток постоянной плотности и направления течет по поверхности металла. Определить величину и направление магнитного поля **B** листа с током, если поверхностная плотность тока равна $j = 100$ А/см.

Решение: Возьмем участок листа и расположим его в плоскости $x0z$ и ток направим по оси x (рис. 13.3.1). Выберем контур L. Рассмотрим линейный интеграл от **B** по прямоугольнику L *12341*. Одна из его длинных сторон *12* расположена перед поверхностью листа, другая *34* – за листом и короткие стороны проходят через лист.

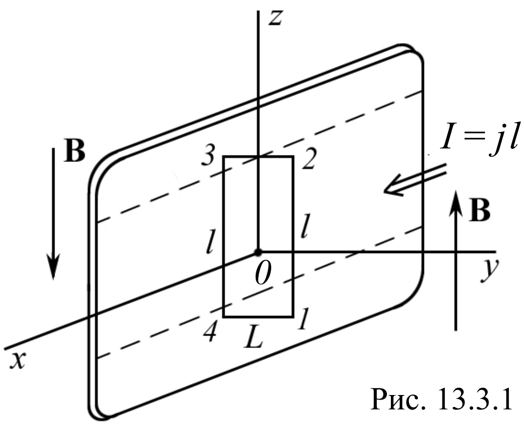


Рис. 13.3.1

Необходимо определить направление вектора **B** по обеим сторонам листа.

В силу бесконечной симметрии листа векторы **B** будут направлены как показано на рисунке (сравните с полем созданным лентой или бесконечно длинным соленоидом (рис. 13.3.2).

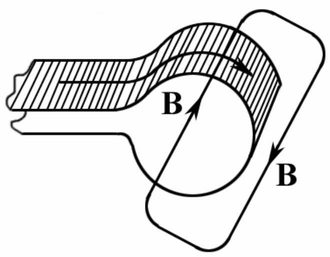


Рис. 13.3.2

$$\oint_L \mathbf{B}\, d\mathbf{l} = Bl + Bl = \mu_0 I, \text{ где } I = jl.$$

Отсюда $B = \dfrac{1}{2}\mu_0 j = \dfrac{1}{2}\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 10^{4} = 6{,}28\cdot 10^{-3}$ Тл $= 6{,}28$ мТл.

Ответ: B = 6,28 мТл.

Задача 5. Внутри прямого провода круглого сечения имеется круглая цилиндрическая полость, ось которой параллельна оси провода. Смещение оси полости относительно оси провода определяется вектором **a**. По проводу течет ток с одинаковой по всему сечению плотностью **j**. Найти напряженность магнитного поля **H** внутри полости.

Решение: Прежде всего, необходимо выполнить рисунок. Для решения выберем следующую модель, которая предполагает использование принципа суперпозиции.

Предположим, что существуют два тока – один течет к нам по всему сечению проводника, второй – от нас, но в полости.

Пусть необходимо найти **H** в точке A внутри полости. Через эту точку проводим два условных контура L_1 и L_2. Контур L_1 охватывает ток $I_1 = jr^2$; Контур L_2 охватывает ток $I_2 = j(a - r)^2$.

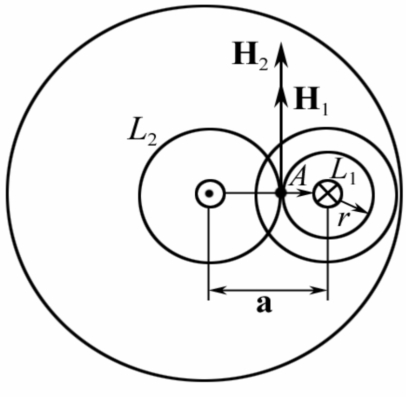


Рис. 13.4.1

Векторы $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ направлены так, как показано на рис. 13.4.1. Следовательно,

$$H = H_1 + H_2.$$

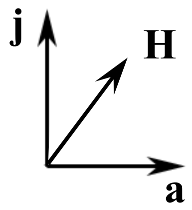


Рис. 13.4.2

По теореме о циркуляции вектора **H**

$$H_1 \cdot 2\pi r = j \cdot \pi r^2$$

$$H_2 \cdot 2\pi (a - r) = j \cdot \pi (a - r)^2$$

$$H = H_1 + H_2 = ja/2.$$

Или в общем случае $\mathbf{H} = [\mathbf{j}\ \mathbf{a}]$ (рис.13.4.2).

В случае если проводник имеет форму тонкостенной трубки, то внутри такого проводника поле **H** будет равно 0.

Ответ: $\mathbf{H} = [\mathbf{j}\ \mathbf{a}]$.

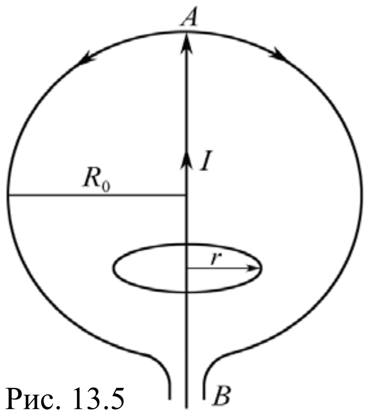


Рис. 13.5

Задача 6. Внутри однородной проводящей сферы от точки A к точке B (рис. 13.5) по диаметру большого круга проходит проводник. Ток силы I идет от B к A, а затем по сфере возвращается к точке B. Определить напряженность магнитного поля внутри и вне сферы, создаваемого токами, текущими по проводнику и по сфере.

Решение: 1. Проведем внутри сферы контур L_b и найдем циркуляцию вектора $\mathbf{H}_b$ вдоль этого контура. Радиус контура $r < R_0$, где R_0 – размер сферы.

$$\int_{(L_b)} \mathbf{H}_b d\mathbf{l} = I; \qquad H_b \cdot 2\pi r = I; \qquad H_b = I/(2\pi r).$$

2. Проведем снаружи сферы контур L_C. Очевидно, что сумма токов, охватываемых данным контуром, равна 0.

$$\int_{(L_C)} \mathbf{H}_C d\mathbf{l} = 0, \text{ поэтому } H_C = 0.$$

Ответ: $H_b = I/(2\pi r)$; $H_C = 0$.

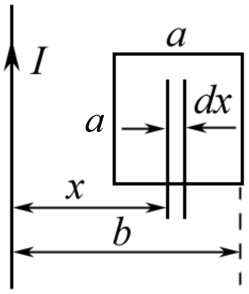


Рис. 13.6

Задача 7. Квадратная проволочная рамка со стороной a и прямой проводник с током I лежат в одной плоскости (рис. 13.6). Вычислить магнитный поток Ф через поверхность рамки, если $I = 6$ А, $a = 20$ см, $b = 40$ см.

Решение: Магнитный поток Ф определяется по формуле $\Phi = \int \mathbf{B}\, d\mathbf{S}$, причем $B = B(x)$.

Выделим полоску шириной dx и длиной a. Поле B можно считать однородным по всей поверхности полоски $d\mathbf{S} = \mathbf{n} \cdot dS$.

Площадь полоски равна $dS = a \cdot dx$.

Магнитное поле проводника с током I равно $B = \dfrac{\mu_0}{2\pi x} I$,

следовательно, $d\Phi = \dfrac{\mu_0}{2\pi x} I \cdot a dx \cdot \cos 0^\circ$, т.к. $\mathbf{n} \uparrow\uparrow \mathbf{B}$.

Интегрирование дает $\Phi = \dfrac{\mu_0 I a}{2\pi} \displaystyle\int_{b-a}^{b} \dfrac{dx}{x} = \dfrac{\mu_0 I a}{2\pi} \cdot \ln\left(\dfrac{b}{b-a}\right)$.

Подставляя числовые значения, получим

$$\Phi = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 6 \cdot 0,2}{2\pi} \ln\left(\frac{0,4}{0,4-0,2}\right) = 1,66 \cdot 10^{-7} \text{ Вб} = 166 \text{ нВб}.$$

Ответ: Φ = 166 нВб.

Задачи для самостоятельного решения

13.1. Чугунное кольцо имеет воздушный зазор длиной l_0 = 5 мм. Длина l средней линии кольца равна 1 м. Сколько витков N содержит обмотка на кольце, если при силе тока I = 4 А индукция B магнитного поля в воздушном зазоре равна 0,5 Тл? Рассеянием магнитного потока в воздушном зазоре можно пренебречь. Явление гистерезиса не учитывать.

Ответ: $N = (Hl + H_0 l_0)/I = 800$.

13.2. По круглому прямому проводу радиуса R течет ток одинаковой по всему сечению плотности $\mathbf{j}$. Найти выражение для напряженности поля $\mathbf{H}$ в точке, положение которой относительно оси провода определяется перпендикулярным к этой оси радиусом вектором $\mathbf{r}$. Рассмотреть случай, когда точка лежит внутри и вне провода.

Ответ: $\mathbf{H} = \dfrac{1}{2}[\mathbf{jr}]$, для $r \le R$; $\mathbf{H} = \dfrac{1}{2}\dfrac{R^2}{r^2}[\mathbf{jr}]$, для $r \ge R$.

13.3. Из одинаковых кусков проволоки спаян куб (рис. 13.7). К противоположным концам A и B его диагонали приложена ЭДС. Какова напряженность $\mathbf{H}$ магнитного поля в центре куба? Поле подводящих проводов не учитывать.

Ответ: $H = \dfrac{1}{\mu_0} \cdot \displaystyle\sum_{i=1}^{12} B_i = 0$.

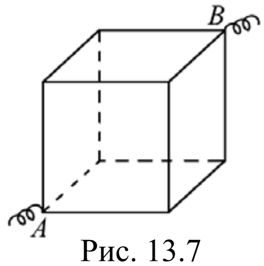


Рис. 13.7

13.4. Какова напряженность $\mathbf{H}$ магнитного поля в центре равностороннего треугольника из однородной проволоки, если источник ЭДС подключен к двум вершинам треугольника? Поле подводящих проводов не учитывать.

Ответ: $H = \dfrac{(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)}{2\pi r}\left(\dfrac{\varepsilon}{R} - 2\cdot\dfrac{\varepsilon}{2R}\right) = 0$.

13.5. К противоположным концам диаметра AB проволочного контура в виде окружности радиуса R (рис. 13.8) присоединен источник ЭДС. Какова напряженность магнитного поля **H** в произвольной точке C диаметра? Поле подводящих проводов не учитывать.

Ответ: $H = (B_1 - B_2)/\mu_0 = 0$.

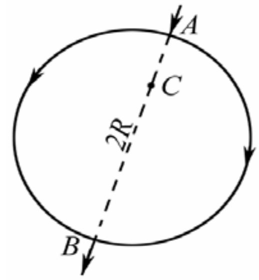


Рис. 13.8

13.6. Вычислить циркуляцию вектора **B** вдоль контура, охватывающего токи $I_1 = 10$ А, $I_2 = 15$ А, текущие в одном направлении, и ток $I_3 = 20$ А, текущий в противоположном направлении.

Ответ: $\oint\limits_L B_l dl = \mu_0 \sum\limits_{i=1}^{3} I_i = 6{,}28$ мкТл · м.

13.7. Деревянный шар радиусом R обмотан тонкой проволокой так, что витки ложатся по большим кругам, пересекаясь в концах одного и того же диаметра AB (рис. 13.9). Число витков шесть, и плоскости каждой пары соседних витков образуют угол 30°. По проволоке течет ток силой I. Найти величину и направление напряженности поля **H** в центре шара.

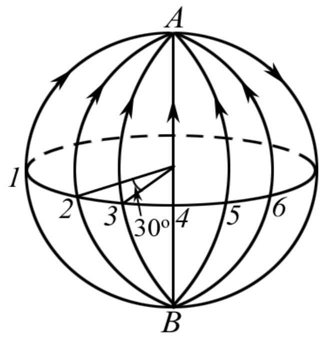


Рис. 13.9

Ответ: $H = \dfrac{I}{R}\left(\sin 15^\circ + \sin 45^\circ + \sin 75^\circ\right)$.

Вектор **H** направлен за плоскость чертежа и образует с плоскостью первого витка угол $\alpha = 15°$ (отсчет углов производится по часовой стрелке, если смотреть сверху).

13.8. Деревянный шар радиусом R обмотан тонкой проволокой так, что все витки параллельны между собой. Витки плотно уложены и покрывают половину поверхности шара в один слой (рис. 13.10). По проволоке идет ток силой I. Найти напряженность магнитного поля **H** в центре шара C. Общее число витков N. Витки можно считать кольцами, находящимися на равном расстоянии друг от друга по дуге большего круга, плоскость которого перпендикулярна к плоскости колец. Учесть, что $\sum \sin^2 \dfrac{\pi n}{2N} = \dfrac{1}{2}(N+1)$.

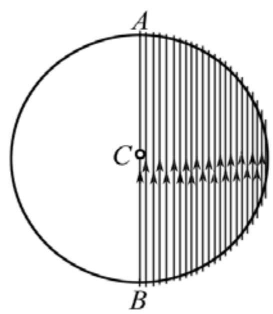


Рис. 13.10

Ответ: $H = I(N+1)/(4R)$.

13.9. По соленоиду длиной l = 1 м без сердечника, имеющему N = 1000 витков (рис. 13.11), течет ток I = 20 А. Определить циркуляцию вектора **B** магнитной индукции вдоль контура, изображенного на рис. 13.11, *а*, *б*.

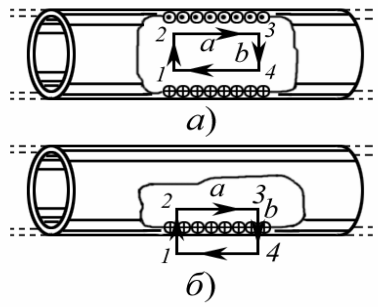


Рис. 13.11

Ответ: *а*) $\oint\limits_L B_l dl = 0$; *б*) $\oint\limits_L B_l dl = 25{,}2$ мТл·м.

13.10. По сечению проводника равномерно распределен ток плотностью j = 2 МА/м^2. Найти циркуляцию вектора **H** напряженности вдоль окружности радиусом R = 5 мм, проходящей внутри проводника и ориентированной так, что ее плоскость составляет угол α = 30° с вектором **j** плотности тока.

Ответ: $\oint\limits_L H_l dl = \pi r^2 j \sin\alpha = 78{,}5$ А.

13.11. Диаметр D тороида без сердечника по средней линии равен 30 см. В сечении тороид имеет круг радиусом r = 5 см. По обмотке тороида, содержащей N = 2000 витков, течет ток I = 5 А (рис. 13.12). Пользуясь законом полного тока, определить максимальное и минимальное значение магнитной индукции **B** в тороиде.

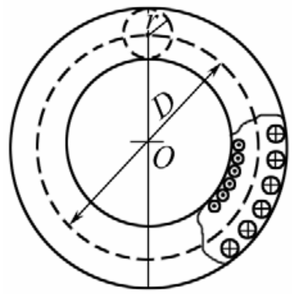


Рис. 13.12

Ответ: $B_{\max} = \dfrac{\mu_0 IN}{\pi(D-2r)} = 20$ мТл; $B_{\min} = \dfrac{\mu_0 IN}{\pi(D+2r)} = 10$ мТл.

13.12. По двум бесконечно длинным прямолинейным проводникам (рис. 13.13), сделанным из немагнитного материала и изолированным друг от друга, текут в противоположных направлениях токи с одной и той же плотностью j = 10^3 А·см$^{-2}$. Проводники имеют вид бесконечно длинных цилиндров. Найти величину индукции магнитного поля в полости *П*. Расстояние $AB = d$ = 5 см. Токи текут (в *A* к нам, в *B* от нас).

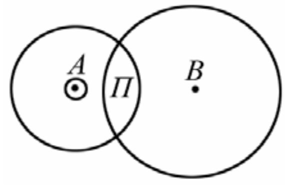


Рис. 13.13

Ответ: $B = \mu_0 jd/2$ = 0,314 Тл.

13.13. Определить индукцию магнитного поля на оси тороида (без сердечника), по обмотке которого, содержащей N = 2000 витков, идет ток I = 20 А. Внешний диаметр тороида D = 1,3 м; внутренний – d = 1,2 м.

Ответ: $B_0 = 2\mu_0 NI / \left[\pi(D+d)\right] = 12{,}8$ мТл.

13.14. Найти магнитный поток Ф, создаваемый соленоидом сечением S = 10 см^2, если он имеет n = 10 витков на каждый сантиметр его длины при силе тока I = 20 А.

Ответ: $\Phi = \mu_0 nSI$ = 25,13 мкВб.

13.15. Плоский контур, площадь S которого равна 25 см^2, находится в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,04 Тл. Определить магнитный поток Ф, пронизывающий контур, если плоскость его составляет угол $\beta = 30°$ с линиями индукции.

Ответ: $\Phi = BS\cos\alpha = 50$ мкВб.

13.16. Непроводящий тонкий диск радиуса R, равномерно заряженный с одной стороны с поверхностной плотностью σ, вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Найти индукцию магнитного поля в центре диска.

Ответ: $B = \mu_0\sigma\omega R/2$.

13.17. Соленоид длиной l = 1 м и сечением S = 16 см^2 содержит N = 2000 витков. Вычислить потокосцепление Ψ при силе тока I = 10 А в обмотке.

Ответ: $\Psi = \mu_0 ISN^2/l =$ 80,4 мкВб·виток.

13.18. Рядом с длинным прямым проводом, по которому течет ток I_1 = 10 А, расположена квадратная рамка. Рамка и провод лежат в одной плоскости. Найти магнитный поток Ф через рамку, если сторона рамки a = 80 мм, а ось рамки находится от провода на расстоянии b = 100 мм.

Ответ: $\Phi = \dfrac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\dfrac{b+a/2}{b-a/2} = 0{,}37$ мкВб.

13.19. Плоская квадратная рамка со стороной a = 20 см лежит в одной плоскости с бесконечно длинным прямым проводом, по которому течет ток I = 100 А. Рамка расположена так, что ближайшая к проводу сторона параллельна ему и находится на расстоянии l = 10 см от провода. Определить магнитный поток Ф, пронизывающий рамку.

Ответ: $\Phi = \dfrac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\dfrac{l+a}{a} = 1{,}62$ мкВб.

13.20. Определить, во сколько раз отличаются магнитные потоки, пронизывающие рамку при двух ее положениях относительно прямого проводника с током, представленных на рис. 13.14.

Ответ: $\Phi_1/\Phi_2 = \dfrac{\ln 2}{\ln(6/5)} = 3{,}8$ раза.

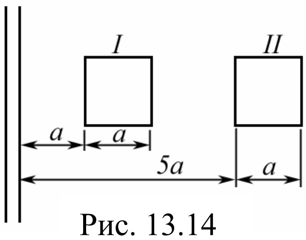


Рис. 13.14

13.21. По длинному прямому соленоиду, имеющему n = 3,3 витка на сантиметр длины, протекает ток I = 0,13 А. Определить магнитный поток Ф через площадь поперечного сечения соленоида, если его диаметр D = 16 см.

Ответ: $\Phi = \mu_0 In\cdot\dfrac{\pi D^2}{4} = 1{,}1$ мкВб.

13.22. По двум большим окружностям шара, вертикальной и горизонтальной, проходят токи одной и той же величины. Под каким углом α будет наклонен вектор **B** магнитной индукции результирующего магнитного поля этих токов к плоскостям окружностей? Чему равна циркуляция вектора **B** по контуру в виде окружности диаметром $d < D$ шара, находящемуся внутри шара и $d > D$ снаружи шара?

Ответ: 1) $\oint\limits_L B_l dl = 0$; 2) $\oint\limits_L B_l dl = \mu_0 \sum\limits_{i=1}^{3} I_i$; $\alpha = 45°$.

13.23. Квадратная рамка со стороной a = 20 см расположена в одной плоскости с прямым бесконечно длинным проводом с током. Расстояние l от провода до середины рамки равно 1 м. Вычислить относительную погрешность δ, которая будет допущена при расчете магнитного потока, пронизывающего рамку, если поле в пределах рамки считать однородным, а магнитную индукцию – равной значению ее в центре рамки.

Ответ: $\delta = \dfrac{\Delta\Phi}{\Phi} = \dfrac{1}{24}\left(\dfrac{a}{l}\right)^2 = 0{,}17\,\%$.

13.24. Квадратная проволочная рамка со стороной b и прямой проводник с током I лежат в одной плоскости (рис. 13.15). Вычислить магнитный поток Φ через поверхность рамки, если I = 10 А, b = 30 см, a = 50 см.

Ответ: $\Phi = \dfrac{\mu_0 I b}{2\pi} \cdot \ln\left(\dfrac{a}{a-b}\right) = 0{,}55$ мкВб.

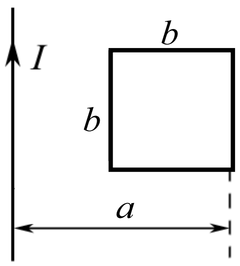


Рис. 13.15

13.25. Тороид квадратного сечения содержит N = 1000 витков. Наружный диаметр D тороида равен 40 см, внутренний d = 20 см. Найти магнитный поток Φ в тороиде, если сила тока I, протекающего по обмотке, рана 10 А.

Ответ: $\Phi = \dfrac{\mu_0 I N}{4\pi}(D-d)\ln\dfrac{D}{d} = 139$ мкВб.

14. ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ (векторный и скалярный потенциал магнитного поля)

Основные формулы и обозначения

Сторонние источники ρ и **j** создают электромагнитные поля, удовлетворяющие уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0;$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \qquad \operatorname{div}\mathbf{D} = \rho,$$

где $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$; $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$ для однородной и линейной среды; ρ и **j** – распределение зарядов и токов в пространстве.

Эти уравнения удобно решать при помощи вспомогательных функций, называемых электродинамическими потенциалами.

Магнитное поле является вихревым, что равносильно соотношению

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}.$$

Введенную таким образом функцию **A** называют векторным потенциалом. Связь между скалярным потенциалом поля φ и векторным потенциалом **A**

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\varphi .$$

Задачи с решениями

Задача 1. Найти связь между скалярным потенциалом поля φ и векторным потенциалом **A**.

Решение: Подставим выражение $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$ в уравнение Максвелла:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{A} = -\operatorname{rot}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}; \text{ или } \operatorname{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

Это соотношение является условием потенциальности поля суммарного вектора $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ и эквивалентно уравнению

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\varphi.$$

Задача 2. Для однородной и линейной среды найти уравнения для векторного потенциала.

Решение: Условие вихревого векторного поля **B** равносильно соотношению $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$.

Из уравнения Максвелла получаем

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\operatorname{rot}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}; \qquad \mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\varphi,$$

где функция φ является скалярным потенциалом.

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}; \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0\mu}\operatorname{rot}\mathbf{A}.$$

Подставляя **E** и **H** в уравнение Максвелла, учитывая однородность и линейность среды ($\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$; $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$), получим

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}; \qquad \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2};$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}; \qquad \mu\mu_0\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mu\mu_0\mathbf{j} + \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu\mu_0}\operatorname{rot}\mathbf{A}; \qquad \mu\mu_0\operatorname{rot}\mathbf{H} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A};$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mu\mu_0\mathbf{j} - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}.$$

Используя тождество $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}$, получим

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A} = \mu\mu_0\mathbf{j} - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}, \text{ или}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\mathbf{A} + \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mu_0\mathbf{j}.$$

Задача 3. Выразить энергию стационарного магнитного поля через векторный потенциал.

Решение: Энергия стационарного магнитного поля распределена в пространстве с объемной плотностью $w = HB/2$ и в некотором объеме V определяется интегралом

$$W_{\text{м}} = \int_V w\,dV = \frac{1}{2}\int_V HB\,dV.$$

В конечной области V_0 однородной безграничной среды полная энергия стационарного магнитного поля может быть выражена соотношением, которым удобно пользоваться для вычислений.

Подставив в формулу для энергии $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$ и воспользовавшись формулой $\operatorname{div}[\mathbf{A}\,\mathbf{B}] = \mathbf{B}\operatorname{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A}\operatorname{rot}\mathbf{B}$, или $\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{div}[\mathbf{A}\,\mathbf{H}] + \mathbf{A}\operatorname{rot}\mathbf{H}$, найдем

$$W_{\text{м}} = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{A}\,dV = \frac{1}{2}\int_V \operatorname{div}[\mathbf{A}\,\mathbf{H}]\,dV + \frac{1}{2}\int_V \mathbf{A}\operatorname{rot}\mathbf{H}\,dV. \qquad (1)$$

Преобразуем первое слагаемое при помощи теоремы Остроградского – Гаусса

$$\oint_S \mathbf{A}\,dS = \int_V \operatorname{div}\mathbf{A}\,dV; \qquad \frac{1}{2}\int_V \operatorname{div}[\mathbf{A}\,\mathbf{H}]dV = \frac{1}{2}\oint_{S_\infty}[\mathbf{A}\,\mathbf{H}]\,d\mathbf{S},$$

где поверхность S_∞ можно представить как поверхность бесконечно удаленной сферы, ограничивающей полное поле. Так как на поверхности S_∞ величина $\mathbf{A}$ убывает не медленнее, чем $1/R$, величина $\mathbf{H}$ убывает не медленнее, чем $1/R^2$, а площадь поверхности возрастает пропорционально R^2, то поверхностный интеграл при $R \to \infty$ обращается в нуль.

Заменив rot $\mathbf{H}$ во втором слагаемом в (1) через $\mathbf{j}$, и воспользовавшись уравнением Максвелла $\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial\mathbf{D}/\partial t$, для стационарного состояния получим

$$W_{\text{м}} = \frac{1}{2}\int \mathbf{A}\mathbf{j}\,dV.$$

Задача 4. Вывести закон Био – Савара – Лапласа из уравнений Максвелла с помощью векторного потенциала.

Решение: Рассмотрим усредненное по времени магнитное поле, создаваемое движущимися зарядами. Это поле является только функцией координат, т.е. постоянно. Усредним по времени уравнение Максвелла. Среднее значение производной $\partial\mathbf{E}/\partial t$, меняющейся в конечном интервале, равно нулю. Тогда постоянное поле $\mathbf{H}$ определяют два уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}; \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0.$$

Введем средний векторный потенциал $\mathbf{A}$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathbf{H}.$$

Подставив в уравнение Максвелла, получим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathbf{j}.$$

Используя тождество $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A}$, получим

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} = \mathbf{j},$$

где $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Так как векторный потенциал поля определяется неоднозначно, то на него можно наложить любое дополнительное условие.

Выберем потенциал **A** так, чтобы div **A** = 0. Тогда уравнение, определяющее векторный потенциал постоянного магнитного поля, имеет вид

$$\Delta \mathbf{A} = -\mathbf{j}.$$

Это уравнение аналогично уравнению Пуассона для скалярного потенциала электростатического поля. Решение этого уравнения имеет вид

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}}{R}dV,$$

где R – расстояние от точки наблюдения до элемента объема dV.

Найдем напряженность поля

$$\mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathrm{rot}\left(\frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}}{R}dV\right).$$

Применим формулу rot $a\mathbf{b} = a$ rot $\mathbf{b}$ + $[(\mathrm{grad}\,a)\,\mathbf{b}]$, где a и $\mathbf{b}$ – любые скаляр и вектор. Операция rot производится по координатам точки наблюдения. Поэтому rot можно перенести под знак интеграла и при дифференцировании считать **j** постоянным (rot **j** = 0). Тогда

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{rot}\frac{\mathbf{j}}{R}dV = \frac{1}{4\pi}\int\left[\left(\mathrm{grad}\frac{1}{R}\right)\mathbf{j}\right]dV = \frac{1}{4\pi}\int\frac{[\mathbf{jR}]}{R^3}dV,$$

где радиус-вектор **R** направлен из объема dV в точку наблюдения. Это закон Био – Савара – Лапласа.

Задача 5. Найти напряженность магнитного поля **H** и магнитную индукцию **B**, создаваемые постоянным током I, текущим по бесконечно длинному проводнику радиуса R. Магнитная проницаемость окружающей среды μ, проводника μ_1.

Решение: Используем для решения векторный потенциал **A**. Выберем декартову систему координат таким образом, что ось z совпадает с осью цилиндра. Тогда проекции вектора **A** на оси координат будут удовлетворять уравнениям:

$$\Delta A_x = 0;\ \Delta A_y = 0;\ \Delta A_z = -\mu\mu_0 j_z,$$

где плотность тока $j_z = 0$ при $r > R$; $j_z = I/(\pi R^2)$ при $r \le R$.

Так как в уравнение для A_x и A_y ток j не входит, то эти проекции равны нулю; A_z зависит только от расстояния r до оси z.

Используя условия непрерывности A_z и H на границе $r = R$ и ограниченности H при $r = 0$, проинтегрируем уравнение для A_z.

Тогда при $r \le R$:

$$A_z = c - \frac{\mu_1\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{r}{R}\right)^2; \;\; H = \frac{Ir}{2\pi R^2}; \;\; B = \mu_1\mu_0 \frac{Ir}{2\pi R^2};$$

при $r > R$:

$$A_z = c - \frac{I}{4\pi}\left(\mu_1\mu_0 + 2\mu\mu_0 \ln\frac{r}{R}\right); \;\; H = \frac{I}{2\pi r}; \;\; B = \mu\mu_0 \frac{I}{2\pi r},$$

где c – произвольная константа.

Задача 6. Определить потенциалы φ и **A** электромагнитного поля, создаваемого сторонними источниками ρ и **j** в однородной безграничной среде.

Решение: 1) Найдем решение скалярного неоднородного волнового уравнения

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}, \text{ где } \upsilon = 1\Big/\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0},$$

сторонний заряд плотностью ρ находится в области dV в точке начала координат O, в остальном пространстве $\rho = 0$ и потенциал φ определяется однородным волновым уравнением

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Потенциал заряда ρdV обладает сферической симметрией относительно точки O и не будет зависеть от полярного θ и азимутального ψ углов. Поэтому в сферических координатах

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial R} = \frac{1}{R}\frac{\partial^2(R\varphi)}{\partial R^2}.$$

Тогда
$$\frac{\partial^2(R\varphi)}{\partial R^2} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2(R\varphi)}{\partial t^2} = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi(R,\, t) = \frac{f_1(t - R/\upsilon)}{R} + \frac{f_2(t + R/\upsilon)}{R},$$

где f_1 и f_2 – произвольные функции аргументов $(t - R/\upsilon)$ и $(t + R/\upsilon)$. Второе слагаемое в решении не учитывается по физическим соображениям.

Тогда
$$\varphi(R,\, t) = \frac{f_1(t - R/\upsilon)}{R}.$$

Для нахождения функции f воспользуемся следующим приемом: $\upsilon \to \infty$ и волновое уравнение имеет вид уравнения Пуассона для скалярного потенциала

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}, \text{ где } \varphi(R,t) = \frac{f(t)}{R}.$$

Проинтегрируем это уравнение по объему сферы радиуса a с центром в начале координат O:

$$\int_V \nabla^2\varphi dV = -\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\int_V \rho dV.$$

Учитывая, что оператор Лапласа для скалярного поля определяется следующим образом: $\nabla^2\varphi = \operatorname{grad}\operatorname{div}\varphi$, преобразуем левую часть равенства, воспользовавшись теоремой Остроградского – Гаусса

$$\int_V \nabla^2\varphi dV = \int_V \operatorname{div}\left(\operatorname{grad}\varphi\right)dV = \oint_S \left(\operatorname{grad}\varphi\right)dS = \oint_S \frac{\partial\varphi}{\partial R}\, dS.$$

Значение производной $\partial\varphi/\partial R$ на поверхности сферы равно

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right|_{R=a} = -\frac{f(t)}{a^2}.$$

Так как $dS = a^2 d\Omega$, где $d\Omega$ – элемент телесного угла, то

$$\int_V \nabla^2\varphi dV = -f(t)\int_{4\pi} d\Omega = -4\pi f(t).$$

Правая часть уравнения равна $-\rho dV/(\varepsilon\varepsilon_0)$, следовательно,

$$f(t) = \frac{\rho(t)dV}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0},$$

и тогда потенциал имеет вид

$$\varphi\ (R,\ t) = \frac{\rho(t - R/\upsilon)dV}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}.$$

2) Векторное волновое уравнение

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mu_0\mathbf{j}$$

распадается на три независимых скалярных волновых уравнения для проекции **A** и **j** на оси декартовой системы координат, например:

$$\nabla^2 A_x - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\mu\mu_0\, j_x.$$

По аналогии со скалярным потенциалом решение этого уравнения имеет вид

$$A_x(R,t) = \mu\mu_0\frac{j(t - R/\upsilon)dV}{4\pi R}$$

и такие же формулы для A_y и A_z.

Так как $\mathbf{A} = \mathbf{x}_0 A_x + \mathbf{y}_0 A_y + \mathbf{z}_0 A_z$, где $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}_0$, $\mathbf{z}_0$ – единичные орты, то векторный потенциал равен

$$\mathbf{A}(R,\ t) = \mu\mu_0 \frac{\mathbf{j}(t - R/v)dV}{4\pi R}.$$

Задача 7. Определить индукцию **B** и напряженность **H** магнитного поля, создаваемого постоянным током I, текущим по бесконечному полому цилиндрическому проводнику (внутренний радиус R_1, наружный R_2). Магнитная проницаемость окружающей среды μ, проводника μ_1.

Решение: Решим задачу методом векторного потенциала. Рассмотрим проекции вектора **A** на оси декартовой системы координат, у которой ось z совпадает с осью цилиндра. Тогда

$$\Delta A_x = 0;\ \Delta A_y = 0;\ \Delta A_z = -\mu\mu_0 j_z,$$

причем плотность тока $j_z = 0$ при $R_2 < r < R_1$; $j_z = I/[\pi(R_2^2 - R_1^2)]$ при $R_1 \le r \le R_2$. Так как в уравнения для A_x и A_y ток I не входит, то эти проекции равны нулю; A_z зависит только от расстояния r до оси z.

Используя условия непрерывности A_z и H на границах R_1 и R_2 и ограниченность H при $r = 0$, проинтегрируем уравнение для A_z. Тогда

при $r < R_1$: $\quad A_z = c_1$; $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A} = 0$;

при $R_1 \le r \le R_2$: $$A_z = \frac{\mu_1\mu_0 I R_1^2}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)}\left(\ln\frac{r}{R_1} - \frac{r^2}{2R_1^2}\right) + c_2;$$

$$B = \frac{\mu_1\mu_0 I}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)}\left(r - \frac{R_1^2}{r}\right);$$

при $r > R_2$: $$A_z = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{R_2}{r} + c_3;\quad B = \frac{\mu\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r},$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные константы.

Остальные проекции **A** и **B**, как показано выше, равны нулю.

Задача 8. Показать, что если магнитное поле имеет осевую симметрию и определяется в цилиндрических координатах векторным потенциалом с компонентами $A_\alpha(r,z)$, $A_r = A_z = 0$, то уравнение линий магнитной индукции имеет вид $rA_\alpha(r,z) = \mathrm{const}$. Рассмотреть поток вектора магнитной индукции внутри цилиндра, образованного вращением одной из линий индукции вокруг оси симметрии.

Решение: В любом сечении цилиндра поток вектора магнитной индукции будет одинаковым. Поэтому уравнение поверхности цилиндра

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}\,d\mathbf{S} = f(r,z) = \mathrm{const},$$

где поверхность интегрирования S является кругом радиуса r в плоскости, перпендикулярной оси симметрии.

Так как A_α не зависит от α, то по теореме Стокса получим

$$\int \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A}\, d\mathbf{l} = 2\pi r A_\alpha(r,z) = \text{const}.$$

Линии пересечения этих поверхностей с плоскостями α = const дают необходимые линии магнитной индукции.

Задача 9. Найти коэффициент самоиндукции L на единицу длины двухпроводной линии, состоящей из параллельных прямых проводов радиусами R_1 и R_2, расстояние между осями проводов h. В проводах равные по величине и противоположно направленные токи I.

Решение: Определим магнитную энергию единицы длины линии по формуле (см. задачу 3)

$$W_\text{м} = \frac{1}{2}\int \mathbf{A}\mathbf{j}\, dV.$$

Векторный потенциал прямого тока равен (для первого провода)

$$A_{1z} = c - \frac{\mu_1\mu_0 I}{4\pi}\frac{r_1^2}{R_1^2} \text{ при } r_1 < R_1;$$

$$A_{1z} = c - \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\mu_1 + 2\mu \ln\frac{r_1}{R_1}\right) \text{ при } r_1 > R_1,$$

где c – произвольная константа.

Векторный потенциал, создаваемый проводом 2, получится при замене I на $-I$, R_1 на R_2, r_1 на r_2.

Найдем магнитную энергию

$$W_\text{м} = \frac{I}{R_1^2}\int_1 \left(A_{1z} + A_{2z}\right) dS_1 - \frac{I}{R_2^2}\int_2 \left(A_{1z} + A_{2z}\right) dS_2.$$

Учитывая связь между коэффициентом самоиндукции (индуктивностью) и магнитной энергией системы ($W_\text{м} = LI^2/2$), получим

$$L = \mu_0\left(\mu_1 + 2\mu \ln\frac{h^2}{R_1 R_2}\right).$$

15. КОНТУР С ТОКОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ. ЭНЕРГИЯ КОНТУРА. РАБОТА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Основные формулы и обозначения

Работа перемещения замкнутого контура с током в магнитном поле

$$A = I\cdot\Delta\Phi,$$

где $\Delta\Phi$ – изменение магнитного потока, пронизывающего поверхность, ограниченную контуром; I – сила электрического тока в контуре.

Магнитный момент контура

$$\mathbf{p}_m = IS\cdot\mathbf{n},$$

где S – площадь контура с током I; $\boldsymbol{n}$ – нормаль к контуру.

Вращающий момент, действующий на контур с током, помещенный в магнитное поле $\mathbf{B}$,

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_m\times\mathbf{B},$$

где $\mathbf{p}_m$ – магнитный момент контура.

Магнитная энергия контура с током

$$W = LI^2/2,$$

где L – индуктивность контура; I – протекающий в контуре ток.

Индукция магнитного поля внутри длинного соленоида, содержащего N витков

$$B = \mu\mu_0 IN/l,$$

где I – протекающий в соленоиде ток; l – длина соленоида; μ – магнитная проницаемость среды.

Индуктивность соленоида (тороида) сечением S

$$L = \mu\mu_0 N^2 S/l.$$

Задачи с решениями

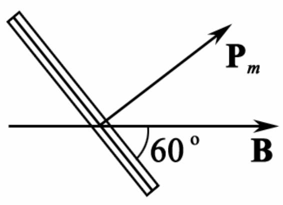


Рис. 15.1

Задача 1. В однородном магнитном поле, индукция которого 0,25 Тл, находится плоская катушка диаметром 50 см, содержащая 75 витков провода. Плоскость катушки составляет угол $\varphi = 60^{\circ}$ с направлением вектора индукции (рис. 15.1). Найти вращающий момент, действующий на катушку в магнитном поле, если по виткам течет ток силой 3 А. Какую работу необходимо совершить, чтобы удалить катушку из магнитного поля?

Дано:
$B = 0{,}25$ Тл
$d = 0{,}5$ м
$N = 75$
$\varphi = \pi/3$ рад
$I = 3$ А

M – ? $A_{вн}$ – ?

Решение: На катушку, содержащую N витков, со стороны магнитного поля действует вращающий момент

$$M = Np_m B\sin\alpha, \qquad (1)$$

где магнитный момент витка $p_m = IS$, площадь витка $S = \pi d^2/4$, угол $\alpha = \pi/2 - \varphi$.

Преобразуя выражение (1), получим

$$M = NI(\pi d^2/4)B\sin(\pi/2 - \varphi) = NI(\pi d^2/4)B\cos\varphi;$$

$$M = 75\cdot 3\cdot(\pi\cdot 0{,}5^2/4)\cdot 0{,}25\cdot\cos 60° = 5{,}5 \text{ Н·м}.$$

Работа магнитного поля при удалении из него катушки равна

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1). \qquad (2)$$

Иначе говоря, чтобы удалить катушку из поля, к ней нужно приложить внешнюю, например механическую, силу, которая при этом совершит работу

$$A_{вн} = -A = I(\Phi_1 - \Phi_2).$$

Здесь $\Phi_1 = NBS\cos\alpha$; $\Phi_2 = 0$. Подставляя эти выражения в формулу (2) и учитывая, что $S = \pi d^2/4$, получаем

$$A_{вн} = NIB(\pi d^2/4)\cos(\pi/2 - \varphi) = NIB(\pi d^2/4)\sin\varphi;$$

$$A_{вн} = 75\cdot 3\cdot 0{,}25\cdot(\pi\cdot 0{,}5^2/4)\cdot\sin 60° = 9{,}56 \text{ Дж}.$$

Ответ: $M = 5{,}5$ Н·м; $A_{вн} = 9{,}56$ Дж.

Задача 2. Имеется два проволочных контура одинаковой длины по 20 см: один – квадратный, а другой – круговой. Оба контура помещены в однородное магнитное поле с индукцией 0,1 Тл. Линии поля составляют угол 45° с плоскостью каждого контура. По контурам течет постоянный электрический ток силой 2 А. Найти вращательные моменты сил, действующих на каждый контур.

Дано:
$B = 0{,}1$ Тл
$l = 0{,}2$ м
$\varphi = 45°$
$I = 2$ А

M_1 – ?
M_2 – ?

Решение: В магнитном поле на замкнутый контур с током действует вращательный момент сил, равный:

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_m\times\mathbf{B} \text{ или } M = ISB\sin\varphi.$$

Площадь квадратного контура $S_1 = (l/4)^2$. Площадь кругового контура $S_2 = \pi R^2$, где $R = l/(2\pi)$. Таким образом $S_2 = l^2/(4\pi)$. Тогда вращательный момент, действующий на квадратный контур, будет равен

$$M_1 = I(l^2/16)B\sin\varphi = 3{,}54\cdot 10^{-4} \text{ Н·м}.$$

На круговой контур действует вращательный момент

$$M_2 = I(l^2/4\pi)B\sin\varphi = 4{,}5\cdot 10^{-4} \text{ Н·м}.$$

Ответ: $M_1 = 3{,}54\cdot 10^{-4}$ Н·м; $M_2 = 4{,}5\cdot 10^{-4}$ Н·м.

Задача 3. Прямолинейный проводник с током равномерно движется в однородном магнитном поле с индукцией 0,3 Тл перпендикулярно линиям поля. Длина проводника 0,3 м. По проводнику течет ток 4 А. Скорость движения проводника 0,3 м/с. Найти работу перемещения проводника за 10 с.

Дано:
$B = 0{,}3$ Тл
$\alpha = 0$
$l = 0{,}3$ м
$I = 4$ А
$v = 0{,}3$ м/с
$t = 10$ с
$A - ?$

Решение: Работа по перемещению проводника с током в однородном магнитном поле находится как

$$A = I\cdot\Delta\Phi,$$

где $\Delta\Phi = BS\cos\alpha$ – магнитный поток, пересекаемый проводником при своем движении; $S = lvt$ – это площадь, «заметаемая» проводником за время t; α – угол между вектором магнитной индукции **B** и нормалью **n** к поверхности S.

Окончательно получаем

$$A = IBlvt\cos\alpha = 4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}3\cdot 0{,}3\cdot 10\cdot 1 = 1{,}08 \text{ Дж}.$$

Ответ: $A = 1{,}08$ Дж.

Задача 4. По катушке размером 5×6 см^2, содержащей 200 витков тонкого провода, протекает переменный электрический ток с амплитудой 2 А. Под действием этого тока катушка вращается в однородном магнитном поле с индукцией 0,5 Тл, совершая 60 об/с. Найти максимальную мощность, потребляемую таким двигателем.

Дано:
$B = 0{,}5$ Тл
$S = 3\cdot 10^{-3}$ м^2
$I = 2$ А
$N = 200$
$n = 60$ об/с
$P - ?$

Решение: При равномерном движении мощность находится из соотношения $P = Fv$, где F – сила; v – скорость. При движении по кругу с радиусом r имеем

$$P = (rF)(v/r) = M\omega,$$

где M – вращательный момент; $\omega = 2\pi\cdot n$ – циклическая частота.

Для катушки с N витками момент сил запишется в виде

$$M = NISB\sin\omega t.$$

Таким образом, мощность может быть найдена из соотношения

$$P = (NISB\sin\omega t)\omega.$$

Максимальное значение мощности равно

$$P = 2\pi\cdot n\cdot N\cdot I\cdot S\cdot B = 2\pi\cdot 60\cdot 200\cdot 2\cdot 3\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}5 = 226 \text{ Вт}.$$

Ответ: $P = 226$ Вт.

Задача 5. В однородное магнитное поле с напряженностью 150 кА/м перпендикулярно линиям поля помещен плоский круговой проволочный контур. По контуру течет ток 2 А. Радиус контура 0,02 м.

Найти работу, которую необходимо совершить для поворота контура на угол 90^o вокруг оси, совпадающей с его диаметром.

Дано:	**Решение:** Работа по перемещению контура с током в однородном магнитном поле равна
$H = 150$ кА/м	$$A = I \cdot \Delta\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1),$$
$I = 2$ А	где $\Phi_2 = BS\cos\varphi_2 = 0$; $\Phi_1 = BS\cos\varphi_1 = BS$.
$R = 0{,}02$ м	Площадь контура $S = \pi R^2$. Окончательно получаем:
$\varphi_1 = 0°$	$$A = IB\pi R^2 = I\mu_0 H\pi R^2 = 0{,}47 \text{ мДж}.$$
$\varphi_2 = 90°$	
A – ?	Ответ: 0,47 мДж.

Задача 6. В однородном магнитном поле с индукцией 0,25 Тл находится плоская катушка, содержащая 75 витков. Плоскость катушки составляет угол 60^o с направлением линий магнитной индукции. Радиус катушки равен 0,25 м. Сила тока 8 А. Найти вращательный момент, действующий на катушку, и работу, необходимую для удаления катушки из магнитного поля.

Дано:	**Решение:** Вращательный момент, действующий в магнитном поле на контур с током, находится из соотношения
$B = 0{,}25$ Тл	$$M_к = p_m B\sin\alpha,$$
$R = 0{,}25$ м	где α – угол между векторами магнитной индукции **B** и магнитного момента $\mathbf{p}_m$.
$N = 75$	
$\varphi = 60^o$	
$I = 8$ А	
M – ? A – ?	Этот угол равен: $\alpha = 90^o - \varphi = 30^o$.

Магнитный момент контура с током выражается формулой

$$p_m = IS = I\pi R^2.$$

Поскольку в катушке N одинаковых витков, то действующий на нее вращательный момент будет в N раз больше. Следовательно,

$$M_к = \pi R^2 NIB\sin\alpha;$$

$$M_к = \pi \cdot 0{,}25^2 \cdot 75 \cdot 8 \cdot 0{,}25 \cdot \sin 30° = 14{,}7 \text{ Н·м}.$$

Работа по перемещению катушки с током под действием сил магнитного поля

$$A_m = NI(\Phi_2 - \Phi_1),$$

где $\Phi_1 = BS\cos\alpha$ – поток, пронизывающий катушку, находящуюся в магнитном поле, $\Phi_2 = 0$ – поток вне поля. Таким образом, работа по удалению катушки, совершаемая против сил магнитного поля, равна

$$A = -A_m = \pi R^2 NIB\cos\alpha;$$

$$A = \pi \cdot 0{,}25^2 \cdot 75 \cdot 8 \cdot 0{,}25 \cdot \cos 30° = 25{,}5 \text{ Дж}.$$

Ответ: $M = 14{,}7$ Н·м; $A = 25{,}5$ Дж.

Задача 7. Внутри соленоида длиной 0,7 м вдали от краев расположена плоская катушка, состоящая из 20 витков площадью 0,3 см^2 каждый. Плоскость витков катушки составляет угол 37° с осью соленоида. В обмотке соленоида течет ток силой 4 А, число витков в соленоиде равно 300. В катушке течет ток силой 0,1 А. Найти: 1) вращающий момент, действующий на катушку в начальном положении; 2) работу, совершаемую силами поля при повороте катушки до положения устойчивого равновесия; 3) работу внешних сил при перемещении катушки после поворота из центра соленоида в середину одного из оснований.

Дано:
$l = 0{,}7$ м
$N_1 = 300$
$N_2 = 20$
$S_2 = 3\cdot10^{-5}$ м^2
$\beta = 37^\circ$
$I_1 = 4$ А
$I_2 = 0{,}1$ А

M – ?
A_1 – ? $A_{вн}$ – ?

Решение: 1) Индукция магнитного поля в центре длинного соленоида находится из соотношения

$$B_1 = \mu_0 I_1 N_1 / l.$$

Вращательный момент, действующий на плоскую катушку, равен

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}_1,$$

где магнитный момент катушки равен $p_m = I_2 \cdot S_2 \cdot N_2$.

В скалярной форме выражение для вращательного момента после подстановки приобретает вид

$$M = \mu_0 I_1 I_2 N_1 N_2 S_2 \sin\alpha / l.$$

Здесь $\sin\alpha = \cos\beta$, угол α равен либо $(\pi/2 - \beta)$, либо $(\pi/2 + \beta)$, поскольку в условии задачи не оговорены направления токов в катушке и соленоиде. Подставляя числовые значения, получим

$$M = 4\pi\cdot10^{-7}\cdot4\cdot0{,}1\cdot300\cdot20\cdot3\cdot10^{-5}\cdot\sin53^\circ/0{,}7 = 1{,}0\cdot10^{-7}\ \text{Н·м}.$$

2) Катушка будет находиться в состоянии устойчивого равновесия, когда направление вектора ее магнитного момента $\mathbf{p}_m$ совпадает с направлением вектора магнитной индукции $\mathbf{B}_1$ поля соленоида. В этом положении вращательный момент, действующий на катушку, равен нулю. Если векторы $\mathbf{p}_m$ и $\mathbf{B}_1$ направлены в противоположные стороны, вращательный момент тоже равен нулю, но это положение соответствует неустойчивому равновесию. На катушку действуют силы, которые в случае отклонения катушки от положения равновесия стремятся повернуть катушку на 180°. При повороте плоской катушки в магнитном поле работа сил поля находится из соотношения $A_1 = I_2(\Phi_2 - \Phi_1)$. В начальном положении поток, пронизывающий витки катушки, равен $\Phi_1 = N_2 S_2 B_1 \cos\alpha$. Причем $\cos\alpha = \pm\sin\beta$ в зависимости от угла α. В положении устойчивого равновесия поток $\Phi_2 = N_2 S_2 B_1$. После подстановки окончательно получаем

$$A_1 = I_2 N_2 S_2 B_1 (1 \pm \sin\beta) = \mu_0 I_1 I_2 N_1 N_2 S_2 (1 \pm \sin\beta)/l.$$

Если $\alpha = (\pi/2 - \beta)$, т.е. $\cos\alpha = +\sin\beta$, то $A_1 = 2{,}1\cdot10^{-7}$ Дж; если $\alpha = (\pi/2 + \beta)$, т.е. $\cos\alpha = -\sin\beta$, то $A_1 = 5{,}1\cdot10^{-8}$ Дж

3) Индукция поля в середине основания длинного соленоида $B_2 = B_1/2 = \mu_0 I_1 N_1/(2l)$. Следовательно, при перемещении катушки из центра соленоида в середину его основания пронизывающий ее поток изменится от $\Phi_1 = B_1 N_2 S_2$ до $\Phi_2 = B_2 N_2 S_2$. Работа внешних сил равна

$$A_{вн} = -A_2 = I_2(\Phi_1 - \Phi_2) = \mu_0 I_1 I_2 N_1 N_2 S_2/(2l).$$

После подстановки численных значений получаем

$$A_{вн} = 6{,}5\cdot10^{-8}\ \text{Дж}.$$

Ответ: $M = 1{,}0\cdot10^{-7}$ Н·м; $A_1 = 2{,}1\cdot10^{-7}$ Дж; $A_{вн} = 6{,}5\cdot10^{-8}$ Дж.

Задача 8. Бесконечно длинный однородный проводящий стержень круглого сечения радиусом R имеет внутри цилиндрическую полость радиусом r. Ось полости параллельна оси стержня, но находится от нее на расстоянии d (рис. 15.2). По проводнику течет постоянный электрический ток с плотностью j. Найти напряженность магнитного поля на оси полости и среднюю плотность энергии магнитного поля в полости, полагая, что среднее значение напряженности составляет половину от напряженности на оси полости.

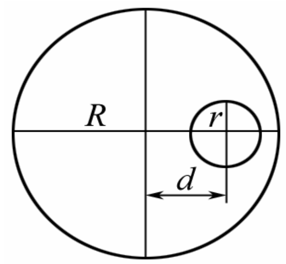


Рис. 15.2

Дано:	
R, r, d, j	**Решение.** Введем два фиктивных тока с плотностью $+j$ и $-j$, протекающих вдоль полости.
H_0 – ? w – ?	При этом, как и следует из условия задачи, результирующий ток через полость будет равен нулю.

Если бы отсутствовал ток с плотностью $-j$, то напряженность поля в центре стержня была равна нулю. Поэтому, используя уравнение Максвелла для стационарного электромагнитного поля $\text{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{j}$, получим в нашем случае, что магнитная напряженность на оси полости равна $\mathbf{H}_0 = [\mathbf{j}\ \mathbf{d}]$, где $\mathbf{d}$ – радиус-вектор, соединяющий центр сечения стержня с центром сечения полости. Или в скалярной форме $H_0 = jd$, поскольку векторы $\mathbf{j}$ и $\mathbf{d}$ взаимно перпендикулярны. Полагая среднее значение напряженности магнитного поля внутри полости равным $H = H_0/2 = jd/2$, находим плотность энергии из соотношения:

$$w = \mu_0 H^2/2 = (jd)^2/8\ .$$

Задача 9. Соленоид длиной 0,5 м, имеющий площадь поперечного сечения $2\cdot10^{-4}$ м^2, содержит 1000 витков плотно намотанного в один слой провода. Сила постоянного тока, протекающего в обмотке соленоида, равна 1 А. Определить энергию магнитного поля внутри соленоида.

Дано:
$l = 0{,}5$ м
$S = 2\cdot10^{-4}$ м^2
$N = 1000$
$I = 1$ А

$W - ?$

Решение: Энергия магнитного поля соленоида с индуктивностью L, по обмотке которого протекает постоянный ток I, может быть найдена из соотношения:

$$W = LI^2/2.$$

Индуктивность соленоида без сердечника находится как $L = \mu_0 N^2 S/l$.

Окончательно для энергии магнитного поля получаем

$$W = \mu_0 (IN)^2 S/(2l).$$

После подстановки численных значений находим:

$$W = 4\pi\cdot10^{-7}\cdot(1\cdot10^3)^2\cdot2\cdot10^{-4}/(2\cdot0{,}5) = 251 \text{ мкДж}.$$

Ответ: $W = 251$ мкДж.

Альтернативное решение. Объемная плотность энергии магнитного поля равна $w = HB/2 = \mu_0 H^2/2$. Индукция магнитного поля внутри длинного соленоида (в вакууме), длиной l и числом витков N равна $B = \mu_0 IN/l$. Отсюда $H = IN/l$. Тогда энергия магнитного поля соленоида объемом $V = Sl$ будет равна $W = wV = \mu_0 H^2 Sl/2 = \mu_0 (IN)^2 S/(2l)$.

Задача 10. Заряженный конденсатор емкостью C в момент времени $t = 0$ замыкается на катушку индуктивности L. Найти запасенную в индуктивности энергию магнитного поля через время t после замыкания цепи, а также электрическую энергию, оставшуюся к этому времени в конденсаторе. Конденсатор первоначально заряжен до напряжения U_0.

Дано:
C, L, U_0, t

$W_c - ?$ $W_L - ?$

Решение: Параллельное соединение электрической емкости и индуктивности представляет собой электрический контур, в котором происходят гармонические колебания.

Поскольку в начальный момент времени конденсатор был заряжен, изменение напряжения и заряда на его обкладках происходит по закону косинуса, т.к. $\cos\omega t = 1$ при $t = 0$. Энергия, запасенная в конденсаторе в момент времени t, может быть найдена из соотношения

$$W_c = CU^2/2 = C(U_0\cos\omega t)^2/2.$$

Поскольку начальное напряжение на конденсаторе в момент замыкания цепи было U_0, начальный заряд на пластинах конденсатора равен $q_0 = CU_0$. Ток, протекающий в цепи в момент времени t, может быть найден из соотношения $I = dq/dt = d(q_0\cos\omega t)/dt = -q_0\omega\sin\omega t$.

Энергия, запасенная в катушке индуктивности, равна

$$W_L = LI^2/2 = L(-q_0\omega\sin\omega t)^2/2 = L(CU_0)^2(\omega\sin\omega t)^2/2.$$

Заменив в выражении для энергии магнитного поля в катушке индуктивности ω^2 на $1/LC$, получим

$$W_L = C(U_0 \sin\omega t)^2/2.$$

Для проверки правильности решения определим суммарную энергию, запасенную в момент времени t в конденсаторе и в катушке индуктивности. Сумма энергий в конденсаторе и в катушке индуктивности равна начальной энергии системы

$$W_c + W_L = C(U_0 \cos\omega t)^2/2 + C(U_0 \sin\omega t)^2/2 = CU_0^2/2 .$$

Задача 11. Найти коэффициент полезного действия двигателя постоянного тока, если известно, что при его включении пусковой ток равен 15 А. В установившемся режиме ток снижается до 9 А.

Дано:
$I_0 = 15$ А
$I = 9$ А

η – ?

Решение: Закон Ома для цепи, состоящей из источника ЭДС и электрического двигателя постоянного тока, можно записать следующим образом:

$$\mathcal{E} = IR + \mathcal{E}_{\text{инд}}.$$

Здесь $\mathcal{E}$ – ЭДС источника; $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ – ЭДС индукции обмотки ротора; I – сила протекающего в цепи тока, R – омическое сопротивление цепи. Поскольку в момент пуска ротор двигателя еще неподвижен, $\mathcal{E}_{\text{инд}} = 0$. Поэтому $\mathcal{E} = I_0R$. Мощность, расходуемая источником, когда двигатель работает в установившемся режиме, равна $P_{\text{и}} = \mathcal{E}I$, а полезная мощность $P_{\text{п}} = \mathcal{E}_{\text{инд}}I$. Следовательно, КПД двигателя можно найти из соотношения

$$\eta = P_{\text{п}}/P_{\text{и}} = \mathcal{E}_{\text{инд}}/\mathcal{E} = (\mathcal{E} - RI)/\mathcal{E} = 1 - RI/\mathcal{E} = 1 - I/I_0 = 0{,}4.$$

Ответ: $\eta = 0{,}4$.

Задача 12. При изменении силы тока от 2,5 до 14,5 А в соленоиде без сердечника, содержащем 800 витков, его магнитный поток увеличился на 2,4 мВб. Найти индуктивность соленоида, среднюю ЭДС самоиндукции, возникающей в соленоиде, если изменение силы тока происходит за 0,15 с. Определить энергию магнитного поля в соленоиде при силе тока 5 А.

Дано:
$I_1 = 2{,}5$ А
$I_2 = 14{,}5$ А
$N = 800$
$\Delta\Phi = 2{,}4\cdot10^{-3}$ Вб
$\Delta t = 0{,}15$ с
$I = 5$ А

L – ? $\mathcal{E}_{\text{ср}}$ – ? W – ?

Решение: Среднюю ЭДС самоиндукции можно определить из формулы

$$\mathcal{E}_{\text{ср}} = -L(\Delta I/\Delta t), \text{ где } \Delta I = I_2 - I_1.$$

Индуктивность соленоида найдем следующим образом: потокосцепление, определяемое как $\Psi = N\Phi$, в соленоиде пропорционально силе тока.

Поэтому

$$N\Phi_1 = LI_1 \text{ и } N\Phi_2 = LI_2 .$$

Откуда следует, что

$$N\Delta\Phi = L\Delta I.$$

Находим индуктивность соленоида:

$$L = N\cdot\Delta\Phi/\Delta I;$$

$$L = 800\cdot 2{,}4\cdot 10^{-3}/(14{,}5 - 2{,}5) = 0{,}16 \text{ Гн}.$$

Теперь вычислим среднюю ЭДС самоиндукции:

$$\mathcal{E}_{\text{ср}} = |-L(\Delta I/\Delta t)| = 0{,}16\cdot(14{,}5 - 2{,}5)/0{,}15 = 12{,}8 \text{ В}.$$

Знак «минус» в формуле указывает, что возникающая ЭДС препятствует нарастанию тока.

Энергию магнитного поля можно определить из соотношения

$$W = LI^2/2 = 0{,}16\cdot 5^2/2 = 2 \text{ Дж}.$$

Ответ: $L = 0{,}16$ Гн; $\mathcal{E}_{\text{ср}} = 12{,}8$ В; $W = 2$ Дж.

Задачи для самостоятельного решения

15.1. Проволочная рамка площадью $S = 15$ см^2 закреплена в однородном магнитном поле параллельно линиям индукции ($B = 0{,}1$ Тл). В рамке поддерживается постоянный ток. Действующий на рамку вращающий момент $M = 0{,}45$ мН·м. Определите силу тока, протекающего в рамке.

Ответ: $I = M/(BS) = 3$ А.

15.2. По прямолинейному проводнику длиной $l = 0{,}08$ м течет постоянный электрический ток силой $I = 2$ А. Проводник находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}01$ Тл и расположен перпендикулярно линиям его индукции. Под действием сил поля проводник переместился на расстояние $a = 0{,}05$ м. Найти работу сил поля.

Ответ: $A = BlaI = 80$ мкДж.

15.3. Плоский проволочный контур диаметром $d = 19{,}5$ см находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}01$ Тл. Плоскость контура перпендикулярна линиям индукции. В контуре поддерживается неизменный электрический ток силой $I = 10$ А. Найти работу внешних сил по перемещению контура с током в область пространства, где отсутствует магнитное поле.

Ответ: $A_{\text{вн}} = \pi d^2 BI/4 = 3$ мДж.

15.4. По проволочному витку диаметром $d = 0{,}1$ м течет постоянный электрический ток. Сила тока $I = 20$ А. Виток свободно установился в магнитном поле с индукцией $B = 0{,}016$ Тл. Какую работу необходимо совершить, чтобы повернуть виток на угол $\beta = 90^\circ$ вокруг оси, совпадающей с диаметром витка?

Ответ: $A = \pi d^2 BI/4 = 2{,}5$ мДж.

15.5. Прямолинейный проводник длиной l = 0,2 м в котором поддерживается постоянный ток силой I = 5 А, находится в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,1 Тл. Проводник расположен перпендикулярно линиям индукции поля. Определите работу сил поля, под действием которых проводник переместился на расстояние d = 2 см.

Ответ: $A = IBld$ = 2 мДж.

15.6. В однородном магнитном поле с индукцией B = 0,4 Тл в плоскости, перпендикулярной линиям индукции поля, вращается стержень длиной l = 0,1 м. Частота вращения ν = 16 об/с. Ось вращения проходит через один из концов стержня. Чему равна разность потенциалов, возникшая на концах стержня?

Ответ: $\Delta\varphi = \pi\nu Bl^2$ = 201 мВ.

15.7. Проволочная рамка площадью S = 0,01 м^2 содержит N = 100 витков тонкого провода. Сопротивление провода r = 12 Ом. К концам обмотки подключено внешнее сопротивление R = 20 Ом. Рамка равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,1 Тл, совершая n = 8 об./с. Найти максимальную мощность возникающего в рамке переменного электрического тока.

Ответ: $P_{\max} = \dfrac{\left(2\pi nBSN\right)^2}{r+R} = 79$ Вт.

15.8. Проволочный виток диаметром d = 0,1 м находится в однородном магнитном поле с напряженностью H = 2 кА/м. Плоскость витка образует угол α = 60° с направлением линий напряженности поля. В витке поддерживается постоянный ток силой I = 4 А. Найдите вращающий момент, действующий на виток.

Ответ: $M = (\mu_0 IH\cdot\pi d^2/4)\cos\alpha$ = 39,5 мкН·м.

15.9. Вычислить энергию магнитного поля соленоида, содержащего N = 1000 витков. В обмотке соленоида протекает электрический ток силой I = 1 А. Магнитный поток через поперечное сечение витка соленоида равен Ф = 0,1 мВб.

Ответ: $W = \Phi NI/2$ = 50 мДж.

15.10. Проволочная катушка, содержащая N = 1000 витков, помещена в магнитное поле, направленное вдоль оси катушки. Площадь поперечного сечения катушки S = 40 см^2. Ее полное сопротивление R = 160 Ом. Обмотка катушки замкнута накоротко. Найти количество теплоты, выделяющейся в катушке за t = 1 с, если индукция магнитного поля изменяется со скоростью $\Delta B/\Delta t = 10^{-3}$ Тл/с.

Ответ: $Q = \dfrac{N^2S^2t}{R}\cdot\left(\dfrac{\Delta B}{\Delta t}\right)^2 = 0{,}1$ мкВт.

15.11. Обмотка тороида содержит $n = 10$ витков на каждый сантиметр длины. Сердечник немагнитный. По обмотке течет электрический ток силой $I = 16$ А. Найти объемную плотность энергии магнитного поля в тороиде.

Ответ: $w = \mu_0 n^2 I^2/2 = 161$ Дж/м^3.

15.12. По рельсам, расположенным в плоскости, перпендикулярной линиям индукции магнитного поля, с постоянной скоростью $v = 10$ м/с скользит прямолинейный проводник длиной $l = 1$ м. Индукция магнитного поля $B = 0{,}01$ Тл. Концы рельсов замкнуты на сопротивление $R = 2$ Ом. Найти количество теплоты, выделяющейся на этом сопротивлении за $t = 1$ с. Сопротивлением рельсов и проводника пренебречь.

Ответ: $Q = (vBl)^2 t/R = 5$ мДж.

15.13. Проволочная рамка площадью $S = 100$ см^2 равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}05$ Тл. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Сопротивление проводов рамки $R = 0{,}01$ Ом. Какое количество электричества протечет через рамку при повороте ее на угол от $\varphi_1 = 60°$ до $\varphi_2 = 90°$. Угол отсчитывается между направлением вектора магнитной индукции и нормалью к плоскости рамки.

Ответ: $q = BS(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)/R = 25$ мКл.

15.14. Ось плоской катушки, содержащей $N = 1000$ витков тонкого провода, расположена вдоль направления линий напряженности магнитного поля. Диаметр катушки $d = 10$ см. По катушке протекает электрический ток силой $I = 0{,}5$ А. Напряженность магнитного поля $H = 16$ А/м. Какую работу необходимо совершить, чтобы повернуть катушку на 90°?

Ответ: $A = \mu_0 NHI \cdot \pi d^2/4 = 78{,}9$ мкДж.

15.15. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл перпендикулярно линиям индукции расположен плоский виток диаметром $d = 0{,}1$ м. По витку течет постоянный ток силой $I = 6$ А. Виток поворачивают на угол $\beta = 90°$ вокруг оси, совпадающей с диаметром витка. Найти совершенную при этом работу.

Ответ: $A = BI \cdot \pi d^2/4 = 4{,}7$ мДж.

15.16. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 2$ Тл под углом $\alpha = 30°$ к линиям поля расположен прямолинейный проводник длиной $l = 0{,}2$ м. В проводнике течет постоянный ток силой $I = 5$ А. Какую работу должно совершить магнитное поле, чтобы переместить проводник параллельно ему на расстояние $a = 3$ м в направлении, перпендикулярном линиям поля?

Ответ: $A = BIal\sin\alpha = 3$ Дж.

15.17. Прямолинейный проводник длиной $l = 2$ м перемещается в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}5$ Тл перпендикулярно линиям поля с постоянной скоростью $v = 10$ м/с. Электрическое сопротивление проводника $R = 5$ Ом. Проводник подключен к источнику с постоянной ЭДС, $\mathcal{E} = 3$ В, и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом. Найти максимальную силу тока в проводнике.

Ответ: $I_{\max} = (vBl + \mathcal{E})/(r + R) = 2{,}17$ А.

15.18. Плоская квадратная катушка со стороной длиной $a = 5{,}5$ см, содержит $N = 100$ витков тонкого провода. Под действием протекающего в катушке переменного электрического тока с амплитудой $I_m = 1$ А она вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл. Катушка вращается с постоянной скоростью, совершая в минуту $n = 3600$ оборотов вокруг оси, проходящей в плоскости катушки через середины двух ее противоположных сторон. Ось вращения перпендикулярна линиям поля. Найти максимальную мгновенную мощность, потребляемую таким двигателем.

Ответ: $P_{\max} = 2\pi nBNSI = 11{,}4$ Вт.

15.19. Плоская катушка диаметром $d = 0{,}2$ м, состоящая из $N = 100$ витков тонкого провода помещена в однородное магнитное поле с индукцией $B = 1$ Тл таким образом, что ее плоскость с направлением поля составляет угол $\alpha = 60°$. В катушке поддерживается постоянный ток силой $I = 1$ А. Найдите действующий на катушку вращающий момент M и работу A, необходимую для удаления катушки из поля.

Ответ: $M = \pi d^2 IB\cos\alpha/4 = 1{,}57$ Н·м; $A = \pi d^2 IB\sin\alpha/4 = 2{,}72$ мДж.

15.20. В однородном магнитном поле с магнитной индукцией $B = 0{,}2$ Тл находится проводящий контур площадью $S = 0{,}04$ м^2. В контуре поддерживается ток силой $I = 10$ А. Плоскость контура составляет с направлением поля угол $\alpha = 30^{\circ}$. Найти работу, которую необходимо совершить для удаления контура за пределы поля.

Ответ: $A = IBS\sin\alpha = 40$ мДж.

15.21. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}5$ Тл по двум вертикальным проводящим стержням, замкнутым сверху сопротивлением $R = 2$ Ом, с постоянной установившейся скоростью скользит вниз без трения и нарушения контакта прямолинейный проводник массой $m =$ $= 10$ г. Расстояние между стержнями $d = 20$ см. Линии поля перпендикулярны плоскости, в которой находятся стержни и проводник. Чему равна скорость v движения проводника и мощность P, выделяющаяся на сопротивлении R? Электрическим сопротивлением стержней и проводника пренебречь.

Ответ: $v = mgR/(Bl)^2 = 20$ м/с; $P = [mgR^2/(Bl)]^2 =1{,}9$ Вт.

15.22. Металлическое кольцо диаметром d = 10 см, по которому протекает постоянный ток силой I = 1А, находится в однородном магнитном поле с напряженностью H = 10 кА/м. Какую работу необходимо совершить для поворота кольца на угол $\alpha = 90^\circ$ вокруг оси, совпадающей с его диаметром?

Ответ: $A = \mu_0 IH\cdot\pi d^2/4$ = 98,7 мкДж.

15.23. Из двух одинаковых проводников длиной l = 0,2 м каждый сделали квадратный и круговой контуры. Найдите вращающие моменты сил M_1 и M_2, действующие на каждый из контуров, помещенных в однородное магнитное поле с индукцией B = 0,1 Тл. В каждом из контуров поддерживается ток I = 2 А. Плоскость каждого контура составляет угол $\alpha = 45^\circ$ с направлением линий индукции магнитного поля.

Ответ: $M_1 = (BIl^2\sin\alpha)/16$ = 0,35 мН·м;
$M_2 = (BIl^2\sin\alpha)/(4\pi)$ = 0,45 мН·м.

15.24. По прямоугольной проволочной рамке со сторонами длиной a = 4 см и b = 5 см протекает электрический ток, сила которого поддерживается постоянной. Рамка находится в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,2 Тл. Линии поля параллельны плоскости рамки. Найти: 1) работу A, которую необходимо совершить для поворота рамки в положение, когда линии поля будут перпендикулярны ее плоскости; 2) силу тока I в рамке. Известно, что момент сил, действующих на рамку в положении, когда угол между нормалью к ее плоскости и направлением вектора индукции магнитного поля составляет $\alpha = 30^\circ$, равен $M = 2\cdot10^{-3}$ Н·м.

Ответ: $A = M/\sin\alpha$ = 4 мДж; $I = M/(abB\sin\alpha)$ = 10 А.

15.25. В проводящем квадратном контуре со стороной l = 0,2 м поддерживается постоянный ток I = 10 А. Контур свободно подвешен в однородном магнитном поле с напряженностью H = 160 кА/м. Какую работу нужно совершить, чтобы повернуть контур на 180° вокруг оси, перпендикулярной направлению магнитного поля?

Ответ: $A = 2\mu_0 HIl^2$ = 0,16 Дж.

16. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

Основные формулы и обозначения

Вектор намагниченности (средний магнитный момент единицы объема)

$$\mathbf{M} = \frac{\sum\limits_{(V_m)} \mathbf{p}_m}{V},$$

где $\mathbf{p}_m$ – вектор магнитного момента атомов, заключенных в объеме V_m; $V = \sum\limits_m V_m$ – величина всего объема.

Связь между векторами **B**, **H**, **M**

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}).$$

Теорема о циркуляции вектора **B** по любому замкнутому контуру Г

$$\oint\limits_{\Gamma} (\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = \mu_0 (I + I_m),$$

где I – полный ток проводимости; I_m – полный ток намагничивания.

Магнитная восприимчивость вещества

$$\chi = \frac{M}{H}, \quad \mathbf{M} = \chi \mathbf{H}.$$

Относительная магнитная проницаемость

$$\mu = 1 + \chi.$$

Связь между **B** и **H** в однородном магнетике

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}.$$

Вектор магнитного момента

$$\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n},$$

где S – площадь контура с током I; **n** – нормаль к контуру.

Магнитный момент единицы объема диамагнитного вещества

$$\mathbf{M} = -\frac{e^2 Z \langle R^2 \rangle N}{6m}\mathbf{B}.$$

где Z – атомный номер; $\langle R^2 \rangle$ – среднее значение квадрата эффективного радиуса электронной оболочки атома; N – число атомов в единице объема; e, m – заряд и масса электрона.

Магнитный момент единицы объема парамагнетика в слабых магнитных полях, т.е. при $p_m B/(kT) << 1$, (закон Кюри)

$$M = \frac{N p_m^2 B}{3kT},$$

где p_m – магнитный момент атома, связанный с незаполненными внутренними электронными оболочками.

Сила, действующая на магнитный момент $\mathbf{p}_m$ в неоднородном магнитном поле $\mathbf{B}$,

$$F_x = p_m \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Задачи с решениями

Задача 1. Оценить силу, действующую на 1 г диамагнитного вещества (водорода), помещенного в неоднородное магнитное поле $\partial B_z / \partial z =$ $= 17$ Тл/м при $B_z = 1{,}8$ Тл.

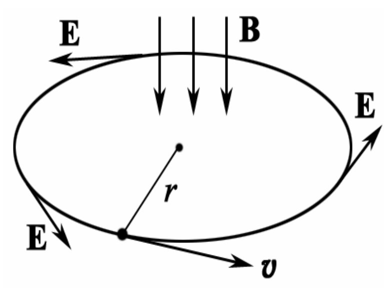


Рис. 16.1

Решение: Пусть частица, масса которой m, заряд q, движется по круговой орбите радиуса r со скоростью v_0. Если некоторым образом создать поле $\mathbf{B}$, изменяющееся со скоростью dB/dt, то вдоль орбиты возникает индуцированное электрическое поле $\mathbf{E}$ (виртуальная картина на рис 16.1). Это поле можно легко вычислить, воспользовавшись законом индукции Фарадея – Максвелла.

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\int_{(S)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}; \qquad 2\pi r E = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}.$$

$$E = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}.$$

Если заряд q положительный, то поле $\mathbf{E}$ ускоряет частицу, а если заряд отрицательный – замедляет

$$m\frac{dv}{dt} = qE = -\frac{qr}{2}\frac{dB}{dt}.$$

Это соотношение позволяет вычислить изменение скорости dv

$$dv = -\frac{qr}{2m} dB.$$

Пусть изменение B происходит от 0 до B_1, тогда

$$\Delta v = -\frac{qr}{2m} B_1.$$

Возрастание скорости движения заряда равносильно увеличению магнитного момента Δp_m (заметим, что $p_m = qrv/2$)

$$\Delta p_m = -\frac{q^2 r^2}{4m} B_1.$$

При любом знаке заряда и любом направлении вращения справедливо векторное соотношение

$$\Delta \mathbf{p}_m = -\frac{q^2 r^2}{4m}\mathbf{B}_1. \qquad (1)$$

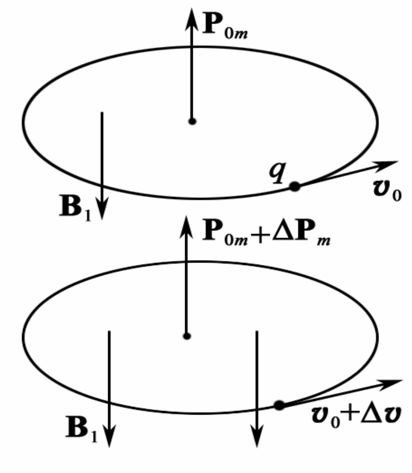


Рис. 16.2

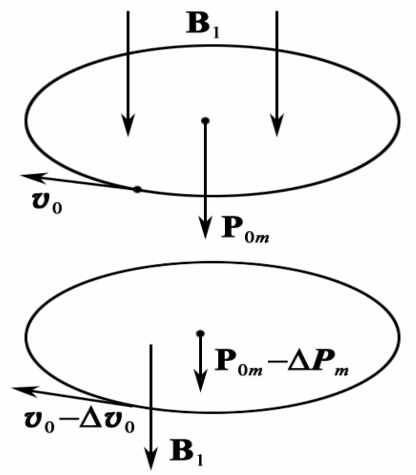


Рис. 16.3

Из рис. 16.2 и 16.3 хорошо видно, что $\Delta\mathbf{p}_m$ направлен против поля $\mathbf{B}$, которое возрастает от 0 до B_1.

Предположим, что при изменении $\mathbf{B}$ $\Delta r \approx 0$, т.е. заряд (электрон в атоме) движется по орбите того же радиуса.

Применим уравнение (1) для всех электронов вещества. В диамагнетиках половина электронов вращается по часовой стрелке, другая – против часовой стрелки, однако у всех из них возникает $\Delta\mathbf{p}_m$ направленный против поля $\mathbf{B}$.

Окончательно суммарный дополнительный магнитный момент равен $\sum \Delta p_m = \Delta p_m \cdot n$, где n – число атомов (молекул) в 1 г вещества; $n = mN_{\text{A}}/\mu_{\text{H}} = 1\cdot 10^{-3}\cdot 6\cdot 10^{23}/1\cdot 10^{-3} = 6\cdot 10^{23}$ атомов в 1 г водорода.

Известно, что $r = 5\cdot 10^{-11}$ м – характерный размер атома водорода. Тогда сила, действующая на атомы, равна

$$F_z = n\Delta p_m \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{ne^2 r^2}{4m_e}\cdot B_z \frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

$$F_z = \frac{6\cdot 10^{23}\cdot \left(1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 5\cdot 10^{-11}\right)^2}{4\cdot 9{,}11\cdot 10^{-31}}\cdot 1{,}8\cdot 17 = 3{,}2\cdot 10^{-4}\ \text{Н} = 0{,}32\ \text{мН}.$$

Этот результат хорошо согласуется с натурным экспериментом.

Известно, что все вещества диамагнитны. Это явление универсально, но весьма малозаметно. В создании диамагнитного момента участвуют все электроны атомов, а также свободные носители заряда в металлах и полупроводниках. Таким образом, диамагнетизм является универсальным свойством, присущим всем веществам. Однако во многих случаях диамагнетизм перекрывается парамагнетизмом и ферромагнетизмом и составляет лишь небольшую часть суммарной намагниченности вещества.

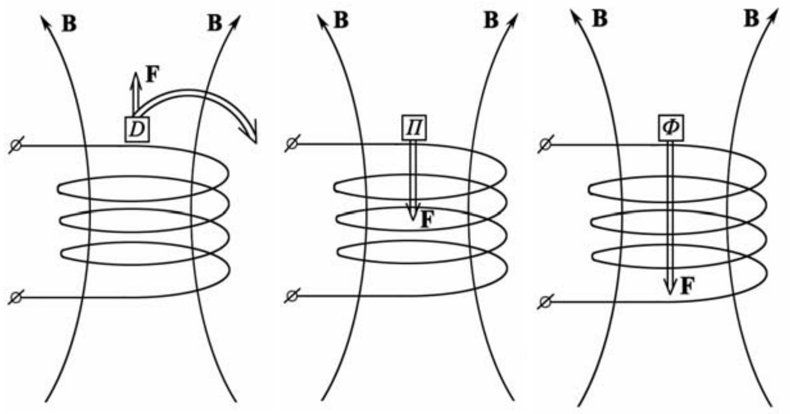


Рис. 16.4

В лабораторной работе при увеличении $\partial B_z/dz$ образец D (диамагнетик) выталкивается из поля, а образцы $П$ (парамагнетик) и $Ф$ (ферромагнетик) втягиваются в поле, т.к. вектор $\Delta\mathbf{p}_m$ у последних образцов направлен по полю $\mathbf{B}$.

Легко видеть, что представленный материал может быть эффективно использован как на лекциях в демонстрационном виде, так и для лабораторных и практических занятий.

Ответ: $F_z = 0{,}32$ мН.

Задача 2. Постоянный магнит имеет вид кольца с узким зазором между полюсами. Средний диаметр кольца равен d. Ширина зазора b, магнитная индукция поля в зазоре $\mathbf{B}$. Пренебрегая рассеянием поля на краях зазора, найти модули векторов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{M}$ внутри вещества.

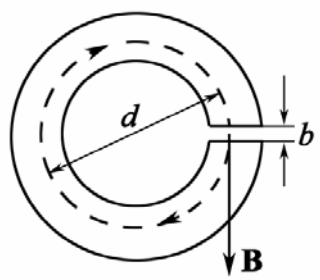


Рис. 16.5.1

Решение: Воспользовавшись теоремой о циркуляции вектора $\mathbf{H}$ по пунктирной окружности диаметром d (рис. 16.5.1) и учитывая, что токов проводимости нет, запишем

$$(\pi d - b)H_\tau + bB/\mu_0 = 0,$$

где H_τ – проекция вектора $\mathbf{H}$ на направление обхода контура (оно взято совпадающим с направлением вектора $\mathbf{B}$ в зазоре).

Отсюда, учитывая, что $b \ll d$, получим

$$H_\tau = -\frac{bB}{\mu_0(\pi d - b)} \approx -\frac{b}{\pi d}\cdot\frac{B}{\mu_0}. \qquad (1)$$

Знак «минус» показывает, что направление вектора $\mathbf{H}$ внутри вещества магнита противоположно вектору $\mathbf{B}$ в той же точке. Заметим, что при $b \to 0$ и $H_\tau \to 0$.

Вектор намагниченности вещества $\mathbf{M} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{H}$. Модуль намагниченности $\mathbf{M}$ найдем, используя результат (1):

$$M=\frac{B}{\mu_0}-H_\tau=\frac{B}{\mu_0}+\frac{b}{\pi d}\cdot\frac{B}{\mu_0}=\frac{B}{\mu_0}\left(1+\frac{b}{\pi d}\right)\cong\frac{B}{\mu_0}.$$

Соотношение между векторами $\mathbf{B}/\mu_0$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{M}$ в любой точке вещества магнита показано на рис. 16.5.2.

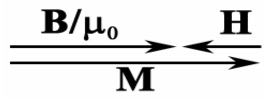


Рис. 16.5.2

Ответ: $M\cong B/\mu_0$; $H_\tau\approx Bb/(\mu_0\pi d)$.

Задача 3. Прямой длинный тонкий проводник с током I лежит в плоскости, отделяющей пространство, которое заполнено непроводящим магнетиком с проницаемостью μ, от вакуума. Найти магнитную индукцию B во всем пространстве как функцию расстояния r до проводника. Иметь в виду, что линии вектора $\mathbf{B}$ являются окружностями с центром на оси проводника.

Решение: Линии вектора $\mathbf{H}$ являются окружностями, причем на границе раздела вакуум – магнетик вектор $\mathbf{H}$ будет испытывать скачок (в отличие от вектора $\mathbf{B}$). Обозначим $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}_0$ – магнитное поле, соответственно, в магнетике и вакууме. Тогда по теореме о циркуляции вектора $\mathbf{H}$ по контуру, имеющему вид окружности радиусом r с центром на оси проводника, имеем

$$\pi rH+\pi rH_0=I. \qquad (1)$$

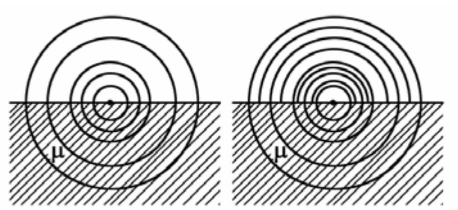
Кроме того, на границе раздела $B=B_0$ или

$$\mu H=H_0. \qquad (2)$$

Решив совместно уравнения (1) и (2), получим

$$H=\frac{I}{(1+\mu)\pi r},\quad B=\mu\mu_0 H=\frac{\mu\mu_0 I}{(1+\mu)\pi r}.$$

Конфигурация полей $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ в данном случае показана на рисунке 16.6. Можно убедиться в том, что при $\mu=1$ получаем известные формулы для B и H в вакууме.



Поле **B** Поле **H**

Рис. 16.6

Ответ: $B=\dfrac{\mu\mu_0 I}{(1+\mu)\pi r}$.

Задача 4. Вблизи точки A (рис. 16.7) границы раздела магнетик – вакуум магнитная индукция в вакууме равна B_0, причем вектор $\mathbf{B}_0$ составляет угол α_0 с нормалью к границе раздела в данной точке. Магнитная проницаемость магнетика равна μ. Найти магнитную индукцию B в магнетике вблизи той же точки A.

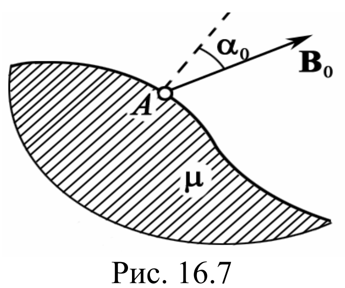


Рис. 16.7

Решение: Искомая величина

$$B=\sqrt{B_n^2+B_\tau^2}\,. \qquad (1)$$

Согласно условию на границе раздела

$$B_n = B_0\cos\alpha_0;$$

$$B_\tau = \mu\mu_0 H_\tau = \mu\mu_0 H_{0\tau} = \mu B_0 \sin\alpha_0,$$

где $H_{0\tau}$ – тангенциальная составляющая вектора $\mathbf{H}_0$ в вакууме. Подставив эти выражения в (1), получим

$$B=B_0\sqrt{\cos^2\alpha_0+\mu^2\sin^2\alpha_0}\,.$$

Ответ: $B=B_0\sqrt{\cos^2\alpha_0+\mu^2\sin^2\alpha_0}\,.$

Задача 5. Длинный тонкий проводник с током I расположен перпендикулярно плоской границе раздела вакуум – магнетик (рис. 16.8.1). Проницаемость магнетика μ. Найти линейную плотность поверхностного тока намагничивания i_m на этой границе раздела в зависимости от расстояния r до проводника.

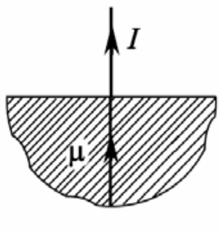


Рис. 16.8.1

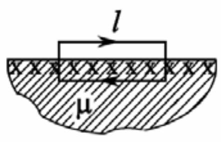


Рис. 16.8.2

Решение: Прежде всего, о конфигурации поверхностного тока намагничивания. Из рис. 16.8.1 видно, что этот ток направлен радиально. Воспользуемся теоремой о циркуляции намагниченности $\oint_\Gamma \mathbf{M}\,d\mathbf{l}=I_m$, взяв в качестве контура небольшой прямоугольник, плоскость которого перпендикулярна току намагничивания в данном месте (показан крестиками).

Расположение контура показано на рис. 16.8.2, где крестиками отмечено направление поверхностного тока намагничивания i_m (А/м). Из равенства $Ml = I_m = i_m l$ получим $i_m = M$.

Далее

$$M = \chi H = (\mu - 1)H,$$

где H находим из циркуляции вектора $\mathbf{H}$ по окружности радиусом r с центром на оси проводника: $2\pi r H = I$ (из соображений симметрии ясно, что линии вектора $\mathbf{H}$ должны иметь вид окружностей, лежащих в плоскостях, перпендикулярных проводнику с током I). В результате находим

$$i_m=\frac{(\mu-1)I}{2\pi r}.$$

Ответ: $i_m = (\mu - 1)I/(2\pi r)$.

Задача 6. На железном сердечнике в виде тора со средним диаметром d имеется обмотка с общим числом витков N. В сердечнике сделана узкая поперечная прорезь шириной b (рис. 16.9). При токе I через обмотку магнитная индукция в прорези равна B_0. Пренебрегая рассеянием поля на краях прорези, найти магнитную проницаемость железа в этих условиях.

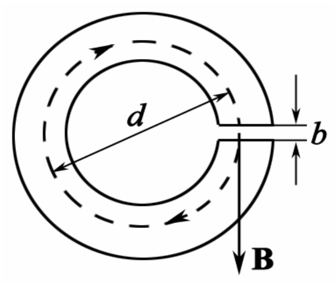


Рис. 16.9

Решение: Согласно теореме о циркуляции вектора **H** по окружности диаметром d имеем

$$(\pi d - b)H + bH_0 = NI, \qquad (1)$$

где H и H_0 – модули вектора **H**, соответственно, в железе и прорези. Кроме того, отсутствие рассеяния поля на краях прорези означает, что

$$B = B_0; \quad \mu\mu_0 H = \mu_0 H_0; \quad \mu H = H_0. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) с учетом того, что $B = \mu\mu_0 H$ и $b \ll d$, получим

$$\mu = \frac{\pi d B_0 - bB_0}{\mu_0 NI - bB_0} \cong \frac{\pi d B_0}{\mu_0 NI - bB_0}.$$

Ответ: $\mu = \pi d B_0 \big/ \left(\mu_0 NI - bB_0\right)$.

Задача 7. Длинный тонкий цилиндрический стержень из парамагнетика с магнитной восприимчивостью χ и площадью поперечного сечения S расположен вдоль оси катушки с током. Один конец стержня находится в центре катушки, где магнитное поле равно B, а другой конец – в области, где магнитное поле практически отсутствует. С какой силой катушка действует на стержень?

Решение: Выделим мысленно элемент стержня длиной dx (рис. 16.10). На него действует сила

$$dF_x = dp_m \frac{\partial B_x}{\partial n}.$$

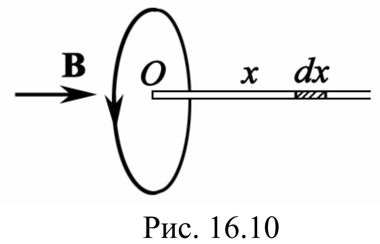


Рис. 16.10

Вектор **B** на оси катушки направлен вправо (на рис. 16.10), в сторону положительных x.

Тогда $B_x = B$, $\partial n = \partial x$, и так как $dp_m = dI_m S = MSdx = \chi HSdx$, то

$$dF_x = \chi HS \cdot dx \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\chi S}{\mu\mu_0} BdB.$$

Проинтегрировав это выражение, получим

$$F_x = \frac{\chi S}{\mu\mu_0} \int_B^0 BdB = -\frac{\chi SB^2}{2\mu\mu_0}.$$

Знак «минус» показывает, что вектор **F** направлен влево, т.е. стержень притягивается к катушке с током.

Задача 8. Постоянный ток I течет вдоль длинного однородного цилиндрического провода круглого сечения радиусом R. Материалом провода является парамагнетик с восприимчивостью χ. Найти: 1) зависимость поля B от расстояния r до оси провода; 2) плотность тока намагничивания j_m внутри провода.

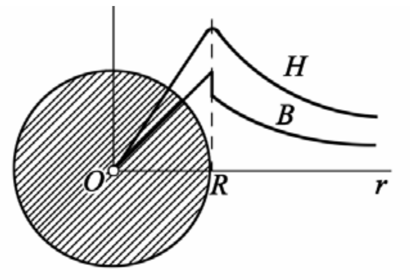


Рис. 16.11

Решение: 1) Из циркуляции вектора **H** по окружности радиусом r с центром на оси провода следует, что

при $r \le R$, $\quad 2\pi r H = I(r/R)^2 \quad (H \sim r)$;

при $r > R$, $\quad 2\pi r H = I \quad (H \sim 1/r)$.

На рис. 16.11 показаны графики зависимости $H(r)$ и $B(r)$.

2) Воспользуемся теоремой о циркуляции намагниченности **M** по окружности радиусом r (рис. 16.11): $2\pi r M = I_m$, где I_m – ток намагничивания, охватываемый этим контуром. Найдем дифференциал этого выражения (при переходе от r к $r + dr$):

$$2\pi d(rM) = dI_m$$

Так как $dI_m = j_m \cdot 2\pi r dr$, то предыдущее уравнение можно преобразовать к виду $j_m = \dfrac{M}{r} + \dfrac{dM}{dr}$.

В пункте 1 показано, что $H = rI/(2\pi R^2)$ при $r \le R$. Следовательно, намагниченность

$$M = \chi H = \chi I r/(2\pi R^2).$$

Тогда получим $j_m = \dfrac{\chi I}{\pi R^2}$.

Этот ток течет в ту же сторону, что и ток проводимости (в отличие от поверхностного тока намагничивания, текущего в противоположную сторону).

Задача 9. Длинный соленоид заполнен неоднородным изотропным парамагнетиком, восприимчивость которого зависит только от расстояния r до оси соленоида, как $\chi = ar^2$, где a – постоянная. На оси соленоида магнитная индукция равна B_0. Найти зависимость от расстояния r: 1) намагниченности $M(r)$; 2) плотности тока намагничивания $j_m(r)$.

Решение: 1) Намагниченность $M = \chi H$. В данном случае H не зависит от r (это непосредственно следует из циркуляции вектора $\mathbf{H}$ по контуру, показанному на рисунке 16.12 слева).

Поэтому $H = H_0$ – на оси соленоида:

$$M = ar^2 H_0 = ar^2 B_0/\mu_0.$$

2) Из теоремы о циркуляции намагниченности $\mathbf{M}$ по бесконечно узкому контуру, показанному на рисунке справа, следует

$$Ml - (M + dM)l = I_m = j_m l dr,$$

где l – высота контура; dr – его ширина (рис. 16.12).

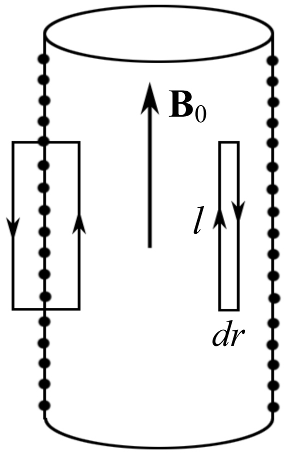


Рис. 16.12

Отсюда $$\mathbf{j}_m = -\frac{d\mathbf{M}}{dr} = -\frac{2aB_0}{\mu_0}\mathbf{r}.$$

Примечание. Знак «минус» показывает, что вектор $\mathbf{j}_m$ направлен против вектора нормали $\mathbf{n}$, образующего с направлением обхода контура правовинтовую систему.

Задача 10. Замкнутый тороид с железным сердечником имеет $N = 400$ витков из тонкого провода, намотанных в один слой. Средний диаметр тороида $d = 0{,}25$ м. Определить напряженность и индукцию магнитного поля внутри тороида, магнитную проницаемость μ железа, а также намагниченность M при значениях силы тока в обмотке тороида $I_1 = 0{,}5$ А и $I_2 = 5$ А.

Решение: Применяя теорему о циркуляции вектора $\mathbf{H}$ вдоль окружности с диаметром d (средняя линия тороида; рис. 16.13)

$$H \cdot \pi d = IN,$$

находим напряженность магнитного поля внутри тороида: $$H = IN/(\pi d).$$

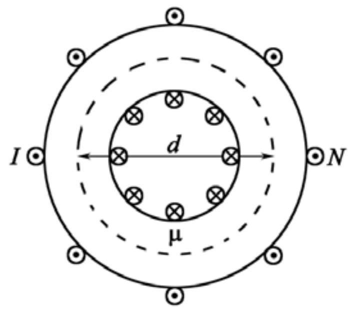


Рис. 16.13

Отсюда после расчета получаем

$$H_1 \cong 255 \text{ А/м}; \;\; H_2 \cong 2550 \text{ А/м}.$$

Далее, используя график $B = f(H)$, см. рис. 16.16.2, определяем магнитные индукции для железа: $B_1 = 0{,}9$ Тл; $B_2 = 1{,}45$ Тл.

Затем находим магнитные проницаемости $\mu = B/(\mu_0 H)$

$$\mu_1 \approx 2{,}8 \cdot 10^3; \quad \mu_2 \approx 4{,}5 \cdot 10^2,$$

а также намагниченности ($M = B/\mu_0 - H$)

$$M_1 \approx 7{,}2 \cdot 10^5 \text{ А/м}; \quad M_2 \approx 1{,}2 \cdot 10^6 \text{ А/м}.$$

Ответ: $H_1 = 255$ А/м, $H_2 = 2550$ А/м; $B_1 = 0{,}9$ Тл, $B_2 = 1{,}45$ Тл; $\mu_1 \approx 2{,}8 \cdot 10^3$, $\mu_2 \approx 4{,}5 \cdot 10^2$; $M_1 \approx 7{,}2 \cdot 10^5$ А/м, $M_2 \approx 1{,}2 \cdot 10^6$ А/м.

Задача 11. Небольшой шарик объемом V из парамагнетика с магнитной восприимчивостью χ переместили вдоль оси катушки с током из точки, где магнитная индукция равна B, в область, где поле отсутствует. Какую при этом совершили работу против магнитных сил?

Решение: Направим ось x вдоль катушки. Тогда элементарная работа против магнитных сил при перемещении шарика на dx будет иметь вид

$$\delta A = -F_x dx = -p_m \frac{\partial B_x}{\partial n} dx, \qquad (1)$$

где F_x – проекция на ось x магнитной силы, а знак «минус» означает, что работа производится против этой силы.

Пусть вектор **B** на оси направлен в сторону положительных x, тогда $B_x = B$ и $\partial n/\partial x$ (в противном случае $B_x = -B$, $-\partial n/\partial x$, т.е. производная $\partial B_x/\partial n$ не зависит от того, куда направлен вектор **B**). Учитывая, что $p_m = MV = \chi HV$, перепишем уравнение (1) в виде

$$\delta A = -\chi HV \frac{\partial B}{\partial x} dx = -\frac{\chi V}{\mu\mu_0} BdB, \text{ где } H = \frac{B}{\mu\mu_0}.$$

Проинтегрировав это выражение от B до 0, получим

$$A = -\frac{\chi V}{\mu\mu_0} \int_B^0 BdB = \frac{\chi B^2 V}{2\mu\mu_0}.$$

Ответ: $A = \chi B^2 V/(2\mu\mu_0)$.

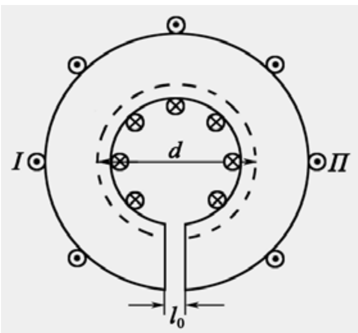


Рис. 16.14

Задача 12. Обмотка тороида, имеющего стальной сердечник с вакуумным зазором длиной l_0 = 3 мм, содержит n = 1000 витков на метр длины. Средний диаметр тороида d = 30 см. При какой силе тока I в обмотке тороида индукция B_0 в зазоре равна 1 Тл (рис. 16.14)? График зависимости $H = f(B)$ для стали известен.

Решение: Применяя теорему о циркуляции вектора **H**, находим

$$H\pi d + H_0 l_0 = nI\pi d, \qquad (1)$$

где H – напряженность магнитного поля в сердечнике; H_0 – напряженность магнитного поля в зазоре. Так как относительная магнитная проницаемость вакуума μ = 1, то напряженность H_0 магнитного поля в зазоре равна

$$H_0 = B_0/\mu_0 = 1/(4\pi\cdot 10^{-7}) \cong 8\cdot 10^5 \text{ А/м}.$$

Вследствие того, что вакуумный зазор узкий, считаем радиальную составляющую вектора магнитной индукции и в зазоре, и в сердечнике равной нулю. Тогда индукция B в сердечнике по модулю равна B_0. По графику для стали (см. рис. 16.16.2) определяем напряженность магнитного поля в сердечнике $H = 7\cdot10^2$ А/м. Таким образом, из (1) находим

$$I = \frac{H}{n} + \frac{B_0 l_0}{\mu_0 \pi d n} = \frac{7\cdot10^2}{1\cdot10^3} + \frac{1\cdot3\cdot10^{-3}}{4\pi\cdot10^{-7}\cdot\pi\cdot0{,}3\cdot1\cdot10^3} \approx 3{,}2 \text{ А}.$$

Ответ: $I \approx 3{,}2$ А.

Задача 13. В установке (рис. 16.15) измеряют с помощью весов силу, с которой небольшой парамагнитный шарик объемом V притягивается к полюсу магнита K. Магнитная индукция на оси полюсного наконечника зависит от высоты x как $B = B_0 e^{-ax^2}$, где B_0 и a – постоянные.

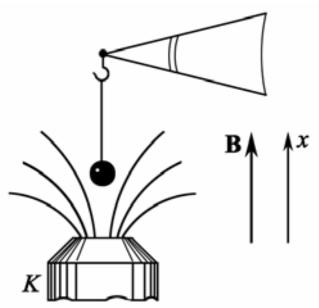


Рис. 16.15

Найти: 1) на какой высоте x_m надо поместить шарик, чтобы сила притяжения была максимальной; 2) магнитную восприимчивость парамагнетика, если максимальная сила притяжения равна F_m.

Решение: Пусть для определенности вектор **B** направлен вверх, туда же направим и ось x. Тогда

$$F_x = p_m (\partial B/\partial x),$$

где учтено, что магнитный момент p_m направлен туда же, куда и вектор **B** (для парамагнетика).

Так как $p_m = MV = \chi HV$ и $\dfrac{\partial B}{\partial x} = -2aB_0 x e^{-ax^2}$, то

$$F_x = -Axe^{-ax^2}, \text{ где } A = \frac{2aB_0^2\chi V}{\mu\mu_0}. \qquad (1)$$

Вычислив производную dF_x/dx и приравняв ее к нулю

$$\frac{dF_x}{dx} = -Ae^{-ax^2} + 2aAx^2e^{-ax^2} = Ae^{-ax^2}\left(2ax^2 - 1\right) = 0,$$

получим следующее уравнение для определения x_m: $1 - 2ax_m^2 = 0$, откуда

$$x_m = 1/\sqrt{2a}. \qquad (2)$$

После подстановки (2) в (1) найдем

$$F_m = \frac{2aB_0^2\chi V}{\mu\mu_0} x_m e^{-ax_m^2} = \frac{2aB_0^2\chi V}{\mu\mu_0\sqrt{2ea}} = \frac{B_0^2\chi V}{\mu\mu_0}\sqrt{\frac{2a}{e}}; \quad \chi = \frac{\mu_0 F_m}{B_0^2 V}\sqrt{\frac{e}{2a}},$$

где учтено, что для парамагнетика $\mu \approx 1$.

Ответ: $x_m = 1/\sqrt{2a}$; $\chi = \dfrac{\mu_0 F_m}{B_0^2 V}\sqrt{\dfrac{e}{2a}}$.

Задача 14. Обмотка тороида, имеющего стальной сердечник с вакуумным зазором длиной $l_0 = 3$ мм, содержит $n = 1000$ витков/м. Средний диаметр тороида $d = 30$ см. Сила тока в обмотке тороида $I = 3{,}2$ А. Определить индукцию магнитного поля $B_з$ в зазоре.

Решение: Применяя теорему о циркуляции вектора **H** имеем

$$H\pi d + H_0 l_0 = nI\pi d; \quad H_0 = B_0/\mu_0 \ \text{ и } \ B = B_0;$$

$$B = \frac{\mu_0 n I \pi d}{l_0} - \frac{\mu_0 \pi d}{l_0} H. \tag{1}$$

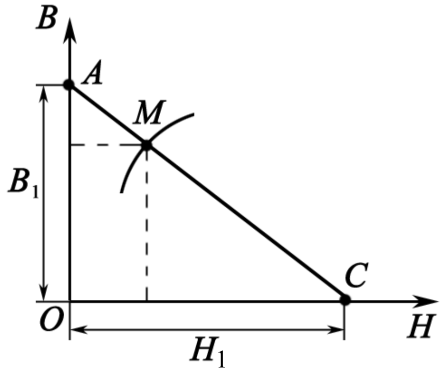


Рис. 16.16.1

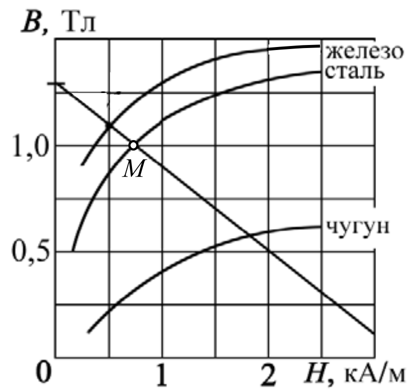


Рис. 16.16.2

Ясно, что задачу нужно решать графически. Значение $I = 3{,}2$ А задано, поэтому представив уравнение (1) в виде $B = 1{,}26 - 3{,}94 \cdot 10^{-4} H$, можно построить график $B = f(x)$ (рис. 16.16.1):

$$B = 0, \qquad H = H_1 = nI = 3200 \text{ А/м};$$

$$H = 0, \qquad B = B_1 = 1{,}26 \text{ Тл}.$$

Для данного сердечника (сталь) значения B и H из (1) должны удовлетворять графику для стали на рис. 16.16.2. Следовательно, искомые значения B и H есть параметры точки $M = \{B, H\}$ пересечения кривой (рис. 16.16.2) и прямой, соответствующей (1) (рис. 16.16.1). На рис. 16.16.1 прямая (1) пересекает оси координат в точках $A = \{0, B_1\}$ и $C = \{H_1, 0\}$, где $B_1 = \mu_0 n I \pi d / l_0 \approx 1{,}26$ Тл и $H_1 = In = 3{,}2 \cdot 10^3$ А/м. Прямая AC, рис. 16.16.1, соответствующая уравнению (1), пересекает в точке M кривую намагничивания стали (рис. 16.16.2). Следовательно, искомые значение $B_з = B_0 = 1{,}0$ Тл, $H \approx 700$ А/м.

Ответ: $B_3 = 1{,}0$ Тл.

Задача 15. Чугунное кольцо имеет воздушный зазор l_0 = 5 мм. Длина средней линии кольца l = 1 м. Сколько витков содержит обмотка на кольце, если при силе тока I = 8 А индукция магнитного поля в воздушном зазоре B = 0,5 Тл? Явление гистерезиса не учитывать. Рассеянием магнитного поля в зазоре пренебречь.

Решение: Запишем закон полного тока: $Hl + H_0 l_0 = NI$.

Для B = 0,5 Тл, H = 1400 А/м (этот результат находим по графику $B = f(H)$ для чугуна, рис. 16.16.2).

$$N = \frac{Hl + H_0 l_0}{I} = \frac{Hl + Bl_0/\mu_0}{I} = \frac{1400 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}/4\pi \cdot 10^{-7}}{8} = 424 \text{ витка.}$$

Ответ: 424 витка.

Задачи для самостоятельного решения

16.1. Определить число ампер-витков тороида с железным сердечником (используйте график $B = f(H)$, рис. 16.16.2), при котором индукция B в узком вакуумном зазоре шириной l_0 = 3,6 мм составляет 1,4 Тл. Длина тороида по средней линии l = 0,8 м.

Ответ: NI = 5850 А·в.

16.2. Вычислить намагниченность M марганца в однородном магнитном поле, напряженность которого H = 100 кА/м. Принять магнитную восприимчивость χ марганца равной $\chi = 1{,}21 \cdot 10^{-4}$.

Ответ: $M = \chi H$ = 12,1 А/м.

16.3. Замкнутый соленоид (тороид) со стальным сердечником имеет n = 10 витков на каждый сантиметр длины. По соленоиду течет ток силой I = 2 А. Вычислить магнитный поток Ф в сердечнике, если его сечение $S = 4 \cdot 10^{-4}$ м^2. При решении используйте график $B = f(H)$, рис. 16.16.2.

Ответ: Ф = 0,52 мВб.

16.4. Тонкое железное кольцо со средним диаметром d = 50 см несет на себе обмотку из N = 800 витков с током I = 3 А. В кольце имеется поперечная прорезь шириной b = 2 мм. Найти с помощью графика $B = f(H)$, рис. 16.16.2, магнитную проницаемость железа в этих условиях.

Ответ: H = 0,26 кА/м; B = 1,25 Тл; μ = 4000.

16.5. Постоянный магнит имеет вид кольца с узким зазором между полюсами. Средний диаметр кольца d = 20 см. Ширина зазора b = 2 мм, индукция магнитного поля в зазоре B_0 = 40 мТл. Найти модуль вектора напряженности магнитного поля внутри магнита. Краевыми эффектами пренебречь.

Ответ: $H = bB_0/(\mu_0 \pi d)$ = 100 А/м.

16.6. Постоянный ток I течет вдоль длинного однородного цилиндрического провода круглого сечения. Провод сделан из парамагнетика с магнитной восприимчивостью χ. Найти поверхностный молекулярный ток I_m.

Ответ: $I_m = \chi I$.

16.7. Длина железного сердечника тороида l_1 = 2,5 м, длина воздушного зазора l_2 = 1 см. Число витков в обмотке N = 1000. При токе I = 20 А индукция магнитного поля в воздушном зазоре B_0 = 1,6 Тл. Найти магнитную проницаемость μ железного сердечника при этих условиях.

Ответ: $\mu \cong l_1 B_0 / (\mu_0 N I - l_2 B_0) = 438$.

16.8. Алюминиевый шарик радиусом R = 1,0 мм находится в неоднородном магнитном поле, изменяющемся в направлении оси x, в той точке, где магнитная индукция B и градиент поля $\partial B/\partial x$ соответственно равны 5,0 Тл и 3,0 Тл/м. Найти силу F_x, действующую на шарик со стороны магнитного поля. Намагничивание шарика считать одинаковым во всех его точках. Магнитная восприимчивость алюминия $\chi = 2{,}3\cdot10^{-5}$.

Ответ: $F_x = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \chi_m \dfrac{B}{\mu_0}\dfrac{dB}{dx} = 1{,}15\cdot10^{-6}$ Н.

16.9. Длинный тонкий цилиндрический стержень из парамагнетика магнитной восприимчивостью χ и площадью поперечного сечения S расположен вдоль оси катушки с током. Один конец стержня находится в центре катушки, где индукция магнитного поля равна B, а другой конец – в области, где магнитное поле практически отсутствует. Определить силу F_x, с которой катушка действует на стержень.

Ответ: $F_x = -\chi S B^2 / (2\mu\mu_0)$. Стержень втягивается в катушку.

16.10. По круговому контуру проходит ток I = 10 А. Радиус контура R = 10 см. Контур погружен в жидкий кислород. Найти намагниченность M в центре контура. Магнитная восприимчивость жидкого кислорода $\chi = 3{,}4\cdot10^{-3}$.

Ответ: $M = \chi I/(2R)$ = 0,17 А/м.

16.11. В соленоид длиной 100 мм, имеющий 300 витков, введен железный сердечник. По виткам течет ток I = 0,5 А. Используя кривую $B = f(H)$, рис. 16.16.2, найти намагниченность M и магнитную проницаемость μ железа внутри соленоида.

Ответ: $M \approx$ 1,1 МА/м; $\mu \approx 740$.

16.12. Во сколько η раз возрастет намагниченность M железа при увеличении напряженности магнитного поля H в нем от 100 до 900 А/м? При решении задачи использовать кривую $B = f(H)$, рис. 16.16.2.

Ответ: η = 1,5.

16.13. Индукция магнитного поля в железном стержне B = 1,3 Тл. Определить значение вектора намагничивания M в нем. При решении задачи использовать кривую $B = f(H)$, рис. 16.16.2.

Ответ: $M = 1{,}3\cdot10^6$ А/м.

16.14. Магнитное поле, направленное вдоль оси x, равномерно изменяется в этом направлении на 8 Тл на каждом метре расстояния. Перпендикулярно к оси x, в направлении оси y, движутся атомы натрия со скоростью v = 800 м/с. Определить траекторию движения атомов натрия. Масса атома натрия $m = 3{,}84\cdot10^{-26}$ кг, его магнитный момент $p_m = 9{,}27\cdot10^{-24}$ А·м^2.

Ответ: $y = 25{,}7\sqrt{x}$.

16.15. В однородное магнитное поле с индукцией $\mathbf{B}_0$ помещен шар из однородного изотропного магнетика с проницаемостью μ. Определить напряженность **H** и индукцию **B** поля в магнетике.

Ответ: $\mathbf{H} = \dfrac{3}{\mu_0(2+\mu)}\mathbf{B}_0$; $\mathbf{B} = \dfrac{3\mu}{2+\mu}\mathbf{B}_0$.

16.16. Железное кольцо квадратного сечения, в котором имеется прорезь шириной b = 2 мм. Средний диаметр кольца d = 300 мм, площадь поперечного сечения S = 500 мм^2. Кольцо несет на себе обмотку из N = 800 витков, по которой течет ток I = 3 А. Найти магнитную проницаемость μ железа. Рассеянием поля на краях пренебречь. При решении задачи использовать кривую $B = f(H)$, рис. 16.16.2.

Ответ: μ = 3000.

16.17. В однородное магнитное поле с индукцией $\mathbf{B}_0$ помещена бесконечная плоскопараллельная пластина из однородного и изотропного магнетика с проницаемостью μ. Пластина расположена перпендикулярно к линиям $\mathbf{B}_0$. Определить магнитную индукцию **B** и напряженность **H** в магнетике.

Ответ: $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$; $\mathbf{H} = \mathbf{B}_0/(\mu\mu_0)$.

16.18. На железном сердечнике в виде тора диаметром d = 500 мм имеется обмотка с числом витков N = 1000. В сердечнике сделана поперечная прорезь шириной b = 1 мм. При силе тока в обмотке I = 0,85 А напряженность H поля в зазоре равна 600 кА/м. Определить магнитную проницаемость μ железа при этих условиях.

Ответ: $\mu = H(\pi d - b)/(NI - bH) = 3800$.

16.19. Палочка из неизвестного вещества, помещенная между полюсами магнита в вакууме, расположилась вдоль магнитного поля. Когда пространство между полюсами магнита заполнили некоторой жидкостью, палочка расположилась поперек поля. Каковы магнитные свойства вещества палочки и жидкости? Ответ обосновать.

Ответ: $\chi_{жид} > \chi$.

16.20. В однородное магнитное поле внесен параллельно полю длинный круглый стержень из алюминия. Найти, сколько процентов η суммарного магнитного поля в стержне приходится на долю его внутреннего магнитного поля. Магнитная восприимчивость алюминия $\chi = 2{,}3\cdot10^{-5}$.

Ответ: $\eta = (\mu - 1)/\mu = 2{,}3\cdot10^{-3}$ %.

16.21. Какая сила $F_{ед.об.}$ будет действовать на каждую единицу объема куска диамагнетика ($\chi = -8\pi\cdot10^{-5}$), помещенного в магнитное поле, где магнитная индукция B = 0,1 Тл, а градиент магнитной индукции равен $\partial B/\partial x$ = 0,5 Тл/м?

Ответ: $F_{ед.об.} = \dfrac{B\chi}{\mu_0(\chi+1)}\dfrac{dB}{dx} = 10$ Н/м^3.

16.22. Вольфрамовый шарик радиусом r = 2 мм находится в неоднородном магнитном поле с градиентом dB/dx = 3 Тл/м. Определить силу, действующую на шарик в той точке, где B = 1 Тл. Магнитная восприимчивость вольфрама $\chi = 5{,}5\cdot10^{-5}$.

Ответ: $F = \dfrac{4}{3}\pi r^3\chi\dfrac{B}{\mu_0}\dfrac{dB}{dx} = 4{,}4$ мкН.

16.23. Два шарика – алюминиевый и висмутовый – находятся в соприкосновении друг с другом в магнитном поле. Их центры лежат на оси x. Магнитное поле изменяется в направлении оси x. Как должны быть расположены шарики и каково отношение их радиусов, если они находятся в равновесии? Магнитная восприимчивость алюминия χ_{Al} = $2{,}3\cdot10^{-5}$, висмута $\chi_{Bi} = -2{,}84\cdot10^{-4}$.

Ответ: $r_{Al}/r_{Bi} = \sqrt[3]{\chi_{Bi}/\chi_{Al}} \cong 2{,}3$.

16.24. Киломольная восприимчивость χ_m оксида хрома (Cr_2O_3) равна $5{,}8\cdot10^{-5}$ м^3/кмоль. Определить магнитный момент p_m молекулы оксида хрома, если температура T = 300 К.

Ответ: $p_m = \sqrt{3kT\chi_m/(\mu_0 N_A)} = 3{,}1\cdot10^{-23}$ А·м^2.

16.25. Если магнитная восприимчивость некоторого парамагнитного вещества определена при 0 °С, то как должна изменяться температура вещества, чтобы его магнитная восприимчивость возросла на 10 % ($\Delta\chi/\chi = 0{,}1$)?

Ответ: $\Delta T/T = -\Delta\chi/\chi = -0{,}1$. Температура понизилась на 27,3 К.

17. ЭФФЕКТ ХОЛЛА

Основные формулы и обозначения

Разность потенциалов Холла

$$\Delta\varphi_{\text{H}} = R_{\text{H}} \frac{IB}{d},$$

где $R_{\text{H}} = \dfrac{1}{e \cdot n}$ – постоянная (коэффициент) Холла; I – ток в проводнике (полупроводнике); B – индукция поперечного магнитного поля; d – толщина пластинки с током I; e, n – заряд и концентрация носителей тока. Знак R_{H} совпадает со знаком носителей заряда.

Подвижность носителей заряда

$$b_{\pm} = \frac{\langle \upsilon \rangle}{E_0},$$

где $\langle \upsilon \rangle$ – дрейфовая (направленная) скорость движения носителей заряда; E_0 – напряженность внешнего продольного электрического поля.

Если известна удельная электропроводность σ, то

$$R_{\text{H}} = b_{\pm}/\sigma.$$

Квантовый эффект Холла (наблюдается при низких температурах)

$$R_{\text{H}} = \frac{2\pi\hbar}{\nu e^2},$$

где $2\pi\hbar/e^2 = 25812{,}8$ Ом; ν – целые или дробные числа.

Задачи с решениями

Задача 1. Медная пластинка высотой b и толщиной d расположена перпендикулярно магнитному полю с индукцией B (рис. 17.1.1). По пластинке течет ток I. Вследствие отклонения электронов к одной из граней внутри пластинки возникает однородное электрическое поле E_{H}, направленное поперек проводника (эффект Холла). Какова величина и направление этого поля E_{H}? Чему равно отношение напряженности электрического поля E_{H} к напряженности поля E_0, обусловливающему ток в проводнике? Концентрация электронов проводимости в меди известна и равна n. Проведите числовой расчет, положив $b = 0{,}02$ м; $d = 10^{-4}$ м; $I = 50$ А; $B = 2$ Тл; $n = 1{,}1 \cdot 10^{29}$ м$^{-3}$; удельная электропроводность меди $\sigma = 5 \cdot 10^7$ См/м.

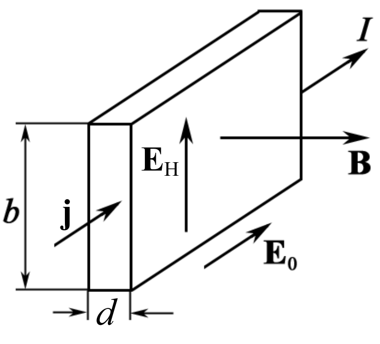


Рис. 17.1.1

Дано:	
$b = 0{,}02$ м	
$d = 10^{-4}$ м	
$I = 50$ А	
$B = 2$ Тл	
$n = 1{,}1\cdot 10^{29}$ м$^{-3}$	
$\sigma = 5\cdot 10^{7}$ См/м	
$E_{\text{Н}}$ – ?	
$E_{\text{Н}}/E_0$ – ?	

Решение: Физическая система, приведенная в задаче, иллюстрирует эффект Холла. Если векторы **B** и **j** направлены так, как показано на рис. 17.1.1, то электроны проводимости в меди под действием силы Лоренца $F_{\text{Л}}$ (рис. 17.1.2) будут смещаться к верхней грани пластинки.

Поэтому на верхней грани происходит накапливание отрицательных зарядов, на нижней – положительных. Так возникает электрическое поле $\mathbf{E}_{\text{Н}}$.

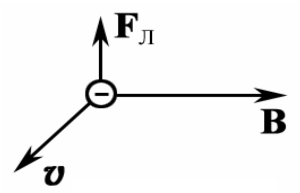


Рис. 17.1.2

Поле Холла $E_{\text{Н}}$, в свою очередь, действует на заряды и уравновешивает силу Лоренца.

При равновесии $eE_{\text{Н}} = e\langle v\rangle B$, отсюда $E_{\text{Н}} = \langle v\rangle B$.

Если дрейфовую скорость $\langle v\rangle$ оценим, используя параметры заданной физической системы, т.е. применив формулу $j = \dfrac{I}{S} = en\langle v\rangle$, то получаем

$$E_{\text{Н}} = \frac{I}{Sen}B = \frac{IB}{bden}.$$

Очевидно, что для нахождения E_0 необходимо обратиться к закону Ома в дифференциальной форме: $j = \sigma E_0 = \dfrac{I}{S}$. Тогда $E_0 = \dfrac{I}{\sigma bd}$.

Подставив числовые значения величин, получим

$$E_{\text{Н}} = \frac{50\cdot 2}{2\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-4}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 1{,}1\cdot 10^{29}} = 2{,}84\cdot 10^{-3}\ \text{В/м};$$

$$\frac{E_{\text{Н}}}{E_0} = \frac{B\sigma}{en} = \frac{2\cdot 5\cdot 10^{7}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 1{,}1\cdot 10^{29}} = 5{,}67\cdot 10^{-3}.$$

Ответ: $E_{\text{Н}} = 2{,}84$ мВ/м; $E_{\text{Н}}/E_0 = 5{,}67\cdot 10^{-3}$.

Задача 2. При измерении эффекта Холла в натриевом проводнике напряженность поперечного поля оказалась $E_{\text{Н}} = 5{,}0$ мкВ/см при плотности тока $j = 200$ А/см^2 и индукции магнитного поля $B = 1{,}0$ Тл. Найти концентрацию электронов проводимости и ее отношение к концентрации атомов в данном проводнике.

Дано:
$E_{\text{Н}} = 5\cdot 10^{-4}$ В/м
$j = 2\cdot 10^{6}$ А/м^2
$B = 1$ Тл
n_- – ? n_-/n_0 – ?

Решение: Величина Холла $E_{\text{Н}}$ известна.

$$E_{\text{Н}} = \langle v\rangle B. \qquad (1)$$

Плотность тока позволяет оценить дрейфовую скорость электронов натрия при воздействии на них внешнего поля. Действительно,

$$j = en_{-}\langle v\rangle. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем $n_{-} = \dfrac{jB}{eE_{\text{H}}} = \dfrac{2\cdot 10^{6}\cdot 1}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 5\cdot 10^{-4}} = 2{,}5\cdot 10^{28}$ м$^{-3}$.

Концентрация атомов в натриевом проводнике равна $n_0 = \rho N_A/\mu_{\text{Na}}$, где ρ = 968,4 кг/м^3 – плотность натрия; $N_A = 6{,}02\cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – число Авогадро; $\mu_{\text{Na}} = 23\cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса натрия. Отсюда

$$n_0 = \frac{\rho N_{\text{A}}}{\mu_{\text{Na}}} = \frac{6{,}02\cdot 10^{23}\cdot 968{,}4}{23\cdot 10^{-3}} = 2{,}53\cdot 10^{28}\ \text{м}^{-3}.$$

Следовательно, $n_{-}/n_0 = 1$.

Ответ: $n_{-} = 2{,}5\cdot 10^{28}$ м$^{-3}$; $n_{-}/n_0 = 1$.

Задача 3. Найти подвижность b_{-} электронов проводимости в медном проводнике, если при измерении эффекта Холла в магнитном поле с индукцией B = 100 мТл напряженность E_{H} поперечного электрического поля у данного проводника оказалась в $\eta = 3{,}1\cdot 10^3$ раз меньше напряженности E_0 продольного электрического поля.

Дано:
B = 0,1 Тл
$\eta = 3{,}1\cdot 10^3$
b_{-} – ?

Решение: Продольное электрическое поле – это внешнее электрическое поле E_0, которое создает ток проводимости

$j = \sigma E_0$, где σ – проводимость.

Известно также, что $j = enb_{-} E_0$. Легко видеть, что проводимость σ данного металла равна $\sigma = enb_{-}$.

Физическая система в данной задаче описана понятиями продольного и поперечного полей, т.е. это внешнее поле и поле Холла E_{H}.

Таким образом, из определения подвижности носителей заряда $b_{-} = \langle v\rangle/E_0$ следует, что $E_0 = \langle v\rangle/b_{-}$, а поле Холла $E_{\text{H}} = \langle v\rangle B$, где $\langle v\rangle$ – дрейфовая скорость движения электронов. Деля почленно, получим $\eta = E_0/E_{\text{H}} = 1/(b_{-}B)$. Следовательно, искомая величина

$$b_{-} = 1/(\eta B) = 1/(3{,}1\cdot 10^3\cdot 0{,}1) = 3{,}22\cdot 10^{-3}\ \text{м}^2/(\text{В}\cdot\text{с}).$$

Ответ: $3{,}22\cdot 10^{-3}$ м^2/(В·с).

Задача 4. Пластинка полупроводника толщиной d = 0,2 мм помещена в магнитное поле, перпендикулярное к пластинке (рис. 17.2). Удельное сопротивление полупроводника ρ = 10 мкОм·м. Индукция магнитного поля B = 1 Тл. Перпендикулярно к направлению поля

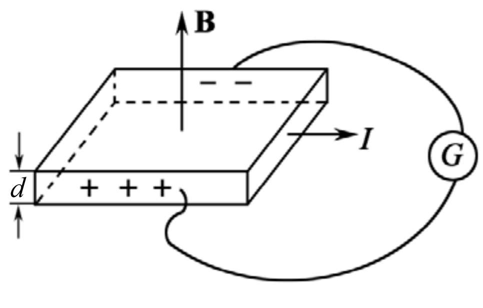


Рис. 17.2

вдоль пластинки пропускается ток I = 0,1 А. При этом возникает поперечная разность потенциалов $\Delta\varphi_\text{H}$ = 3,25 мВ. Найти подвижность b носителей тока в полупроводнике.

Дано:
$d = 2{\cdot}10^{-4}$ м
$\rho = 1{\cdot}10^{-5}$ Ом·м
B = 1 Тл
I = 0,1 А
$\Delta\varphi_\text{H} = 3{,}25{\cdot}10^{-3}$ В
b – ?

Решение: В рассматриваемой физической системе возникает поле Холла, причем известна разность потенциалов

$$\Delta\varphi_\text{H} = \frac{BI}{ned}. \tag{1}$$

Плотность тока в цепи Холла, создаваемого в полупроводнике, равна $j_\text{H} = enbE_\text{H} = \sigma E_\text{H}$.

Поэтому проводимость

$$\sigma = 1/\rho = enb. \tag{2}$$

Комбинируя (1) и (2), находим

$$b = \frac{\Delta\varphi_\text{H} d}{\rho BI} = \frac{3{,}25\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 10^{-4}}{10^{-5}\cdot 1\cdot 0{,}1} = 0{,}65\ \text{м}^2/(\text{В}\cdot\text{с}).$$

Ответ: b = 0,65 м^2/(В·с).

Задача 5. Вдоль медного прямого проводника круглого сечения радиусом R = 5,0 мм течет ток I = 50 А. Найти разность потенциалов $\Delta\varphi_\text{H}$ между осью проводника и его поверхностью. Концентрация электронов проводимости у меди $n = 9{\cdot}10^{22}$ см$^{-3}$.

Дано:
$R = 5{\cdot}10^{-3}$ м
I = 50 А
$n = 9{\cdot}10^{28}$ м$^{-3}$
$\Delta\varphi_\text{H}$ – ?

Решение: Задача не является стандартной. Следует догадаться, что электроны проводимости дрейфуют не только под действием внешнего электрического поля, которое создает внешний источник, но и подвержены действию силы Лоренца.

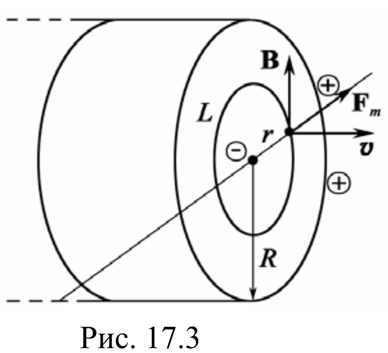


Рис. 17.3

Внутри и снаружи существует магнитное поле. Следовательно, внутри проводника возникает поле Холла (рис. 17.3). На рисунке показано сечение проводника.

Магнитное поле **B** в некоторой точке внутри проводника на расстоянии r от центра находим по теореме циркуляции вектора **B**

$$\oint_{(L)} \mathbf{B}\,d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S j dS; \qquad B\cdot 2\pi r = \frac{\mu_0 I}{\pi R^2}\pi r^2.$$

Тогда магнитное поле

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r = \frac{\mu_0 I}{2S_0} r. \tag{1}$$

где $r \le R$, $S_0 = \pi R^2$.

Поле Холла $$E_H = \langle v \rangle B, \text{ где } \langle v \rangle = \frac{I}{enS_0}. \qquad (2)$$

Элементарное изменение потенциала поля Холла по радиусу r внутри проводника равно $d\varphi_H = E_H\,dr$. Окончательно

$$d\varphi_H = \frac{\mu_0 I^2 r dr}{2enS_0^2}; \quad \Delta\varphi_H = \int_0^R \frac{\mu_0 I^2 r dr}{2S_0^2 en} = \frac{\mu_0 I^2}{2S_0^2 en}\int_0^R r dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^2 en}.$$

Вычисляем: $$\Delta\varphi_H = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 50^2}{4\pi^2\cdot\left(5\cdot 10^{-3}\right)^2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 9\cdot 10^{28}} = 2{,}2\cdot 10^{-10}\text{ В}.$$

Ответ: $\Delta\varphi_H = 2{,}2\cdot 10^{-10}$ В.

Задача 6. Плоский конденсатор, площадь каждой пластины которого S и расстояние между ними d, поместили в поток проводящей жидкости с удельным сопротивлением ρ (рис. 17.4). Жидкость движется со скоростью v параллельно пластинам. Система находится в однородном магнитном поле с индукцией B, причем вектор **B** параллелен пластинам и перпендикулярен к направлению потока. Пластины конденсатора замкнули на внешнее сопротивление R. Какая мощность выделяется на этом сопротивлении? При каком R выделяемая мощность будет максимальной? Чему она равна?

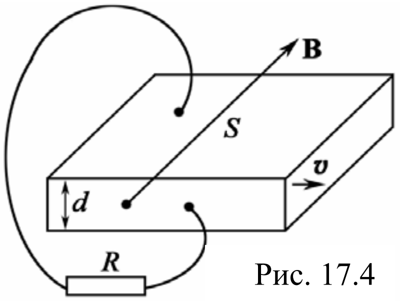


Рис. 17.4

Решение: Физическая система данной задачи является достаточно сложной. По закону Джоуля – Ленца мощность, выделяемая на сопротивлении R, равна
$$P = I^2 R, \qquad (1)$$
где I – ток, создаваемый в цепи Холла.

Ток I найдем из закона Ома
$$I = \Delta\varphi_H/(R + R_ж), \qquad (2)$$
где $R_ж = \rho d/S$ – сопротивление слоя жидкости, заключенной между пластинами.

Поле Холла равно $E_H = vB$. Тогда
$$\Delta\varphi_H = E_H d = vBd. \qquad (3)$$

Из уравнений (1) – (3) определяем мощность P:
$$P = I^2 R = \left[\frac{\Delta\varphi_H}{R + R_ж}\right]^2 R = \left(\frac{vBd}{R + R_ж}\right)^2 R = \left(\frac{vBd}{R + \rho d/S}\right)^2 R.$$

Для определения максимальной мощности найдем производную и приравняем ее нулю $\partial P/\partial R = 0$. Вычисляя, получим, что выделяемая мощность P будет максимальной при $R = \rho d/S$.

Ответ. $P = \left(\dfrac{vBd}{R + \rho d/S}\right)^2 R$; $P_{\max}$ будет при $R = \rho d/S$.

Задача 7. Через сечение $S = bd$ медной пластинки толщиной $d = 0{,}5$ мм и высотой $b = 10$ мм пропускается ток $I = 20$ А. При помещении пластинки в магнитное поле, перпендикулярное к ребру b и направлению тока, возникает поперечная разность потенциалов $\Delta\varphi_{\text{H}} = 3{,}1$ мкВ. Индукция магнитного поля $B = 1$ Тл. Найти концентрацию n электронов проводимости в меди и их дрейфовую скорость $\langle v\rangle$ при этих условиях.

Дано:
$d = 5\cdot10^{-4}$ м
$b = 10^{-2}$ м
$I = 20$ А
$\Delta\varphi_{\text{H}} = 3{,}1\cdot10^{-6}$ В
$B = 1$ Тл

n – ? $\langle v\rangle$ – ?

Решение: Из текста задачи легко видеть, что все необходимые для расчетов величины заданы. Запишем формулу для $\Delta\varphi_{\text{H}}$

$$\Delta\varphi_{\text{H}} = \frac{IB}{ned}. \tag{1}$$

Из (1) находим $n = \dfrac{IB}{\Delta\varphi_{\text{H}} ed}$.

Скорость движения (это дрейфовая скорость) электронов проводимости находим из уравнения

$$j = I/S = I/(bd) = en\langle v\rangle.$$

Отсюда, с учетом (1), получим

$$\langle v\rangle = \frac{I}{bdne} = \frac{\Delta\varphi_{\text{H}}}{bB}.$$

Вычисляем: $n = \dfrac{20\cdot1}{3{,}1\cdot10^{-6}\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\cdot5\cdot10^{-4}} = 8{,}1\cdot10^{28}$ м$^{-3}$;

$$\langle v\rangle = \frac{3{,}1\cdot10^{-6}}{10^{-2}\cdot1} = 3{,}1\cdot10^{-4} \text{ м/с} = 0{,}31 \text{ мм/с}.$$

Ответ: $n = 8{,}1\cdot10^{28}$ м$^{-3}$; $\langle v\rangle = 0{,}31$ мм/с.

Задача 8. Найти, какое числовое значение должна иметь постоянная Холла для натрия, если считать, что число свободных электронов, приходящихся на один его атом, равно единице. Плотность натрия $\rho = 970$ кг/м^3.

Решение: Постоянную Холла находим по формуле $R_{\text{H}} = 1/(ne)$. Задача сводится к вычислению концентрации электронов n.

$$n = N_A/V = \rho N_A/\mu_{\text{Na}},$$

где $N_A = 6{\cdot}10^{23}$ моль$^{-1}$; $\mu_{\text{Na}} = 23{\cdot}10^{-3}$ кг/моль – молярная масса Na.

Тогда

$$R_{\text{H}} = \frac{\mu_{\text{Na}}}{\rho N_{\text{A}} \cdot e} = \frac{23 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{23} \cdot 970 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 2{,}46 \cdot 10^{-10}\ \text{м}^3/(\text{А} \cdot \text{с}).$$

Ответ: $R_{\text{H}} = 2{,}46{\cdot}10^{-10}$ м^3/(А·с).

Задача 9. Через сечение $S = bd$ алюминиевой пластинки (b – высота и d – толщина) пропускается ток I = 5 А. Пластинка помещена в магнитное поле, перпендикулярное к ребру b и направлению тока. Найти возникающую при этом поперечную разность потенциалов $\Delta\varphi_{\text{H}}$. Индукция магнитного поля B = 0,5 Тл. Толщина пластинки d = 0,1 мм. Концентрацию электронов проводимости считать равной концентрации атомов. Плотность алюминия ρ = 2700 кг/м^3.

Дано:
I = 5 А
B = 0,5 Тл
$d = 1{\cdot}10^{-4}$ м
ρ = 2700 кг/м^3

$\Delta\varphi_{\text{H}}$ – ?

Решение: Записывая формулу для вычисления $\Delta\varphi_{\text{H}}$

$$\Delta\varphi_{\text{H}} = \frac{IB}{ned}, \qquad (1)$$

видим, что основная проблема состоит в определении n – концентрации электронов проводимости. Легко видеть, что информация о n изложена в слове «алюминиевый»:

$$n = \frac{N_{\text{A}}}{V} = \frac{\rho N_{\text{A}}}{\mu_{\text{Al}}}, \qquad (2)$$

где $N_{\text{A}} = 6{\cdot}10^{23}$ моль$^{-1}$ – число Авогадро; $V = \mu_{\text{Al}}/\rho$ – объем одного моля алюминия; $\mu_{\text{Al}} = 27{\cdot}10^{-3}$ кг/моль – молярная масса Al.

Подставляя (2) в (1), получим

$$\Delta\varphi_{\text{H}} = \frac{\mu_{\text{Al}} IB}{e\rho N_{\text{A}} d} = \frac{27 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 0{,}5}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 2700 \cdot 6 \cdot 10^{23} \cdot 1 \cdot 10^{-4}} = 2{,}6 \cdot 10^{-6}\ \text{В} = 2{,}6\ \text{мкВ}.$$

Ответ: 2,6 мкВ.

Задача 10. На лабораторной установке Томского политехнического университета определяют концентрацию и подвижность носителей зарядов в арсениде галлия на основании измерений эффекта Холла. Через образец пропускают токи от 0,5 А до 0,9 А. Напряженность магнитного поля H изменяют в пределах 150 ÷ 450 кА/м. Толщина пластинки из арсенида галлия $d = 5{\cdot}10^{-4}$ м.

Определить концентрацию и подвижность носителей зарядов, если в одном из опытов $\Delta\varphi_{\text{H}}$ = 1,34 мВ при токе через образец 0,9 А и напряженности магнитного поля H = 440 кА/м. Проводимость арсенида галлия $\sigma = 2{,}35\cdot10^4$ Ом$^{-1}$·м$^{-1}$.

Дано:	Решение:
$\Delta\varphi_H = 1{,}34\cdot10^{-3}$ В $I = 0{,}9$ А $d = 5\cdot10^{-4}$ м $H = 4{,}4\cdot10^5$ А/м $\sigma = 2{,}35\cdot10^4$ Ом$^{-1}$·м$^{-1}$	$\Delta\varphi_H = R_H \dfrac{I\cdot\mu_0 H}{d}$, где $R_H = 1/(ne)$ – постоянная Холла; $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м; $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл. Следовательно, $n = \dfrac{I\cdot\mu_0 H}{e\Delta\varphi_H d}$. (1)
n – ? b – ?	

По определению подвижность $b = \langle v\rangle/E$, где $\langle v\rangle$ – скорость направленного движения зарядов; E – напряженность электрического поля.

Из дифференциального закона Ома находим, что

$$j = \sigma E = en\langle v\rangle = enbE, \text{ т.е. } \sigma = enb.$$

Следовательно,

$$b = \sigma/(en). \tag{2}$$

Подставляя численные значения в (1) и (2), получаем

$$n = \frac{0{,}9\cdot4\pi\cdot10^{-7}\cdot4{,}4\cdot10^5}{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot1{,}34\cdot10^{-3}\cdot5\cdot10^{-4}} = 4{,}64\cdot10^{24}\ \text{м}^{-3};$$

$$b = \frac{2{,}35\cdot10^4}{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot4{,}64\cdot10^{24}} = 0{,}032\ \text{м}^2/(\text{В}\cdot\text{с}).$$

Ответ: $n = 4{,}64\cdot10^{24}$ м$^{-3}$; $b = 0{,}032$ м^2/(В·с).

18. ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА ИНДУКЦИИ

Основные формулы и обозначения

Закон Фарадея для ЭДС электромагнитной индукции

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Полная ЭДС в контуре, состоящем из N витков:

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\Phi_i.$$

Закон Фарадея – Максвелла

$$\oint_L (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S (\mathbf{B}, d\mathbf{S})$$ – интегральная форма;

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$ – дифференциальная форма.

Задачи с решениями

Задача 1. Показать, что работа полной магнитной силы в контуре равна нулю. Объяснить, за счет каких сил в электрическом контуре все-таки возникает ток.

Решение: Пусть замкнутый металлический проводник движется во внешнем магнитном поле $\mathbf{B}$ со скоростью $\boldsymbol{\upsilon}$ (рис. 18.1). Допустим, что электроны в проводнике движутся с дрейфовой скоростью $\mathbf{u}$. Тогда полная скорость электрона относительно поля равна $\mathbf{u} + \boldsymbol{\upsilon}$.

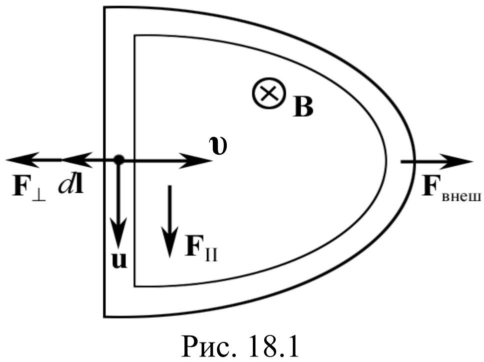


Рис. 18.1

В результате на электрон будет действовать магнитная составляющая силы Лоренца $\mathbf{F}_m = e\,[[\mathbf{u} + \boldsymbol{\upsilon}]\mathbf{B}]$.

Полная магнитная сила, действующая на электрон в проводнике, равна $\mathbf{F}_m = \mathbf{F}_{||} + \mathbf{F}_{\perp}$, где $\mathbf{F}_{||} = e[\boldsymbol{\upsilon},\mathbf{B}]$ – сила, действующая вдоль проводника; $\mathbf{F}_{\perp} = e[\mathbf{u},\mathbf{B}]$ – сила, действующая перпендикулярно элементу $d\mathbf{l}$ проводника и не участвующая в создании тока в контуре.

Работа магнитной силы над электроном за время dt равна

$$dA = (\mathbf{F}_{||}, \mathbf{u})dt + (\mathbf{F}_{\perp}, \boldsymbol{\upsilon})dt = F_{||}u\,dt - F_{\perp}\upsilon\,dt,$$

так как направления векторов $\mathbf{F}_{||}$ и $\mathbf{u}$ одинаковы, а $\mathbf{F}_{\perp}$ и $\boldsymbol{\upsilon}$ различны.

Модули сил равны

$$F_{||} = evB, \qquad F_{\perp} = euB.$$

Работа полной магнитной силы равна

$$dA = evBudt - euBvdt = 0,$$

как этого и требует уравнение для магнитной силы, которая всегда перпендикулярна перемещению заряда и никакой работы совершить не может.

Ток все-таки возникает. Это связано с тем, что на контур давит сила $\mathbf{F}_{\perp}$, которая стремится вернуть контур в первоначальное положение и чтобы этого не произошло и элемент контура $d\mathbf{l}$ перемещался вправо с постоянной скоростью $\mathbf{v}$, необходимо приложить равную и противоположную внешнюю стороннюю силу:

$$\mathbf{F}_{\text{внеш}} = -e[\mathbf{v},\mathbf{B}].$$

За счет работы этой силы в контуре будет выделяться энергия при прохождении индукционного тока.

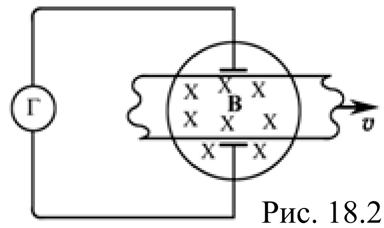


Рис. 18.2

Задача 2. Будет ли показывать ток гальванометр, включенный в цепь (рис. 18.2)? Если будет, то в какую сторону потечет ток? Проводящую ленту перемещают со скоростью v через область, в которой имеется магнитное поле $\mathbf{B}$, направленное, например, от нас.

Решение: Если строго следовать определению ЭДС индукции, то совсем не ясно, где здесь контур, как его замкнуть, как он будет вести себя при движении ленты.

Однако если мы в рассмотрение явления привлечем силу Лоренца, то по правилу $\mathbf{F}_m = e[\mathbf{v},\mathbf{B}]$ становится ясно, что электроны будут смещаться к нижней пластине и это дает ток, который будет течь в цепи гальванометра против часовой стрелки.

Схема этого опыта используется в магнитогидродинамических генераторах (МГД), превращающих тепловую энергию в электрическую. Вместо ленты в магнитном поле продувают плазму, которую затем направляют по обычной схеме в систему ТЭЦ. Это увеличивает КПД МГД и ТЭЦ.

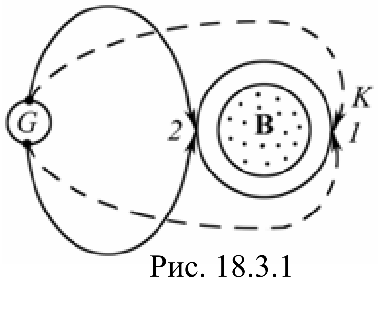


Рис. 18.3.1

Задача 3. Неподвижное металлическое кольцо имеет подвижные контакты K, которые могут легко перемещаться по кольцу (рис. 18.3.1). Внутри кольца создано постоянное магнитное поле $\mathbf{B}$ (направленное к нам). Контакты K перемещают из положения *1* в положение *2*. Потечет ли ток через гальванометр, и если да, то в какую сторону?

Решение: Если внимательно рассмотреть предлагаемый контур, то можно заметить, что при всем движении контактов образуемый контур не пересекают силовые линии **B**. Схематично контур показан на рис. 18.3.2. Из рис. 18.3.2 ясно следует, что потока Φ_B через «внешний» контур нет. Ситуация аналогична с потоком вектора **E** в теореме Гаусса (рис. 18.3.3).

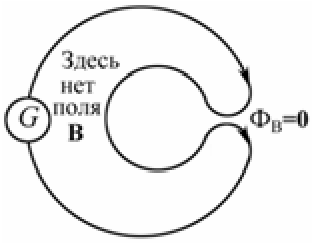


Рис. 18.3.2

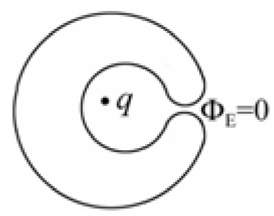


Рис. 18.3.3

Задача 4. Провод, имеющий форму параболы $y = kx^2$ (рис. 18.4), находится в однородном магнитном поле **B**, перпендикулярном плоскости *xy*. Из вершины параболы начинает движение перемычка без начальной скорости, с постоянным ускорением **a**. Найти ЭДС $\mathcal{E}$ индукции в контуре как функцию координаты *y*. Вычислить $\mathcal{E}$, если $y = 0{,}8$ м; $k = 0{,}16$ м$^{-1}$; $a = 10$ м/с^2; $B = 0{,}1$ Тл.

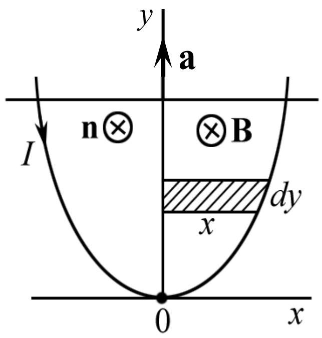


Рис. 18.4

Дано:
$y = 0{,}8$ м
$k = 0{,}16$ м$^{-1}$
$a = 10$ м/с^2
$B = 0{,}1$ Тл
$\mathcal{E}$ – ?

Решение: По закону Фарадея $\mathcal{E}$ индукции равна

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Поэтому решение задачи сводится к нахождению потока вектора **B** через площадку, образованную перемычкой и ветвями параболы

$$d\Phi = \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = \mathbf{B}\cdot dS\cdot \mathbf{n},$$

где **n** – нормаль к поверхности контура, направление которой совпадает с вектором **B**. Из рис. 18.4 следует, что $dS = 2x dy$.

Переходя к одной переменной, заменяем $x = \sqrt{y/k}$:

$$dS = 2\sqrt{y/k}\, dy;$$

$$\mathcal{E} = -2B\sqrt{\frac{y}{k}}\cdot\frac{dy}{dt}. \qquad (1)$$

В уравнении (1) величина $dy/dt = v$ – скорость движения перемычки, которая равна $v = \sqrt{2ay}$.

Окончательно $\mathcal{E} = -2By\sqrt{2a/k}$.

Подставляя числовые значения, найдем ЭДС индукции при $y = 0{,}8$ м. Знак «–» учитывает направление тока.

$$\mathscr{E} = 2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot \sqrt{2 \cdot 10/0{,}16} \cong 1{,}8 \text{ В.}$$

Ответ: $\mathscr{E} = \left| -2By\sqrt{2a/k} \right| \cong 1{,}8$ В.

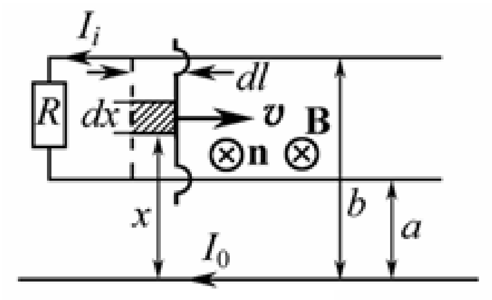


Рис. 18.5

Задача 5. Источником магнитного поля служит длинный прямой проводник с током $I_0 = 6$ А. На расстояниях a и b от него расположены два параллельных ему провода, замкнутых на одном конце сопротивлением R (рис. 18.5). По проводам без трения перемещают с постоянной скоростью v стержень-перемычку. Пренебрегая сопротивлением проводов, стержня и скользящих контактов, найти: 1) значение и направление индукционного тока в стержне; 2) силу, необходимую для поддержания постоянства скорости перемычки. Данные для расчета: $a = 20$ мм; $b = 40$ мм; $R = 0{,}01$ Ом; $v = 10$ м/с.

Дано:
$I_0 = 6$ А
$a = 0{,}02$ м
$b = 0{,}04$ м
$R = 0{,}01$ Ом
$v = 10$ м/с
I_i – ? $F_{\text{внеш}}$ – ?

Решение: 1) Согласно закону Ома ток в простейшей цепи, рассматриваемой в задаче, равен $I_i = \mathscr{E}/R$. Поэтому задача сводится к нахождению ЭДС $\mathscr{E}$ индукции. По закону Фарадея $\mathscr{E} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$, где $\Phi = \int\limits_S \mathbf{B}\,d\mathbf{S}$, $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$, вектор нормали $\mathbf{n}$ выбираем так, чтобы он был направлен от нас за чертеж, т.е. по вектору **B**.

Направление **B** найдено по закону Био – Савара – Лапласа или по правилу правого буравчика.

Выбрав ось x, находим $dS = dl \cdot dx$, а $B = \dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi x}$ – магнитное поле бесконечно длинного проводника с током на расстоянии x от него не является однородным относительно x, но однородно относительно направления движения перемычки в каждом слое шириной $dl = vdt$.

Таким образом, $$d\Phi = \frac{\mu_0 I_0 v dt}{2\pi x} dx.$$

Интегрируя полученное выражение по x, получаем

$$d\Phi = \frac{\mu_0 I_0 v dt}{2\pi} \int\limits_a^b \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_0 v dt}{2\pi} \ln\frac{b}{a}; \quad \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I_0 v}{2\pi} \ln\frac{b}{a};$$

$$I_i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I_0 \upsilon}{2\pi R}\ln\frac{b}{a}, \qquad (1)$$

знак «минус» опущен, при этом направление индукционного тока показано на рис. 18.5. Величина тока постоянна.

Проведем вычисления: $I_i = \dfrac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 6\cdot 10}{2\pi\cdot 0{,}01}\cdot \ln 2 = 8{,}3\cdot 10^{-4}$ А $= 0{,}83$ мА.

2) На всякий проводник с током в магнитном поле действует сила Ампера. По определению сила Ампера равна

$$d\mathbf{F}_{\text{А}}(x) = I_i\cdot d\boldsymbol{x}\times\mathbf{B},$$

где dx – элемент движущейся перемычки, по которой течет индукционный ток I_i. Легко убедиться, что сила Ампера направлена влево, противоположно вектору скорости υ.

Сохраняя систему координат, видим, с учетом (1), что величина этой силы существенно зависит от x

$$dF_{\text{А}}(x) = \frac{I_i\cdot \mu_0 I_0 dx}{2\pi x} = \frac{\mu_0^2 I_0^2 \upsilon}{4\pi^2 R}\ln\frac{b}{a}\cdot\frac{dx}{x}.$$

Проводя интегрирование, находим силу, необходимую для поддержания постоянства скорости

$$F_{\text{А}} - F_{\text{внеш}} = m\frac{d\upsilon}{dt}, \text{ где } \upsilon = \text{const},$$

а, следовательно, $F_{\text{А}} = F_{\text{внеш}}$

$$F_{\text{внеш}} = \frac{\mu_0^2 I_0^2 \upsilon}{4\pi^2 R}\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2.$$

Проведем вычисления:

$$F_{\text{внеш}} = \frac{\left(4\pi\cdot 10^{-7}\right)^2\cdot 6^2\cdot 10}{4\pi^2\cdot 0{,}01}\cdot\left(\ln 2\right)^2 = 6{,}9\cdot 10^{-10}\ \text{Н} = 0{,}69\ \text{нН}.$$

Ответ: $I_i = 0{,}83$ мА; $F_{\text{внеш}} = 0{,}69$ нН.

Задача 6. Квадратная проволочная рамка со стороной a и прямой длинный проводник с постоянным током I_0 лежат в одной плоскости (рис. 18.6). Рамку повернули на 180° вокруг оси OO', отстоящей от проводника на расстояние b. Найти количество электричества, прошедшее в рамке, если индуктивность и сопротивление рамки равны L и R.

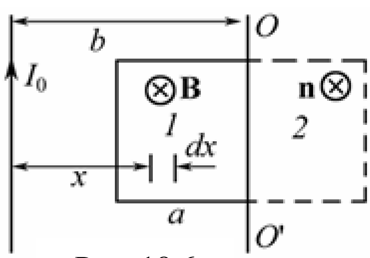


Рис. 18.6

Решение: Количество электричества находят по формуле

$$Q = \int_0^t I\ dt.$$

По законам Фарадея и Ома $\quad I = \frac{\mathcal{E}}{R}$, где $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} + L\frac{dI}{dt}$

Легко видеть, что

$$Q = \frac{1}{R}\int\left(-\frac{d\Phi}{dt} + L\frac{dI}{dt}\right)dt = -\frac{\Delta\Phi}{R} + \frac{L}{R}\Delta I.$$

До поворота ток равен 0, и после того, как рамку повернули и остановили, ток так же равен нулю, поэтому $\Delta I = 0$. Итак,

$$Q = -\frac{\Delta\Phi}{R},$$

где $\Delta\Phi = \int \mathbf{B}\,d\mathbf{S}$ – изменение магнитного потока в контуре при его повороте на 180°; $B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi x}$ – магнитное поле бесконечно длинного проводника с током I_0 на расстоянии x от него; $dS = a dx$.

С этого момента основным становится вопрос о знаках Φ_1 и Φ_2. Выберем нормаль **n** к плоскости рамки так, чтобы в положении «2» **n** был направлен от нас за плоскость. Тогда очевидно, что $\Phi_2 > 0$, а $\Phi_1 < 0$.

$$\Delta\Phi = \Phi_2 + |\Phi_1| = \int_{b-a}^{b+a} Badx = \int_{b-a}^{b+a} \frac{\mu_0 I_0 a}{2\pi}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_0 a}{2\pi}\int_{b-a}^{b+a}\frac{dx}{x};$$

$$\Delta\Phi = \frac{\mu_0 I_0 a}{2\pi}\cdot\ln\frac{b+a}{b-a}.$$

Тогда количество электричества, прошедшее в рамке

$$Q = \left|-\frac{\Delta\Phi}{R}\right| = \frac{\mu_0 I_0 a}{2\pi R}\cdot\ln\frac{b+a}{b-a}.$$

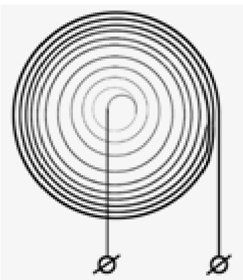


Рис. 18.7

Задача 7. Плоская спираль с большим числом N витков, плотно прилегающих друг к другу, находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости спирали (рис. 18.7). Наружный радиус спирали равен a. Магнитное поле изменяется по закону $B = B_0 \sin\omega t$. Найти амплитудное значение ЭДС $\mathcal{E}_m$, наведенной в спирали.

Решение: Витки спирали практически не отличаются от окружности, поэтому в искомом витке $\mathcal{E}_i$ равна

$$\mathcal{E}_i(r) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi r^2 B_0 \omega\cos\omega t,$$

здесь r – радиус витка. На интервал значений dr приходится число витков $dN = \lambda dr$, где $\lambda = N/a$ – число витков на единицу радиуса.

Таким образом, полная ЭДС $\mathcal{E}$ будет равна

$$\mathcal{E} = \int_0^a \mathcal{E}_i(r)dN = \int_0^a \mathcal{E}_i(r)\frac{N}{a}dr = -\pi B_0\frac{N}{a}\omega\cos\omega t\int_0^a r^2dr = -\frac{1}{3}\pi a^2 NB_0\omega\cos\omega t.$$

Окончательно имеем для амплитудного значения $\mathcal{E}_m$

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{3}\pi a^2 NB_0\omega.$$

Ответ: $\mathcal{E}_m = \frac{1}{3}\pi a^2 NB_0\omega.$.

Задача 8. Плоский контур (рис. 18.8), имеющий вид двух квадратов со сторонами a = 20 см и b = 10 см, находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном к его плоскости. Индукция магнитного поля изменяется со временем t по закону $B = B_0\sin\omega t$, где B_0 = 10 мТл и ω = 100 рад/с. Найти амплитуду I_m индукционного тока в контуре, если сопротивление единицы длины его ρ = 50 мОм/м. Индуктивностью контура пренебречь.

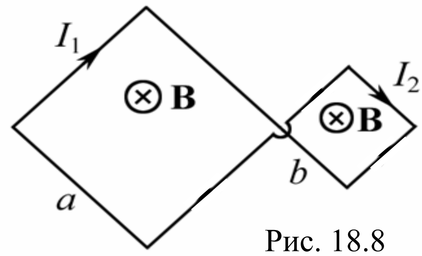


Рис. 18.8

Дано:
$a = 0{,}2$ м
$b = 0{,}1$ м
$B_0 = 10^{-2}$ Тл
$\omega = 100$ рад/с
$\rho = 5\cdot 10^{-2}$ Ом/м
I_m – ?

Решение: Ключевой момент анализа физической системы состоит в том, чтобы понять, что токи I_1 и I_2 в контурах текут во встречных направлениях. Это соответствует закону Ленца.

По закону Ома и Фарадея

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{R_1}; \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{R_2},$$

где $R_1 = 4\rho a$ и $R_2 = 4\rho b$, так как $4a$ и $4b$ – это длина провода соответствующих контуров.

$$\mathcal{E}_1 = \left|-\frac{d\Phi_1}{dt}\right| = a^2B_0\omega\cos\omega t \text{ и } \mathcal{E}_2 = \left|-\frac{d\Phi_2}{dt}\right| = b^2B_0\omega\cos\omega t;$$

$$I_m = I_{1m} - I_{2m} = \frac{\mathcal{E}_{1m}}{R_1} - \frac{\mathcal{E}_{2m}}{R_2} = \frac{a^2B_0\omega}{4\rho a} - \frac{b^2B_0\omega}{4\rho b} = \frac{B_0\omega}{4\rho}(a-b).$$

Подставляя численные значения, имеем

$$I_m = \frac{1\cdot 10^{-2}\cdot 100}{4\cdot 5\cdot 10^{-2}}(0{,}2-0{,}1) = 0{,}5 \text{ А}.$$

Ответ: $I_m = 0{,}5$ А.

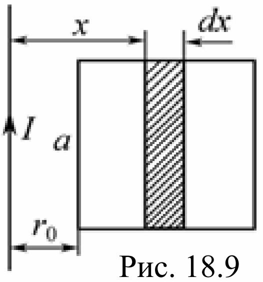


Рис. 18.9

Задача 9. Прямой бесконечно длинный проводник с током I и квадратная рамка сопротивлением R = 0,7 Ом и стороной a = 20 см расположены в одной плоскости (рис. 18.9). Ток в проводнике изменяется по закону $I = \alpha t^3$, где α = 3 А/с^3. Определить силу тока I_i в рамке в момент времени t = 10 с, если $r_0 = a$.

Дано:
a = 0,2 м
R = 0,7 Ом
α = 3 А/с^3
t = 10 с
I_i – ?

Решение: Физическая система такова, что S = const. Однако магнитный поток $\Phi = \Phi(t)$, потому что $B = B(x, t)$. Источником магнитного поля $B(x, t)$ является проводник с током $I = I(t)$. Поэтому магнитное поле бесконечно длинного проводника с током I на расстоянии x от него в момент времени t равно

$$B(x,t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi x} = \frac{\mu_0 \alpha t^3}{2\pi x}.$$

Для расчета $\Phi(t)$ находим $d\Phi$ и интегрируем

$$d\Phi = B(x,t)\,dS = \frac{\mu_0 \alpha t^3}{2\pi x} a\,dx;$$

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 a \alpha t^3}{2\pi} \int_{r_0}^{r_0+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 a \alpha t^3}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{r_0}\right).$$

По закону Фарадея находим

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{3\mu_0 a \alpha t^2}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{r_0}\right).$$

Сила тока в рамке

$$I_i(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = \frac{3\mu_0 a \alpha t^2}{2\pi R} \ln\left(1 + \frac{a}{r_0}\right),$$

здесь знак «минус» опущен, т.к. он указывает только на направление индукционного тока в рамке (рис. 18.9).

Подставляя численные значения, имеем

$$I_i = \frac{3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,2 \cdot 3 \cdot 10^2}{2\pi \cdot 0,7} \ln 2 = 35,6 \text{ мкА}.$$

Ответ: I_i = 35,6 мкА.

Задача 10. В магнитном поле, индукция которого B = 0,1 Тл, вращается стержень длиной l = 1 м с угловой скоростью ω = 20 рад/с. Ось вращения проходит через конец стержня и параллельна магнитному полю. Найти ЭДС $\mathcal{E}$ индукции, возникающую на концах стержня.

Дано:	**Решение:** При каждом обороте стержня магнитный поток Φ, пересекаемый стержнем, равен $\Phi = BS = B\cdot\pi l^2$. Осталось найти время одного оборота. Очевидно, что это период $T = 2\pi/\omega$.
$B = 0{,}1$ Тл $l = 1$ м $\omega = 20$ рад/с	
$\mathcal{E}$ – ?	Тогда величина ЭДС $\mathcal{E}$ индукции

$$\mathcal{E} = \left|-\frac{d\Phi}{dt}\right| = \frac{\Phi}{T} = \frac{B\pi l^2\omega}{2\pi} = \frac{1}{2}Bl^2\omega = \frac{1}{2}\cdot 0{,}1\cdot 1\cdot 20 = 1 \text{ В}.$$

Ответ. $\mathcal{E} = 1$ В.

Альтернативное решение. Воспользуемся понятием средней скорости. Скорость одного конца стержня $v = \omega l$. Скорость другого конца стержня $v_0 = 0$. Тогда $v_{\text{ср}} = (v + v_0)/2 = \omega l/2$. Найдем искомую величину: $\mathcal{E} = Blv_{\text{ср}} = Bl^2\omega/2 = 0{,}1\cdot 1\cdot 20/2 = 1$ В.

Задача 11. В магнитном поле, индукция которого $B = 0{,}1$ Тл, помещена квадратная рамка из медной проволоки. Площадь поперечного сечения проволоки $S_0 = 11$ мм^2, площадь рамки $S = 25$ см^2. Нормаль к плоскости рамки параллельна магнитному полю. Какое количество электричества q пройдет по контуру рамки при исчезновении магнитного поля? Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7\cdot 10^{-8}$ Ом·м.

Дано:	**Решение:** По определению $dq = Idt$, где $I = \mathcal{E}/R$; $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$; R – сопротивление рамки. Очевидно, что $q = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{1}{R}(\Phi_1 - \Phi_2)$, $\Phi_2 = 0$.
$B = 0{,}1$ Тл $S_0 = 1{,}1\cdot 10^{-5}$ м^2 $S = 2{,}5\cdot 10^{-3}$ м^2 $\rho = 1{,}7\cdot 10^{-8}$ Ом·м	
q – ?	То есть $q = \Phi_1/R$.

Сопротивление рамки $R = \dfrac{\rho l}{S_0} = \dfrac{\rho\cdot 4a}{S_0} = \dfrac{4\rho\sqrt{S}}{S_0}$,

где $a = \sqrt{S}$ – сторона квадратной рамки.

Но $\Phi_1 = B\cdot S$. Окончательно

$$q = \frac{BS_0}{4\rho}\sqrt{S} = \frac{0{,}1\cdot 1{,}1\cdot 10^{-5}}{4\cdot 1{,}7\cdot 10^{-8}}\sqrt{2{,}5\cdot 10^{-3}} = 0{,}81 \text{ Кл}.$$

Ответ: $q = 0{,}81$ Кл.

Задача 12. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл равномерно вращается рамка, содержащая $N = 1000$ витков. Площадь рамки $S = 150$ см^2. Рамка делает $\nu = 10$ об/с. Определить мгновенное значение ЭДС $\mathcal{E}_i$, соответствующее углу поворота рамки в $\alpha = 30°$, если в начальный момент **B** || **n**.

Дано:	
$B = 0{,}1$ Тл	
$N = 10^3$	
$S = 1{,}5\cdot10^{-2}$ м^2	
$\nu = 10$ с$^{-1}$	
$\alpha = 30°$	
q – ?	

Решение: Мгновенное значение ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$ определяется уравнением электромагнитной индукции Фарадея

$$\mathcal{E} = -d\Phi/dt.$$

Общее число витков равно N, поэтому

$$\mathcal{E}_i = -N\frac{d\Phi}{dt}. \quad (1)$$

$$\Phi = BS\cos\omega t,$$

где круговая частота ω связана с числом ν оборотов в секунду соотношением: $\omega = 2\pi\nu$.

Подставив в формулу (1) выражение для Φ и продифференцировав по времени, найдем мгновенное значение ЭДС индукции:

$$\mathcal{E}_i = NBS\omega\sin\omega t. \quad (2)$$

Подставляя значение ω в (2), получим

$$\mathcal{E}_i = 2\pi\nu NBS\sin\omega t. \quad (3)$$

Рассчитаем ЭДС $\mathcal{E}_i$ по формуле (3) при $\omega t = \alpha$

$$\mathcal{E}_i = 2\cdot3{,}14\cdot10\cdot10^3\cdot0{,}1\cdot1{,}5\cdot10^{-2}\cdot0{,}5 = 47{,}1 \text{ В}.$$

Ответ: $\mathcal{E}_i = 47{,}1$ В.

Задача 13. Непроводящее кольцо радиусом $r = 0{,}1$ м и массой $m = 0{,}1$ г, имеющее равномерно распределенный заряд $q = 10$ мкКл, может свободно вращаться вокруг своей оси. Кольцо помещено в перпендикулярное плоскости кольца магнитное поле, индукция которого внутри кольца $B_0 = 0{,}1$ Тл. Магнитное поле начинает равномерно уменьшаться до нуля. Какую скорость υ приобретает кольцо после исчезновения магнитного поля, если в начальный момент оно покоилось?

Дано:	
$B_0 = 0{,}1$ Тл	
$r = 0{,}1$ м	
$m = 10^{-4}$ кг	
$q = 10^{-5}$ Кл	
υ – ?	

Решение: Воспользуемся законом Фарадея – Максвелла в интегральной форме

$$\oint_L(\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S(\mathbf{B}, d\mathbf{S}).$$

Отсюда можно найти напряженность вихревого электрического поля на ободе кольца

$$E\cdot 2\pi r \cong -\frac{\Delta B}{\Delta t}S,$$

где $S = \pi r^2$ – площадь кольца; $\Delta B = (0 - B_0) = -B_0$.

$$E \cong -\frac{\Delta B}{\Delta t}\cdot\frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{B_0 r}{2\Delta t}, \quad (1)$$

Сила F_τ, действующая на заряд q кольца, равна $F_\tau = qE$. Под действием силы F_τ заряженное непроводящее кольцо приобретает ускорение

$$a_\tau = \frac{q}{m}E = \text{const}. \qquad (2)$$

Поэтому

$$\upsilon = a_\tau \cdot \Delta t. \qquad (3)$$

Окончательно из (1) – (3) имеем

$$\upsilon \cong \frac{q}{m}\frac{B_0 r}{2\Delta t}\cdot \Delta t = \frac{qB_0 r}{2m}.$$

Вычисляя, получим $\upsilon = \dfrac{1\cdot 10^{-5}\cdot 0{,}1\cdot 0{,}1}{2\cdot 1\cdot 10^{-5}} = 5\cdot 10^{-3}$ м/с $= 5$ мм/с

Ответ: $\upsilon = 5$ мм/с.

Задача 14. От прямолинейного бесконечно длинного проводника с током $I_0 = 10$ А удаляется со скоростью $\upsilon = 100$ м/с квадратная рамка (сторона рамки $a = 20$ см) (рис. 18.10). Определить ЭДС $\mathcal{E}$ индукции в рамке через $t = 10$ с от начала движения, если в начальный момент времени рамка находилась на расстоянии $r_0 = 20$ см от проводника.

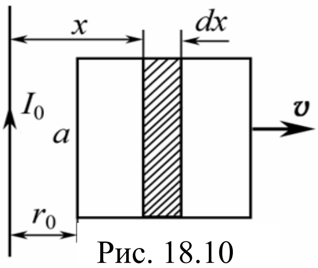


Рис. 18.10

Дано:
$I_0 = 10$ А
$\upsilon = 100$ м/с
$a = 0{,}2$ м
$t = 10$ с
$r_0 = 0{,}2$ м
$\mathcal{E}$ – ?

Решение: По закону Фарадея $\mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$; $\quad \Phi = \int \mathbf{B}\,d\mathbf{S}$.

Магнитный поток Ф, пронизывающий рамку, изменяется, так как рамка движется в неоднородном магнитном поле. Найдем изменение магнитного потока $d\Phi$, пронизывающего площадку $dS = adx$, в зависимости от расстояния до проводника с током I_0.

Магнитное поле $B = \mu_0 I_0/(2\pi x)$ является функцией координаты. Следовательно,

$$d\Phi = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi x}dS = \frac{\mu_0 I_0 a}{2\pi}\frac{dx}{x}.$$

Зависимость от времени магнитного потока, пронизывающего квадратную рамку, имеет вид:

$$\Phi(t) = \Phi_0 + \frac{\mu_0 I_0 a}{2\pi}\int_{r_0}^{r_0+\upsilon t}\frac{dx}{x} = \Phi_0 + \frac{\mu_0 I_0 a}{2\pi}\ln\left(\frac{\upsilon t}{r_0}+1\right),$$

где Φ_0 – магнитный поток при $t = 0$.

Окончательно

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I_0 a}{2\pi} \cdot \frac{r_0}{(vt + r_0)} \cdot \frac{v}{r_0} = -\frac{\mu_0 I_0 a v}{2\pi(vt + r_0)}.$$

Подставляя числовые значения, имеем

$$|\mathcal{E}| = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 0,2 \cdot 100}{2\pi \cdot (100 \cdot 10 + 0,2)} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ В} = 40 \text{ нВ}.$$

Ответ: $\mathcal{E}$ = 40 нВ.

Задачи для самостоятельного решения

18.1. Проволочное кольцо диаметром d = 20 см помещено в однородное переменное магнитное поле $B(t)$ так, что плоскость кольца перпендикулярна вектору **B**. Магнитная индукция за время t_1 = 1 с нарастает линейно от 0 до B_{max} = 0,1 Тл и затем за t_2 = 2 с линейно уменьшается до нуля (рис. 18.11). Какое количество теплоты Q выделится в кольце, если сопротивление кольца R = 0,1 Ом.

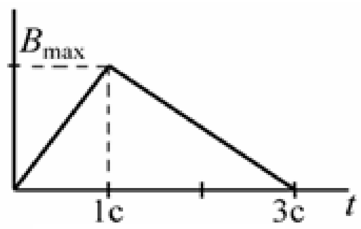


Рис. 18.11

Ответ: $Q = \dfrac{\pi^2 d^4 B_{max}^2}{R}\left(\dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_2}\right) \cong 2,4$ мДж.

18.2. Однослойная катушка диаметром D = 5 см помещена в однородное магнитное поле, параллельное ее оси. Индукция поля равномерно изменяется со скоростью $\Delta B/\Delta t$ = 10^{-2} Тл/с. Катушка содержит N = 1000 витков медной проволоки (ρ = $1,75 \cdot 10^{-8}$ Ом·м) сечением S = 0,2 мм^2. 1) К концам катушки подключен конденсатор емкостью C = 10 мкФ. Определить заряд на нем. 2) Концы катушки замкнуты накоротко. Определить тепловую мощность, выделяющуюся в катушке.

Ответ: 1) $q = NC\dfrac{\pi D^2}{4}\left(\dfrac{\Delta B}{\Delta t}\right) = 196$ нКл; 2) $P = \dfrac{\pi D^3 NS}{16\rho}\left(\dfrac{\Delta B}{\Delta t}\right)^2 = 28$ мкВт.

18.3. Однородное магнитное поле с индукцией B перпендикулярно к плоскости медного кольца (ρ = $1,75 \cdot 10^{-8}$ Ом·м), имеющего диаметр D = 20 см и толщину d = 2 мм. С какой скоростью должна изменяться во времени магнитная индукция B, чтобы индукционный ток в кольце равнялся 10 А?

Ответ: $\dfrac{\Delta B}{\Delta t} = \dfrac{16\rho I}{\pi D d^2} \approx 1,12$ Тл/с.

18.4. Между рельсами железнодорожного пути включен вольтметр. Над ним с постоянной скоростью проходит поезд. Каковы будут показания вольтметра при приближении поезда к вольтметру в момент нахождения поезда над вольтметром и при удалении поезда от вольтметра? Магнитное поле Земли принять на данном участке однородным, вертикальная слагающая его $B_в = 5 \cdot 10^{-5}$ Тл. Ширина колеи $a = 1{,}2$ м. Скорость поезда $v = 60$ км/ч.

Ответ: $U = B_в a v = 10^{-3}$ В и одинакова всегда.

18.5. Реактивный самолет, имеющий размах крыльев $l = 50$ м, летит горизонтально со скоростью $v = 800$ км/ч. Определить разность потенциалов, возникающую между концами крыльев, если вертикальная слагающая индукции магнитного поля Земли равна $B_в = 5 \cdot 10^{-5}$ Тл. Можно ли использовать эту разность потенциалов для измерения скорости полета самолета? Почему? Ответ обосновать.

Ответ: $\Delta\varphi = vB_в l = 0{,}56$ В. Нельзя.

18.6. Кусок провода длиной $l = 2$ м складывается вдвое и его концы замыкаются. Затем провод растягивается в квадрат так, что плоскость квадрата перпендикулярна горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли. $B_{гор} = 2 \cdot 10^{-5}$ Тл. Какое количество электричества пройдет через контур, если его сопротивление $R = 1$ Ом?

Ответ: $q = B_{гор} l^2 / (16R) = 5 \cdot 10^{-6}$ Кл.

18.7. Два металлических стержня расположены вертикально и замкнуты вверху проводником. По этим стержням без трения и нарушения контакта скользит перемычка длиной $l = 0{,}5$ см и массой $m = 1$ г. Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10^{-3}$ Тл, перпендикулярной плоскости рамки. Установившаяся скорость $v = 1$ м/с. Найти сопротивление R перемычки. Сопротивлением стержня и провода пренебречь.

Ответ: $R = \dfrac{B^2 l^2 v}{mg} \approx 2{,}5 \cdot 10^{-7}$ Ом.

18.8. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}84$ Тл с небольшой скоростью вращается квадратная рамка со стороной $a = 5$ см, состоящая из небольшого числа витков медной ($\rho = 1{,}75 \cdot 10^{-8}$ Ом·м) проволоки сечением $S = 0{,}5$ мм^2. Определить число n оборотов рамки в секунду, если максимальное значение силы тока, индуцируемое в рамке при вращении, равно $I_0 = 1{,}9$ А, считая, что концы рамки соединены накоротко.

Ответ: $n = \dfrac{2\rho I_0}{\pi B a S} = 1$ с$^{-1}$.

18.9. Жесткий провод, согнутый в полукруг радиуса r, вращается с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией B. Чему равна частота ω' и амплитуда I_0 тока, наведенного в проводнике, если провод замкнут на сопротивление R, а сопротивлением амперметра можно пренебречь? Считать, что магнитное поле наведенного тока мало по сравнению с B.

Ответ: $I = I_0\sin\omega' t$, где $I_0 = \pi r^2 B\omega/(2R)$; $\omega' = \omega$.

18.10. Медный обруч массой m = 5 кг расположен в плоскости магнитного меридиана. Какое количество q электричества индуцируется в нем, если его повернуть вокруг вертикальной оси на угол α = 90°? Горизонтальная составляющая магнитного поля Земли $B_r = 2{,}1\cdot10^{-5}$ Тл. Принять $\rho = 1{,}75\cdot10^{-8}$ Ом·м, $\rho_m = 8{,}9\cdot10^3$ кг/м^3.

Ответ: $q = mB/(4\pi\rho_m\rho)$ = 53 мКл.

18.11. Виток из проволоки площадью S = 1 м^2 расположен перпендикулярно магнитному полю, индукция которого изменяется по закону $B = 0{,}5(1 + e^{-t})$ Тл. Определить ЭДС $\mathcal{E}$ индукции в витке как функцию времени.

Ответ: $\mathcal{E} = 0{,}5e^{-t}$ В.

18.12. Виток радиусом R = 5 м расположен так, что плоскость его перпендикулярна вектору индукции B магнитного поля. Индукция изменяется по закону: $B = 5\cdot10^{-2}t$ (Тл). Определить работу A (в электронвольтах), которую совершает индуцированное электрическое поле при перемещении электрона по витку, если заряд электрона $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

Ответ: $A = \pi eR^2(dB/dt)$ = 3,93 эВ.

18.13. Квадратная рамка со стороной a = 1 м вращается в однородном магнитном поле вокруг оси, лежащей в плоскости рамки и проходящей через ее центр, с частотой $\omega = 10\pi$ рад/с. Ось вращения рамки перпендикулярна линиям индукции магнитного поля. Магнитное поле изменяется по закону $B = B_0\cos\omega t$, где B_0 = 1 мТл. Какая ЭДС $\mathcal{E}$ индукции возникает в рамке через t = 25 мс после начала ее вращения, если в начальный момент нормаль **n** к плоскости рамки и вектор **B** составили угол β = 0°?

Ответ: $\mathcal{E} = a^2B_0\omega\cdot\sin(2\omega t)$ = 31,4 мВ.

18.14. В однородном магнитном поле с индукцией B = 0,1 Тл вращается вокруг оси, лежащей в плоскости рамки и проходящей через центр, квадратная рамка со стороной a = 20 см, состоящая из N = 100 витков медного ($\rho = 1{,}7\cdot10^{-8}$ Ом·м) провода сечением S = 1 мм^2. Максимальное значение индукционного тока в рамке I_m = 2 А. Определить число ν оборотов рамки в секунду.

Ответ: $\nu = 2\rho I_m/(\pi aBS)$ = 1,08 об/с.

18.15. Контуры I и II (рис. 18.12) находятся в переменных магнитных полях. Поток вектора индукции в первом контуре изменяется по закону $\Phi_1 = A_1 t$, а во втором контуре – по закону $\Phi_2 = A_2 t$. На остальных участках цепи магнитное поле отсутствует. Найти токи в этих контурах, если R_1 = 100 Ом; R_2 = 200 Ом; A_1 = 100 Вб/с; A_2 = 60 Вб/с.

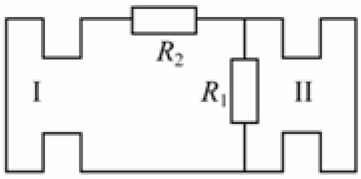


Рис. 18.12

Ответ: $I_1 = (A_1 + A_2)/R_2 =$ 0,8 А; $I_2 = I_1 + A_2/R_1$ = 1,4 А.

18.16. В однородном магнитном поле с индукцией B = 1 Тл поступательно и равномерно движется проводник длиной l = 4 см со скоростью υ = 2 м/с. Вектор скорости направлен под углом α = 30° к вектору индукции **B**. Проводник при своем движении остается перпендикулярным направлению поля. Найти разность потенциалов на концах проводника.

Ответ: $\Delta\varphi = Bl\upsilon\sin\alpha$ = 40 мВ.

18.17. Круглый виток радиусом r, сделанный из медной проволоки, площадь поперечного сечения которой S, находится в однородном магнитном поле, напряженность которого за некоторое время меняется от 0 до H. Сколько электронов пройдет через поперечное сечение проволоки за время существования электрического тока?

Ответ: $N = \dfrac{\mu\mu_0 HrS}{2\rho_{\text{Cu}} l}$.

18.18. Прямоугольная рамка размером $a \times b$ вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 вокруг стороны b, отстоящей на расстоянии $c > a$ от бесконечно длинного прямолинейного проводника, по которому течет ток I_0. Найти ЭДС индукции $\mathcal{E}$ в рамке.

Ответ: $\mathcal{E} = \dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi} \cdot \dfrac{Ba\omega_0 \sin\omega_0 t}{c + a\cos\omega_0 t}$.

18.19. Кольцо радиуса R, сделанное из проводящего материала, находится в однородном магнитном поле, вектор магнитной индукции которого **B** перпендикулярен плоскости кольца. Проводник AB, касающийся кольца, перемещается с постоянной скоростью $\boldsymbol{\upsilon}$, оставаясь параллельным своему первоначальному положению (рис. 18.13). Определить электродвижущую силу индукции, возникающую в этой системе проводников, как функцию времени.

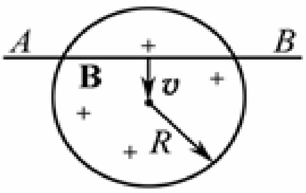


Рис. 18.13

Ответ: $|\mathcal{E}| = 2B\upsilon\sqrt{\upsilon t(2R - \upsilon t)}$.

18.20. По длинному проводнику течет ток I. В магнитном поле этого тока находится проволочная квадратная рамка сопротивлением R со стороной a. Центр рамки находится на расстоянии r_0 от проводника с током. Нормаль к плоскости рамки и вектор индукции магнитного поля составляют угол α. Какое количество электричества протечет по рамке за время изменения тока в проводнике от первоначального значения I до нуля? (Магнитным полем индукционного тока в рамке пренебречь).

Ответ: $q = \dfrac{\mu\mu_0 Ia}{2\pi R} \cdot \ln\dfrac{r_0 + 0{,}5a\cos\alpha}{r_0 - 0{,}5a\cos\alpha}$.

18.21. Верхние концы двух вертикальных длинных проводников, параллельных друг другу и находящихся в однородном магнитном поле, вектор индукции которого **B** перпендикулярен плоскости, в которой лежат проводники, соединены активным сопротивлением R. По проводникам без трения может скользить, падая, горизонтальный проводник AB массой m (рис. 18.14). Расстояние между проводниками l. Определить закон изменения скорости движения проводника AB, пренебрегая сопротивлением проводников.

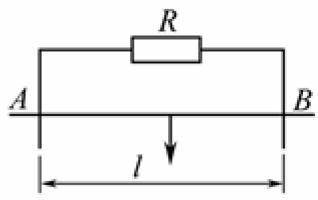


Рис. 18.14

Ответ: $v = gb\left(1 - e^{-t/b}\right)$, где $b = mR\Big/\left(B^2 l^2\right)$

18.22. В магнитном поле бесконечно длинного прямолинейного проводника с током I находится прямоугольная рамка, сделанная из металлической проволоки, со сторонами a и b, причем сторона b параллельна проводу с током (рис. 18.15). Ближайшая к проводу с током сторона рамки находится от провода на расстоянии l. Определить среднее значение ЭДС $\langle\mathcal{E}\rangle$ индукции, возникающей в рамке, если рамку удалять от проводника с током параллельно самой себе на расстояние x, относительно ее первоначального положения с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}$.

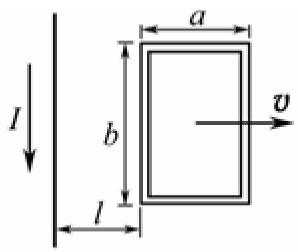


Рис. 18.15

Ответ. $\langle\mathcal{E}\rangle = \dfrac{\mu_0\mu IvB}{2\pi x}\ln\dfrac{(l+x)\ (l+a+x)}{l(l+a)}$.

18.23. В магнитном поле бесконечно длинного прямого проводника с током I со скоростью v движется проводник длиной l по направлению, перпендикулярному току. Проводник длиной l остается во время движения параллельным проводнику с током. 1) Найти ЭДС индукции в проводнике l при любом законе движения. 2) Каков должен быть закон движения проводника l, чтобы ЭДС индукции была постоянной величиной? 3) Вычислить ЭДС индукции в проводнике l при его равномерном движении со скоростью v = 2 м/с для момента времени t = 2 с от начала движения проводника. Известно, что ток I = 10 А, l = 1 м, начальное расстояние между проводниками x_0 = 0,01 м.

Ответ: 1) $\mathcal{E}_i = -\dfrac{\mu\mu_0 Ilv}{2\pi x}$; 2) $x = x_0 \exp\left(-\dfrac{2\pi\mathcal{E}_i t}{\mu\mu_0 Il}\right)$; 3) $|\mathcal{E}| = \dfrac{\mu\mu_0 Ilv}{2\pi(x_0 + vt)} = 10^{-6}$ В.

18.24. Металлический диск радиусом R = 1 м вращают с постоянной угловой скоростью ω = 100 рад/с вокруг его оси. Определить разность потенциалов $\Delta\varphi$ между осью и ободом диска, если имеется перпендикулярное к диску внешнее магнитное поле с индукцией B = 0,1 Тл.

Ответ: $\Delta\varphi = R^2B\omega/2$ = 5 В.

18.25. Магнитное поле изменяется во времени по закону $B = kt$, где k = 1 Тл/с. Какое количество теплоты Q выделится в рамке, имеющей форму квадрата со стороной a = 1 м, за время τ = 2 с? Провод рамки имеет сечение S = 1 мм^2, его удельное сопротивление $\rho = 2{,}9\cdot10^{-8}$ Ом·м. Плоскость рамки перпендикулярна к направлению поля. Самоиндукцией рамки пренебречь.

Ответ: $Q = \dfrac{k^2a^3S\tau}{4\rho} = 17{,}24$ Дж.

19. САМОИНДУКЦИЯ. ТОКИ ПРИ ЗАМЫКАНИИ И РАЗМЫКАНИИ. ВЗАИМНАЯ ИНДУКЦИЯ. ТРАНСФОРМАТОР

Основные формулы и обозначения

Фундаментальным законом явления электромагнитной индукции в катушке является закон Фарадея:

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \psi}{\partial t},$$

где $\psi = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i$ – полный магнитный поток (потокосцепление), охватывающий всю катушку индуктивности; N – число витков в катушке.

Поток вектора магнитной индукции

$$\psi = L \cdot I,$$

где L – коэффициент самоиндукции (индуктивность) контура с током I.

Для соленоида (тороида) с магнитным сердечником

$$L = \mu\mu_0 \left(\frac{N}{l}\right)^2 V \text{ или } L = \frac{\mu\mu_0 N^2 S}{l},$$

где μ – магнитная проницаемость сердечника; $V = Sl$ – объем соленоида; S – сечение соленоида; l – длина соленоида.

ЭДС самоиндукции при постоянной индуктивности L:

$$\mathcal{E}_{si} = -L\frac{dI}{dt}.$$

Экстраток размыкания: $I = I_0 e^{-(R/L)t} = I_0 e^{-t/\tau}$.

Экстраток замыкания: $I = I_0\left(1 - e^{-(R/L)t}\right) = I_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$,

где $I_0 = \mathcal{E}_0/R$ – установившееся значение тока в цепи; $\mathcal{E}_0$ – ЭДС источника питания; $\tau = L/R$ – постоянная времени установления тока (время релаксации).

Коэффициенты взаимной индукции двух катушек, намотанных на общий сердечник (L_1 и L_2 – индуктивность катушек):

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\mu\mu_0 N_1 N_2 V}{l^2}; \quad L_{12} = \sqrt{L_1 L_2}.$$

Величина напряжения во вторичной обмотке трансформатора в режиме холостого хода

$$U_2 = \frac{N_2}{N_1} U_1,$$

где N_2/N_1 – коэффициент трансформации.

Величина ЭДС во вторичной обмотке трансформатора $\mathcal{E}_2 = \dfrac{N_2}{N_1}\mathcal{E}_1$.

Задачи с решениями

Задача 1. Соленоид без сердечника содержит $N = 2000$ витков. Определить среднее значение ЭДС $\langle\mathcal{E}_{si}\rangle$ самоиндукции, возникающую в соленоиде при увеличении магнитного потока на 2 мВб, если изменение силы тока произошло за 0,5 с.

Дано:
$N = 2000$
$\Delta\Phi = 2\cdot10^{-3}$ Вб
$\Delta t = 0{,}5$ с

$\langle\mathcal{E}_{si}\rangle$ – ?

Решение: В задаче нет необходимости определять знак ЭДС самоиндукции, поэтому можно записать

$$\langle\mathcal{E}_{si}\rangle = \left|-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|.$$

Подставляя числовые значения N, $\Delta\Phi$, Δt, получим

$$\langle\mathcal{E}_{si}\rangle = 2000\cdot2\cdot10^{-3}/0{,}5 = 8 \text{ В}.$$

Ответ: $\langle\mathcal{E}_{si}\rangle = 8$ В.

Задача 2. Катушка индуктивностью $L = 2$ Гн и сопротивлением $R_1 = 20$ Ом и резистор сопротивлением $R_2 = 200$ Ом соединены параллельно и подключены к источнику, ЭДС которого $\mathcal{E} = 100$ В (рис. 19.1). Определить напряжение на концах катушки через $t = 0{,}01$ с после размыкания цепи.

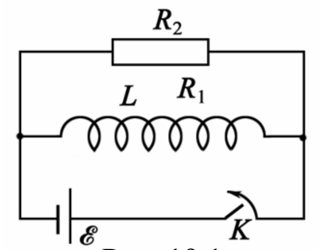


Рис. 19.1

Дано:
$L = 2$ Гн
$R_1 = 20$ Ом
$R_2 = 200$ Ом
$\mathcal{E} = 100$ В
$t = 0{,}01$ с

U – ?

Решение: Ток через катушку индуктивности перед размыканием $I_0 = \mathcal{E}/R_1$, экстраток размыкания $I = I_0 e^{-(R/L)t}$, где R – суммарное сопротивление контура после размыкания: $R = R_1 + R_2$.

Напряжение на концах катушки $U = IR_2$, или

$$U = \mathcal{E}\frac{R_2}{R_1}\exp\left(-\frac{R_1 + R_2}{L}\ t\right).$$

Подставляя численные значения, получаем

$$U = 100\cdot\frac{200}{20}\cdot\exp\left(-\frac{20+200}{2}\cdot0{,}01\right) = 1000\cdot\exp(-1{,}1) = 332{,}9 \text{ В}.$$

Ответ: 332,9 В.

Задача 3. Соленоид диаметром d = 5 см имеет однослойную обмотку из плотно прилегающих друг к другу витков медного провода диаметром d_1 = 0,5 мм. По соленоиду течет ток I_0 = 0,5 А. Определить количество электричества Q, протекающее по соленоиду, если его концы закоротить.

Дано:
$d = 5\cdot10^{-2}$ м
$\rho = 1{,}7\cdot10^{-8}$ Ом·м
$d_1 = 5\cdot10^{-4}$ м
$I_0 = 0{,}5$ А
Q – ?

Решение: Экстраток при замыкании концов соленоида: $I = I_0 e^{-(R/L)t}$.

Количество электричества Q, прошедшее по соленоиду при замыкании его концов, равно

$$Q = \int_0^\infty I dt = I_0 \int_0^\infty e^{-\frac{R}{L}t} dt = \frac{L}{R} I_0. \qquad (1)$$

Индуктивность соленоида $L = \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l} = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$, $\mu = 1$, т.к. соленоид не имеет сердечника. Так как длина l соленоида $l = Nd_1$ и площадь S поперечного сечения соленоида $S = \pi d^2/4$, то

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi d^2}{4Nd_1} = \frac{\mu_0 N \pi d^2}{4d_1}. \qquad (2)$$

Активное сопротивление катушки соленоида:

$$R = \rho\frac{l_1}{S_1}; \quad l_1 = \pi d \cdot N; \quad S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}; \quad R = \rho\frac{4Nd}{d_1^2}, \qquad (3)$$

где l_1 и S_1 – длина и сечение провода обмотки соленоида.

Подставляя (2) и (3) в (1), найдем искомую величину

$$Q = \frac{\mu_0 \pi d_1 d}{16\rho} I_0;$$

$$Q = \frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot\pi\cdot5\cdot10^{-4}\cdot5\cdot10^{-2}}{16\cdot1{,}7\cdot10^{-8}}\cdot0{,}5 = 1{,}81\cdot10^{-4} \text{ Кл} = 181 \text{ мкКл}.$$

Ответ: Q = 181,4 мкКл.

Задача 4. Две катушки намотаны на один общий сердечник. Определите их взаимную индуктивность, если при скорости изменения силы тока в первой катушке dI_1/dt = 6 А/с, во второй катушке индуцируется ЭДС $\mathcal{E}_{12}$ = 1,2 В.

Дано:
$dI_1/dt = 6$ А/с
$\mathcal{E}_{12} = 1{,}2$ В
L_{12} – ?

Решение: Так как катушки намотаны на один сердечник, то $L_{12} = L_{21}$. Магнитный поток $\Phi_{21} = L_{21}\cdot I_1$. Тогда

$$\mathcal{E}_{12} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -L_{21}\frac{dI_1}{dt}.$$

Отсюда $$|L_{21}| = \frac{\mathscr{E}_{12}}{dI_1/dt} = \frac{12}{6} = 0,2 \text{ Гн}.$$

Ответ: L_{12} = 0,2 Гн.

Задача 5. Соленоид с индуктивностью L = 0,2 Гн и сопротивлением $R = 5\cdot10^{-2}$ Ом замыкается на источник ЭДС $\mathscr{E}_0$ = 2 В, внутреннее сопротивление которого ничтожно мало. Какое количество электричества пройдет через соленоид за первые 5 с после замыкания?

Дано:	
L = 0,2 Гн	
R = 0,05 Ом	
$\mathscr{E}_0$ = 2 В	
t = 5 с	
Q – ?	

Решение: При замыкании соленоида на ЭДС $\mathscr{E}_0$ возникает меняющийся экстраток замыкания

$$I = I_0\left(1 - e^{-(R/L)t}\right),$$

где $I_0 = \mathscr{E}_0/R$ – установившееся значение тока в цепи.

Тогда элементарное количество электричества dQ, которое пройдет через соленоид за этот промежуток времени dt:

$$dQ = Idt = \frac{\mathscr{E}_0}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right)dt.$$

После интегрирования по времени, находим

$$Q = \frac{\mathscr{E}_0}{R}\int_0^t\left(1 - e^{-(R/L)t}\right)dt = \frac{\mathscr{E}_0}{R}\left[t + \frac{L}{R}\left(e^{-(R/L)t} - 1\right)\right];$$

$$Q = \frac{2}{0,05}\cdot\left[5 + \frac{0,2}{0,05}\cdot\left(e^{-(0,05/0,2)\cdot5} - 1\right)\right] = 85,84 \text{ Кл}.$$

Ответ: Q = 85,84 Кл.

Задача 6. Два соленоида (L_1 = 0,25 Гн, L_2 = 1 Гн) одинаковой длины и равных сечений вставлены один в другой. Определите взаимную индуктивность соленоидов.

Дано:	
L_1 = 0,25 Гн	
L_2 = 1 Гн	
$l_1 = l_2 = l$	
$S_1 = S_2 = S$	
$L_{12} = L_{21}$ – ?	

Решение: Коэффициент взаимной индукции двух соленоидов, вставленных один в другой:

$$L_{12} = L_{21} = \mu\mu_0\frac{N_1N_2V}{l^2},$$

где $V = Sl$ – объем соленоида; S и l – сечение и длина соленоида.

Так как сердечник отсутствует, то $\mu = 1$. Тогда

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\mu_0 N_1N_2S}{l}. \qquad (1)$$

Индуктивность соленоида без сердечника $L = \mu_0N^2S/l$.

Для первого соленоида: $L_1 = \mu_0 \dfrac{N_1^2 S_1}{l_1}$; $\quad N_1 = \sqrt{\dfrac{L_1 l_1}{\mu_0 S_1}}$.

Для второго: $L_2 = \mu_0 \dfrac{N_2^2 S_2}{l_2}$; $\quad N_2 = \sqrt{\dfrac{L_2 l_2}{\mu_0 S_2}}$.

Подставив полученные выражения для N_1 и N_2 в (1), получим, с учетом, что $S = S_1 = S_2$; $l = l_1 = l_2$,

$$L_{12} = L_{21} = \sqrt{L_1 L_2} = \sqrt{0{,}25 \cdot 1} = 0{,}5 \text{ Гн}.$$

Ответ: $L_{12} = L_{21} = 0{,}5$ Гн.

Задача 7. Определить индуктивность L соленоида, если при скорости изменения силы тока $\Delta I/\Delta t$ в соленоиде, равной 100 А/с, на его концах возникает ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{si} = 0{,}1$ В.

Дано:
$\Delta I/\Delta t = 100$ А/с
$\mathcal{E}_{si} = 0{,}1$ В
$L - ?$

Решение: Индуктивность соленоида связана с ЭДС самоиндукции и скоростью изменения силы тока в его обмотке соотношением $\mathcal{E}_{si} = -\dfrac{\Delta\psi}{\Delta t} = -\dfrac{\Delta(LI)}{\Delta t}$.

Вынося постоянную величину L за знак приращения, получим

$$\mathcal{E}_{si} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Отсюда $$|L| = \frac{\mathcal{E}_{si}}{\Delta I/\Delta t} = \frac{0{,}1}{100} = 10^{-3} \text{ Гн} = 1 \text{ мГн}.$$

Ответ: $L = 1$ мГн.

Задача 8. Определить, во сколько раз уменьшится сила тока в катушке индуктивностью $L = 0{,}2$ Гн и сопротивлением $R = 1{,}6$ Ом через $t = 50$ мс, если источник тока отключить и катушку замкнуть накоротко.

Дано:
$L = 0{,}2$ Гн
$R = 1{,}6$ Ом
$t = 0{,}05$ с
$I_0/I_1 - ?$

Решение: Изменение силы тока после замыкания концов катушки

$$I = I_0 e^{-(R/L)t},$$

где I_0 – сила тока в катушке в момент замыкания ($t = 0$); t – промежуток времени с момента замыкания.

Тогда $$\frac{I_0}{I} = \exp\left(\frac{R}{L}t\right).$$

Подставив числовые значения, получим $\dfrac{I_0}{I} = \exp\left(\dfrac{1{,}6}{0{,}2} \cdot 0{,}05\right) = 1{,}5.$

Ответ: Уменьшится в 1,5 раза.

Задача 9. Определите активное сопротивление катушки индуктивностью L = 0,5 Гн, если при ее подключении к источнику тока за время t = 5 с сила тока через катушку достигает 80 % предельного значения.

Дано:
L = 0,5 Гн
η = 0,8
t = 5 с
R – ?

Решение: Экстраток при подключении катушки к источнику тока равен $I(t) = I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$, где I_0 – предельное значение тока в катушке.

По условию задачи $I(t) = \eta I_0$, тогда

$$\eta I_0 = I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right),\ \eta = 1 - e^{-\frac{R}{L}t},\ 1 - \eta = e^{-\frac{R}{L}t}$$

Логарифмируем полученное выражение: $-\dfrac{R}{L}t = \ln(1-\eta)$, откуда

$$R = -\frac{L}{t}\ln(1-\eta) = -\frac{0,5}{5}\cdot\ln(1-0,8) = 0,161\ \text{Ом}.$$

Ответ: R = 161 мОм.

Задача 10. Сверхпроводящий соленоид длиной l = 20 см и площадью поперечного сечения S = 5 см^2, содержащий N = 500 витков, подключается к источнику ЭДС $\mathcal{E}$ = 9 В. Определить силу тока через время t = 0,01 с после замыкания ключа.

Дано:
l = 0,2 м
$S = 5{\cdot}10^{-4}$ м^2
N = 500
$\mathcal{E}$ = 9 В
t = 0,01 с
I – ?

Решение: Индуктивность соленоида $L = \mu\mu_0\dfrac{N^2S}{l}$.

Так как соленоид не имеет сердечника, то μ = 1. После подключения источника, по II правилу Кирхгофа

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_{si} = IR,$$

где $\mathcal{E}_{si}$ – ЭДС самоиндукции; IR – падение напряжения в соленоиде.

Так как соленоид сверхпроводимый, R = 0, тогда

$$\mathcal{E}_{si} = -\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt};\quad \mathcal{E} = L\frac{dI}{dt},\ \text{откуда}\ dI = \frac{\mathcal{E}}{L}dt.$$

Суммарный ток определяется интегрированием

$$I = \int_0^t \frac{\mathcal{E}}{L}dt = \frac{\mathcal{E}}{L}\int_0^t dt = \frac{\mathcal{E}}{L}t.$$

И окончательно получим

$$I = \frac{\mathcal{E}lt}{\mu_0 N^2 S} = \frac{9\cdot 0,2\cdot 1\cdot 10^{-2}}{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 500^2\cdot 5\cdot 10^{-4}} = 114,6\ \text{А}.$$

Ответ: I = 114,6 А.

Задача 11. Трансформатор с коэффициентом трансформации $K = 0{,}2$ понижает напряжение с $U_1 = 220$ до $U_2 = 9$ В. При этом сила тока во вторичной обмотке равна $I_2 = 5$ А. Пренебрегая потерями энергии в первичной обмотке, определить сопротивление R_2 вторичной обмотки трансформатора.

Дано:	
$K = 0{,}2$	
$U_1 = 220$ В	
$U_2 = 9$ В	
$I_2 = 5$ А	
$R_2 - ?$	

Решение: При малых потерях энергии в первичной обмотке трансформатора можно считать, что $\mathcal{E}_1 = U_1$.

Известно, что коэффициент трансформации K равен

$$K = \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{N_2}{N_1},$$

где N_1 и N_2 – числа витков в первичной и во вторичной обмотках, соответственно.

Откуда
$$\mathcal{E}_2 = \frac{N_2}{N_1}\mathcal{E}_1 = KU_1.$$

Но ЭДС вторичной обмотки $\mathcal{E}_2 = I_2R_2 + U_2$,
где R_2 – сопротивление вторичной обмотки; U_2 – напряжение, которое необходимо обеспечить потребителю; I_2 – ток во вторичной обмотке трансформатора.

Поэтому искомое значение R_2:

$$R_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - U_2}{I_2}, \text{ или } R_2 = \frac{KU_1 - U_2}{I_2}.$$

Подставляя числовые значения, получим $R_2 = \dfrac{0{,}2 \cdot 220 - 9}{5} = 7$ Ом.

Ответ: $R_2 = 7$ Ом.

Задача 12. Автотрансформатор, понижающий напряжение с $U_1 = 3$ кВ до $U_2 = 300$ В, содержит в первичной обмотке $N_1 = 1000$ витков. Сопротивление вторичной обмотки $R_2 = 1$ Ом. Сопротивление нагрузки $R = 10$ Ом. Пренебрегая сопротивлением первичной обмотки, определите число витков во вторичной обмотке трансформатора.

Дано:	
$U_1 = 3000$ В	
$U_2 = 300$ В	
$N_1 = 1000$	
$R_2 = 1$ Ом	
$R = 10$ Ом	
$N_2 - ?$	

Решение: Как и в предыдущей задаче, если мы пренебрегаем потерями напряжения в первичной обмотке, то $\mathcal{E}_1 = U_1$. Коэффициент трансформации $K = \dfrac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \dfrac{N_2}{N_1}$, откуда

$$N_2 = \frac{\mathcal{E}_2 N_1}{U_1}. \qquad (1)$$

ЭДС вторичной обмотки

$$\mathcal{E}_2 = I_2 R_2 + U_2. \tag{2}$$

Ток нагрузки

$$I_2 = U_2/R. \tag{3}$$

Решая систему уравнений (1) – (3) относительно N_2, найдем

$$N_2 = \frac{U_2}{U_1} N_1 \left(\frac{R_2}{R} + 1 \right) = \frac{300}{3000} \cdot 1000 \cdot \left(\frac{1}{10} + 1 \right) = 110 \text{ витков.}$$

Ответ: $N_2 = 110$ витков.

Задачи для самостоятельного решения

19.1. Определить среднюю ЭДС самоиндукции $\langle \mathcal{E}_{si} \rangle$, возникающую в катушке, индуктивность L которой равна 0,04 мГн, если при размыкании цепи сила тока изменяется от I = 0,8 А до нуля за время Δt = = 160 мкс.

Ответ: $\langle \mathcal{E}_{si} \rangle = LI/\Delta t = 0{,}2$ В.

19.2. Определить среднее значение ЭДС самоиндукции $\langle \mathcal{E}_{si} \rangle$, если средняя скорость $\Delta I/\Delta t$ изменения силы тока в катушке индуктивностью L = 0,02 Гн равна 0,2 А в 1 с.

Ответ: $\langle \mathcal{E}_{si} \rangle = L(\Delta I/\Delta t) = 4$ мВ.

19.3. Соленоид сопротивлением R_1 = 1 Ом и индуктивностью L = 3 мГн соединен параллельно с активным сопротивлением R_2 = 2 Ом, по которому течет постоянный ток I = 2 А. Определить количество электричества Q, которое пройдет по катушке при размыкании цепи питания контура.

Ответ: $Q = LI/(R_1 + R_2) = 2$ мКл.

19.4. Чему равна средняя ЭДС самоиндукции $\langle \mathcal{E}_{si} \rangle$, возникающая в соленоиде, содержащем N = 500 витков, площадь S сечения которого равна 20 см^2 и ток которого обеспечивает магнитное поле с индукцией B = 1 Тл, если ток уменьшается до нуля за время t = 1 мс.

Ответ: $\langle \mathcal{E}_{si} \rangle = NBS/t = 1$ кВ.

19.5. Определить коэффициент L_{21} взаимной индукции двух катушек, расположенных на небольшом расстоянии друг от друга, если известно, что при скорости изменения силы тока $\Delta I/\Delta t$ = 4 А/с в первой катушке, во второй катушке возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_2$ = 0,2 В.

Ответ: $L_{21} = \mathcal{E}_2 \Delta t/\Delta I = 50$ мГн.

19.6. На тороид с немагнитным сердечником намотаны две обмотки – первичная N_1 = 260 витков и вторичная N_2 = 120 витков. Средний радиус $\langle R\rangle$ тороида равен 100 мм, диаметр витков d равен 25 мм. Определить среднюю ЭДС $\langle \mathcal{E}_2\rangle$ индукции, возникающей во вторичной обмотке, если известно, что при подключении первичной обмотки к источнику питания в ней в течение t = 1 мс устанавливается ток силой I = 4 А.

Ответ: $\langle \mathcal{E}_2\rangle = \dfrac{\mu_0 N_1 N_2 I d^2}{8Rt} = 122{,}5$ мВ.

19.7. Определить среднюю ЭДС $\langle \mathcal{E}_i\rangle$ индукции в витке, надетом на соленоид длиной l = 400 мм и площадью поперечного сечения S = 60 см^2 и имеющий N = 350 витков, если при его выключении в течение времени t = 2 мс его ток меняется от I = 5 А до нуля.

Ответ: $\langle \mathcal{E}_i\rangle = \mu_0 NSI/(lt)$ = 16,5 мВ.

19.8. Какая средняя ЭДС $\langle \mathcal{E}_{si}\rangle$ самоиндукции появится в первые t = 18 мс при размыкании цепи соленоида индуктивностью L = 37,5 мГн и сопротивлением R = 12,3 Ом, если он был включен в сеть с напряжением U = 82,5 В?

Ответ: $\langle \mathcal{E}_{si}\rangle = LU/(Rt)$ = 14 В.

19.9. Соленоид сопротивлением R = 12 Ом и индуктивностью L = 0,5 Гн подключают к источнику тока. Определить, через сколько времени после замыкания сила тока достигнет η = 0,95 предельного значения?

Ответ: $t = -\dfrac{L}{R}\ln(1-\eta) = 0{,}125$ мс.

19.10. Соленоид индуктивностью L = 0,9 Гн подключают к источнику тока. Чему равно сопротивление соленоида R, если за время t = 2 с сила тока достигает η = 0,9 предельного значения?

Ответ: $R = -\dfrac{L}{t}\ln(1-\eta) = 1{,}0$ Ом.

19.11. Определите время релаксации ($\tau = L/R$) соленоида длиной l = = 400 мм, имеющего однослойную обмотку из алюминиевого провода массой m = 0,2 кг. Плотность алюминия $\rho_{\text{Al}} = 2{,}7\cdot10^3$ кг/м^3, удельное сопротивление алюминия $\rho = 26\cdot10^{-9}$ Ом·м.

Ответ: $\tau = 10^{-7} m/(\rho\rho_{\text{Al}} l)$ = 712 мкс.

19.12. Сопротивление цепи R = 30 Ом, индуктивность L = 0,30 Гн. Сила тока в цепи I_0 = 6 А.Определить силу тока I в этой цепи через t = 0,02 с, если цепь отключить от источника тока, не разрывая ее.

Ответ: $I = I_0 \exp\left(-\dfrac{R}{L}t\right) = 0{,}812$ А.

19.13. Катушка индуктивности содержит N = 800 витков. Сечение немагнитного сердечника S = 15 см^2. Определить среднее значение ЭДС $\langle \mathcal{E}_{si} \rangle$ самоиндукции, если ток, протекавший по обмотке и создававший магнитное поле с индукцией B = 2,0 Тл, уменьшится до нуля за время t = 200 мкс.

Ответ: $\langle \mathcal{E}_{si} \rangle = NBS/t$ = 12 кВ.

19.14. Соленоид с индуктивностью L = 5 Гн и сопротивлением R = = 150 Ом и резистор R_1 = 500 Ом присоединены параллельно к магистрали, в которой поддерживается напряжение U = 110 В. Какое напряжение U_1 будет на концах соленоида через t = 10^{-3} с после отключения контура от магистрали?

Ответ: $U_1 = U\dfrac{R_1}{R}\exp\left(-\dfrac{R+R_1}{L}t\right) = 322$ В.

19.15. В цепи, содержащей катушку индуктивности L = 0,2 Гн, шел ток силой I_0 = 60 А. Определить силу тока I в этой цепи через t = 0,02 с, если цепь отключить от источника, не разрывая ее. Сопротивление цепи R = 40 Ом.

Ответ: $I = I_0 e^{-(R/L)t}$ = 1,1 А.

19.16. Контур, состоящий из параллельно соединенных соленоида L = 0,4 Гн и активного сопротивления R_1 = 100 Ом, подключен к источнику $\mathcal{E}$ = 40 В. Определить силу тока I в резисторе R_1 в следующих трех случаях: 1) до отключения контура от источника; 2) в момент размыкания (t = 0); 3) через t = 0,01 с после размыкания. Активное сопротивление соленоида R_2 = 10 Ом, внутреннее сопротивление источника не учитывать.

Ответ: $I_1 = \mathcal{E}/R_1$ = 0,4 А; $I_2 = \mathcal{E}/R_2$ = 4 А;

$I_3 = I_2\exp\left(-\dfrac{R_1+R_2}{L}t\right) = 0{,}26$ А.

19.17. Катушка имеет сопротивление R = 20 Ом и индуктивность L = 0,288 Гн. Через сколько времени после включения в катушке потечет ток I, равный $0{,}5I_0$?

Ответ: $t = \dfrac{L}{R}\cdot\ln\eta = 0{,}01$ с, где $\eta = I_0/I$ = 2.

19.18. Две катушки намотаны на один общий сердечник. Какой ток I_2 потечет во второй катушке, сопротивление которой R = 800 Ом, если ток I_1 = 0,4 А, текущий в первой катушке, выключить в течение t = 10^{-3} с. Индуктивности первой и второй катушек L_1 = 0,4 Гн и L_2 = 0,9 Гн соответственно.

Ответ: $I_2 = \sqrt{L_1L_2}\ \Delta I_1/R\,\Delta t$ = 0,3 А.

19.19. Индуктивность соленоида $L = 0{,}29$ Гн и сопротивление $R = 2$ Ом. Во сколько раз изменится сила тока в катушке через $t = 0{,}1$ с, если отключить ЭДС, а соленоид замкнуть накоротко?

Ответ: $I_0/I = e^{(R/L)t} = 2$.

19.20. Первичная катушка трансформатора имеет $N_1 = 100$ витков. На тот же сердечник надеты четыре вторичные катушки с числами витков $N_2 = 50$, $N_3 = 100$, $N_4 = 300$, $N_5 = 2000$. Какое напряжение будет на концах каждой катушки, если на первичную подать $U_1 = 24$ В?

Ответ: $U_2 = N_2U_1/N_1 = 12$ В; $U_3 = N_3U_1/N_1 = 24$ В;
$U_4 = N_4U_1/N_1 = 72$ В; $U_5 = N_5U_1/N_1 = 480$ В.

19.21. Трансформатор, понижающий напряжение с $U_1 = 220$ до $U_2 = 24$ В, содержит в первичной обмотке $N_1 = 3000$ витков. Сопротивление вторичной обмотки $R_2 = 0{,}1$ Ом. Пренебрегая сопротивлением первичной обмотки, определите число витков N_2 во вторичной обмотке, если во внешнюю цепь передается мощность $P = 24$ Вт.

Ответ: $N_2 = (PR_2 + U_2^2)N_1/(U_1U_2) = 329$ витков.

19.22. Две катушки намотаны на один общий сердечник. Их взаимная индуктивность $L_{12} = 0{,}3$ Гн. Определить ЭДС $\mathcal{E}_{12}$ индукции во второй катушке, если скорость изменения силы тока в первой катушке $dI_1/dt = 5$ А/с.

Ответ: $\mathcal{E}_{12} = L_{12}dI_1/dt = 1{,}5$ В.

19.23. Соленоид диаметром $d = 3$ см имеет однослойную обмотку из плотно прилегающих друг к другу витков. Диаметр провода $d_1 = 0{,}3$ мм. По соленоиду течет ток 0,5 А. Определить удельное сопротивление провода, если количество электричества, протекающее по соленоиду после того, как его закоротили, составило $Q = 42{,}7$ мкКл.

Ответ: $\rho = \pi\,\mu_0 dd_1I_0/(16Q) = 26$ нОм·м.

19.24. Число витков тороида (без сердечника) $N = 785$ витков, средний диаметр $d = 10$ см, площадь поперечного сечения тороида $S = 20$ см^2. Чему равна ЭДС $\mathcal{E}_i$, возникающая в витке, охватывающем тороид, если скорость падения силы тока составляет $dI/dt = 20$ А/с.

Ответ: $\mathcal{E}_i = \mu_0\,N_1N_2S(dI/dt)/(\pi d^2/4) \cong 1{,}3\cdot10^{-4}$ В.

19.25. Тороид с ферромагнитным сердечником длиной $l = 75$ см и площадью поперечного сечения $S = 16$ см^2 содержит две обмотки: $N_1 = 750$ витков и $N_2 = 2000$ витков. Определить магнитную проницаемость μ материала сердечника, если известно, что при переключении в первичной обмотке направления тока силой $I = 0{,}5$ А на обратный в цепи вторичной обмотки сопротивлением $R = 40$ Ом прошел заряд $Q = 0{,}12$ Кл.

Ответ: $\mu = QRl/(2\mu_0\,N_1N_2SI) = 1200$.

20. УСКОРИТЕЛИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Основные формулы и обозначения

Максимальная кинетическая энергия K, приобретаемая частицей при прохождении ускоряющего зазора в линейных и циклических ускорителях

$$K = ZeU_m,$$

где U_m – амплитудное значение ускоряющего напряжения в зазоре; Z – число элементарных зарядов e в заряде q ускоряемой частицы.

В циклотронах заряженная частица с зарядом q и массой m ускоряется до скоростей, при которых релятивистский эффект увеличения массы частицы практически не проявляется.

Период обращения частицы (T = const)

$$T = \frac{2\pi m}{qB},$$

где q/m – удельный заряд частицы; B – индукция магнитного поля.

Радиус окружности траектории частицы

$$R = \frac{mv}{qB}.$$

В фазотронах, микротронах и синхрофазотронах частицы ускоряются до релятивистских скоростей.

Масса частицы m зависит от ее скорости v

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

где m_0 – масса покоя частицы; $\beta = v/c$ – отношение скорости частицы v к скорости света c в вакууме.

Кинетическая энергия частицы

$$K = W - W_0,$$

где $W = mc^2$ – полная энергия частицы; $W_0 = m_0c^2$ – энергия покоя частицы.

Импульс релятивистской частицы

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{K\left(K + 2m_0c^2\right)}.$$

Период обращения релятивистской частицы

$$T = \frac{2\pi m_0}{qB\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2\pi W}{qBc^2}.$$

Радиус окружности траектории релятивистской частицы

$$R = \frac{m_0 v}{qB\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

В *бетатронах* во время движения электрона в магнитном поле он непрерывно подвергается воздействию электрического вихревого поля. За каждый оборот по орбите радиуса r_0 электрон получает приращение кинетической энергии ΔK, определяемое напряженностью $\mathbf{E}$ электрического вихревого поля

$$\Delta K = e\oint_L (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = e\oint_L E\, dl.$$

Циркуляция вектора напряженности $\mathbf{E}$ электрического вихревого поля по контуру L равна ЭДС $\mathcal{E}$ электромагнитной индукции

$$\oint_L (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Модуль напряженности E электрического вихревого поля бетатрона в точках круговой орбиты радиуса r_0 равен

$$E = \frac{r_0}{2}\frac{d\langle B\rangle}{dt},$$

где $\langle B\rangle$ – среднее значение индукции магнитного поля в пределах площади круга, очерченного орбитой электрона в момент времени t.

$$\langle B\rangle = \frac{\Phi}{\pi r_0^2},$$

где Φ – поток магнитной индукции, пронизывающий область в пределах площади S орбиты электрона в момент времени t.

Бетатронное условие

$$\frac{d\langle B\rangle}{dt} = 2\frac{dB}{dt},$$

где dB/dt – скорость изменения индукции управляющего магнитного поля, при которой движение электрона будет происходить по орбите постоянного радиуса.

Скорость изменения среднего значения индукции $\langle B\rangle$ магнитного поля в области охваченной орбитой электрона радиусом r_0, в два раза выше скорости изменения индукции B на самой орбите, т.е.

$$\langle B\rangle = 2B.$$

Задачи с решениями

Задача 1. Современные линейные электростатические высоковольтные ускорители позволяют получать протоны с кинетической энергией до K_m = 10 МэВ без перезарядки. Определите максимальную ускоряющую разность потенциалов, пройденную протонами.

Дано:
K_m = 10 МэВ = $1{,}6\cdot10^{-12}$ Дж
$Z = 1$
$e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл

$|\Delta\varphi|$ – ?

Решение: Работа A сил электрического поля ускорителя $A = Ze|\Delta\varphi|$ приводит к увеличению кинетической энергии протона от K_0 до K_m. Так как $K_0 \approx 0$, то $A = K_m$. Таким образом,

$$|\Delta\varphi| = K_m/(Ze) = 1{,}6\cdot10^{-12}/1{,}6\cdot10^{-19} = 1\cdot10^{7}\ \text{В}.$$

Ответ: $|\Delta\varphi|$ = 10 МВ.

Примечание: Энергию, выраженную в МэВ, можно не переводить в единицы СИ: $|\Delta\varphi| = K_m/(Ze)$ =10 МэВ/1e = 10МВ.

Задача 2. Линейный ускоритель состоит из N = 30 трубок дрейфа, установленных по оси стеклянной вакуумной камеры (рис. 20.1). Ускоряющая система ускорителя питается от генератора с амплитудным выходным напряжением U_m = 42 кВ, работающего в диапазоне коротких длин волн, λ_0 = 30 м. Пренебрегая величиной зазоров между трубками, определите для ионов ртути Hg^{+}_{200}: 1) максимальную кинетическую энергию K_m ускоренных в линейном ускорителе ионов Hg^{+}_{200}; 2) длину первой и последней (30-й) трубки; 3) длину всех трубок (длину ускорителя).

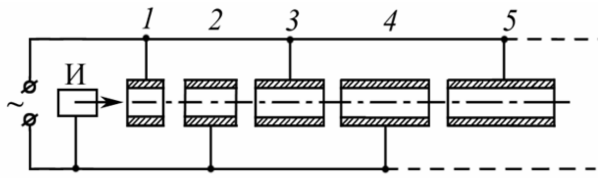


Рис. 20.1. Схематическое изображение резонансного линейного ускорителя: *И* – ионный источник; *1 – 5* – трубки дрейфа

Дано:
$N = 30$
$U_m = 4{,}2\cdot10^{4}$ В
$\lambda_0 = 30$ м
μ_{Hg} = 0,2 кг/моль
$q = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл

K_m – ? l_1 – ? l_{30} – ? L – ?

Решение: 1) Максимальная кинетическая энергия, приобретенная ионом в ускорителе, прямо пропорциональна числу трубок N дрейфа и приращению энергии ΔK иона после прохождения каждого зазора

$$K_m = N\Delta K.$$

Энергия, приобретаемая ионом после прохождения ускоряющего зазора,

$$\Delta K = qU_m, \tag{1}$$

где q – заряд иона ртути; U_m – амплитуда ускоряющего напряжения. Таким образом,

$$K_m = NqU_m = 30\cdot 1\cdot 42 = 1260 \text{ кэВ} = 1{,}26 \text{ МэВ}.$$

2) Определим длину n-го элемента линейного ускорителя

$$l_n = \upsilon_n T_0/2,$$

где υ_n – скорость иона в n-й трубке дрейфа; $T_0 = \lambda_0/c$ – период колебаний ускоряющего напряжения генератора; c – скорость света в вакууме.

Тогда длина n-го элемента линейного ускорителя

$$l_n = \frac{\upsilon_n}{2}\frac{\lambda_0}{c}. \qquad (2)$$

Выразив скорость υ_n иона в n-й трубке дрейфа через кинетическую энергию $K_n = n\Delta K$ и массу m_0 покоя иона ртути ($\upsilon_n \ll c$), получим

$$\upsilon_n = \sqrt{2K_n/m_0}. \qquad (3)$$

Массу иона ртути определим из соотношения

$$m_0 = \mu_{\text{Hg}}/N_{\text{A}}, \qquad (4)$$

где μ_{Hg} – молярная масса ртути; N_{A} – число Авогадро.

Решая систему (1) – (4) относительно l_n, получим

$$l_n = \frac{\lambda_0}{2c}\sqrt{2K_n/m_0} = \frac{\lambda_0}{2c}\sqrt{2n\Delta K/m_0} = \frac{\lambda_0}{2c}\sqrt{2nqU_mN_{\text{A}}/\mu_{\text{Hg}}},$$

или

$$l_n = l_1\sqrt{n}, \text{ где } l_1 = \frac{\lambda_0}{2c}\sqrt{2qU_mN_{\text{A}}/\mu_{\text{Hg}}}. \qquad (5)$$

Подставляя числовые значения, найдем длину 1-го элемента линейного ускорителя

$$l_1 = \frac{30}{2\cdot 3\cdot 10^8}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 4{,}2\cdot 10^4\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}}{0{,}2}} \approx 10^{-2} \text{ м} = 1 \text{ см}$$

и длину 30-го элемента

$$l_{30} = 1\cdot\sqrt{30} \approx 5{,}5 \text{ см}.$$

3) Определим длину L ускорителя. Из уравнения (5) имеем, что длина n-го элемента с увеличением скорости увеличивается в $\sqrt{n}$ раз, т.е. $l_n = l_1\sqrt{n}$, следовательно, длина L ускорителя

$$L = \sum_{n=0}^{N} l_n = l_1\sum_{n=0}^{N}\sqrt{n} \approx l_1\int_0^N n^{1/2}\,dn.$$

При $N = 30$, $l_1 = 10^{-2}$ м

$$L \approx \frac{2}{3}l_1 n^{3/2}\Big|_0^N = \frac{2l_1}{3}N^{3/2} = \frac{2\cdot 10^{-2}}{3}\cdot 30^{3/2} \approx 1{,}1 \text{ м}.$$

Ответ: $K_m = 1{,}26$ МэВ; $l_1 = 1$ см, $l_{30} = 5{,}5$ см, $L = 1{,}1$ м.

Задача 3. Циклотрон состоит из дуантов, внутри которых магнитное поле направлено перпендикулярно их основаниям (рис. 20.2.1). В зазоре между дуантами действует переменное электрическое поле, напряжение которого изменяется по закону $U = U_m \cos\omega_0 t$, где $U_m = 15$ кВ. 1) Сколько полных оборотов N должен совершить протон внутри циклотрона, чтобы приобрести кинетическую энергию $K = 6$ МэВ? 2) Чему должна быть равна циклическая частота ω_0, если циклотрон используется для ускорения протонов, а индукция магнитного поля $B = 0{,}5$ Тл?

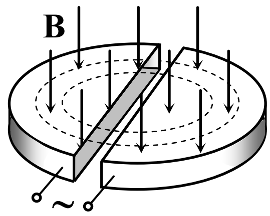


Рис. 20.2.1

Дано:
$U_m = 1{,}5\cdot10^4$ В
$K = 9{,}6\cdot10^{-13}$ Дж
$B = 0{,}5$ Тл
$m_0 = 1{,}67\cdot10^{-27}$ кг
$q = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл

N – ? ω_0 – ?

Решение: В циклотроне заряженная частица многократно проходит ускоряющее электрическое поле, локализованное между дуантами.

В резонансных ускорителях должно выполняться условие синхронизма, т.е. $T_0 = T$, где T_0 – период колебаний электрического поля; T – период обращения частицы в магнитном поле.

1) За один оборот частица, пройдя дважды ускоряющие зазоры дуантов, приобретает кинетическую энергию

$$\Delta K = 2qU_m,$$

где q – заряд частицы; U_m – амплитуда ускоряющего напряжения.

За N оборотов частица приобретает кинетическую энергию

$$K = N\Delta K = 2NqU_m.$$

Таким образом, полное число оборотов:

$$N = \frac{K}{2qU_m} = \frac{9{,}6\cdot10^{-13}}{2\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\cdot1{,}5\cdot10^4} = 200.$$

2) Внутри дуанта протон движется под действием магнитного поля по дуге полуокружности радиуса R. На частицу действует сила Лоренца (рис. 20.2.2):

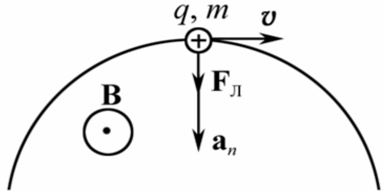


Рис. 20.2.2

$$\mathbf{F}_Л = q\,[\boldsymbol{\upsilon}\times\mathbf{B}]; \quad F_Л = q\upsilon B. \qquad (1)$$

По второму закону Ньютона

$$\mathbf{F}_Л = m_0\,\mathbf{a}_n; \quad F_Л = m_0\,a_n, \qquad (2)$$

где $a_n = \upsilon^2/R$ – нормальное ускорение.

Решая систему (1) – (2) относительно R, получим $R = \dfrac{m_0\upsilon}{qB}$.

Радиус траектории R частицы в однородном магнитном поле с увеличением скорости υ возрастает. Период T вращения протона по орбите

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m_0}{qB}. \qquad (3)$$

Анализ формулы (3) показывает, что период обращения частицы в циклотроне ($v < c$) практически не зависит от её скорости и радиуса движения, т.е. T = const, и, следовательно, направление электрического поля надо изменять с постоянной частотой

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m_0}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$\omega_0 = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}5}{1{,}67 \cdot 10^{-27}} = 4{,}8 \cdot 10^7 \text{ рад/с}.$$

Ответ: $N = 200$; $\omega_0 = 4{,}8 \cdot 10^7$ рад/с.

Задача 4. Однократно ионизованный ион гелия He^+ ускоряется в циклотроне так, что максимальный радиус кривизны его траектории R = 0,5 м. Определите кинетическую энергию K ионов гелия в конце ускорения, если индукция магнитного поля внутри циклотрона B = 1 Тл.

Дано:
$R = 0{,}5$ м
$B = 1$ Тл
$m_0 = 6{,}64 \cdot 10^{-27}$ кг
$q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
K – ?

Решение: Кинетическая энергия иона He^+ ($K \ll m_0 c^2$)

$$K = m_0 v^2/2; \qquad (1)$$

радиус кривизны траектории частицы в циклотроне

$$R = m_0 v/(qB). \qquad (2)$$

Решая систему (1), (2), получим искомое выражение в алгебраическом виде

$$K = (qBR)^2/(2m_0).$$

Анализ полученной зависимости показывает, что для увеличения энергии заряженных частиц в циклотроне необходимо повышать индукцию магнитного поля и увеличивать радиус полюсов электромагнита.

Вычисляя, получим

$$K = \frac{\left(1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 0{,}5\right)^2}{2 \cdot 6{,}64 \cdot 10^{-27}} = 4{,}83 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} = 3{,}0 \text{ МэВ}.$$

Ответ: K = 3,0 МэВ.

Задача 5. Найти амплитудное значение U_0 ускоряющего напряжения на дуантах циклотрона, при котором расстояние между соседними траекториями протонов с радиусом R = 0,6 м равно ΔR = 1 см. Частота генератора циклотрона ν = 10 МГц.

Дано:	
$R = 0{,}6$ м	
$\Delta R = 10^{-2}$ м	
$\nu = 10^7$ Гц	
$m_0 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг	
$q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл	
U_0 – ?	

Решение: Запишем скорость υ_1 протонов на траектории радиусом кривизны $R_1 = R$

$$\upsilon_1 = 2\pi R\nu, \tag{1}$$

и скорость υ_2 протонов на траектории радиусом кривизны $R_2 = R + \Delta R$

$$\upsilon_2 = 2\pi(R + \Delta R)\nu. \tag{2}$$

Кинетическая энергия ΔK, которую получает протон за один период,

$$\Delta K = 2qU_0 = \frac{m_0\upsilon_2^2}{2} - \frac{m_0\upsilon_1^2}{2}. \tag{3}$$

Решая систему (1) – (3) относительно U_0, получим

$$U_0 = \frac{\pi^2\nu^2 m_0\left(2R\Delta R + \Delta R^2\right)}{q}. \tag{4}$$

Учитывая, что $\Delta R << R$, выражение (4) можно упростить:

$$U_0 \approx \frac{2\pi^2\nu^2 m_0 R\Delta R}{q}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$U_0 = \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot 10^{14} \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}01 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 1{,}2 \cdot 10^5 \text{ В} = 0{,}12 \text{ МВ}.$$

Ответ: $U_0 = 0{,}12$ МВ.

Задача 6. В фазотроне, чтобы не возникала расстройка в процессе ускорения частицы, связанная с изменением периода её обращения при возрастании энергии, медленно изменяют частоту ускоряющего поля. По какому закону $\omega(t)$ необходимо изменять частоту ускоряющего поля фазотрона, если магнитная индукция поля равна B, а средняя энергия, получаемая частицей за один оборот, ΔW?

Решение: В фазотроне частицы ускоряются до скоростей, близких к скорости света c, следовательно, необходимо учитывать релятивистские эффекты. Период обращения частицы по орбите зависит от скорости υ ее движения

$$T = \frac{2\pi m_0}{qB\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}, \tag{1}$$

где m_0 – масса покоя частицы; q – заряд частицы.

Полная энергия движущейся частицы

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}. \tag{2}$$

Из уравнений (2) и (1), получим $W = \dfrac{qBc^2T}{2\pi}$.

Учитывая, что циклическая частота $\omega = 2\pi/T$, получим зависимость полной энергии W от частоты ω ускоряющего поля $W(\omega)$

$$W = \frac{qBc^2}{\omega}. \tag{3}$$

Чтобы найти зависимость $\omega(t)$, продифференцируем выражение (3)

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{qBc^2}{\omega}\right) = -\frac{qBc^2}{\omega^2}\frac{d\omega}{dt}. \tag{4}$$

Учитывая, что скорость изменения энергии равна приращению энергии ΔW за один период T, получим

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\Delta W}{T} = \frac{\Delta W\omega}{2\pi}. \tag{5}$$

Из равенства правых частей выражений (4) и (5), имеем

$$-\frac{qBc^2}{\omega^2}\frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega\Delta W}{2\pi}, \text{ откуда } \frac{d\omega}{\omega^3} = -\frac{\Delta W}{2\pi qBc^2}dt.$$

Интегрируя, получаем

$$\int\limits_{\omega_0}^{\omega}\frac{d\omega}{\omega^3} = -\int\limits_0^t\frac{\Delta W}{2\pi qBc^2}dt; \qquad \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{\Delta W}{\pi qBc^2}t. \tag{6}$$

Из уравнения (6) выразим ω, учитывая, что $\omega_0 = qB/m_0$,

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{\Delta W}{\pi qBc^2}t + \frac{1}{\omega_0^2}; \quad \omega(t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+\left[\Delta WqB/\left(\pi m_0^2c^2\right)\right]t}}.$$

Таким образом, $\omega(t) = \omega_0\Big/\sqrt{1+at}$,

где $\omega_0 = qB/m_0$; $a = \Delta WqB/(\pi m_0^2c^2)$.

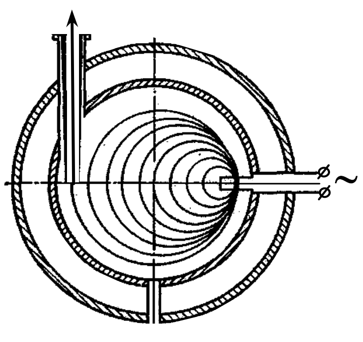


Рис. 20.3

Задача 7. Для ускорения электронов используется микротрон (рис. 20.3). В микротроне, чтобы не возникала расстройка в процессе ускорения частицы, связанная с изменением периода ΔT ее обращения при возрастании энергии, изменение периода ΔT делают кратным периоду ускоряющего электрического поля T_0. Сколько раз электрону необходимо пройти через ускоряющее напряжение микротрона, чтобы приобрести энергию W = 4,6 МэВ, если $\Delta T = T_0$, индукция магнитного поля B = 0,107 Тл, а длина волны ускоряющего поля генератора в вакууме λ_0 = 0,1 м?

Дано:	**Решение:** В микротроне электроны ускоряются до скоростей, соизмеримых со скоростью света, следовательно, период обращения электрона по орбите зависит от скорости движения v электрона
$W = 7{,}36 \cdot 10^{-13}$ Дж $\lambda_0 = 0{,}1$ м $B = 0{,}107$ Тл $c = 3 \cdot 10^8$ м/с $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл	$$T = \frac{2\pi m_0}{eB\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad (1)$$
N – ?	где m_0 – масса покоя электрона.

Учитываем, что полная энергия W движущегося электрона

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (2)$$

По теории относительности полная энергия электрона

$$W = K + m_0 c^2.$$

Пренебрегая энергией покоя электрона ($m_0 c^2$ = 0,51 МэВ), имеем $W \approx K$, где K – кинетическая энергия электрона.

Решая систему (1), (2) относительно T, получим

$$T = \frac{2\pi W}{eBc^2}.$$

Так как e, B и c – величины постоянные, следовательно, изменение периода ΔT обращения электрона прямо пропорционально приращению полной энергии ΔW электрона при прохождении ускоряющего зазора

$$\Delta T = \frac{2\pi \Delta W}{eBc^2}.$$

Полная энергия W, приобретенная электроном за N оборотов, $W = N \cdot \Delta W$, следовательно,

$$N \Delta T = \frac{2\pi W}{eBc^2} \qquad (3)$$

Учитывая, что $\Delta T = T_0$, а период T_0 ускоряющего электрического поля $T_0 = \lambda_0 / c$, из (3) получим

$$N = \frac{2\pi W}{eBc\lambda_0} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 7{,}36 \cdot 10^{-13}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}107 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 0{,}1} = 9.$$

Ответ: $N = 9$.

Задача 8. Кинетическая энергия K протонов в Серпуховском синхрофазотроне достигает 76 ГэВ. Вычислите, пренебрегая действием вихревого электрического поля, максимальный импульс протона и максимальный радиус его орбиты, если индукция магнитного поля B в синхрофазотроне равна 1,07 Тл.

Дано:	
$K = 1{,}22 \cdot 10^{-8}$ Дж $m_0 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг $m_0c^2 = 1{,}57 \cdot 10^{-10}$ Дж $B = 1{,}07$ Тл $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл	
p – ? R_{max} – ?	

Решение: Кинетическая энергия K протона больше энергии покоя $W_0 = m_0c^2$, следовательно, необходимо учитывать релятивистские эффекты.

Из соотношения между энергией и импульсом частицы

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{c}\sqrt{W^2 - W_0^2},$$

где W – полная энергия протона, учитывая, что кинетическая энергия протона $K = W - W_0$, получим $p = \frac{1}{c}\sqrt{K\left(K + 2m_0c^2\right)}$.

Если учесть, что $K >> m_0c^2$, то импульс протона $p \approx K/c$.

Подставив числовые значения, определим

$$p = 1{,}22 \cdot 10^{-8}/3 \cdot 10^8 = 4{,}07 \cdot 10^{-17} \text{ кг·м/с}.$$

Максимальный радиус орбиты протона

$$R_{max} = \frac{mv_{max}}{qB} = \frac{p_{max}}{qB} = \frac{\sqrt{K(K + 2m_0c^2)}}{qBc} \approx \frac{K}{qBc}.$$

$$R_{max} = 1{,}22 \cdot 10^{-8}/(1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}07 \cdot 3 \cdot 10^8) \approx 237 \text{ м}.$$

Ответ: $p = 4{,}07 \cdot 10^{-17}$ кг·м/с; $R_{max} \approx 237$ м.

Примечание. Создание сплошного электромагнита с диаметром около полукилометра представляет трудновыполнимую задачу. Поэтому в синхрофазотроне частицы движутся по окружности практически постоянного радиуса в узкой кольцевой вакуумной камере.

Задача 9. В бетатроне индукция магнитного поля B внутри равновесной орбиты радиуса $r_0 = 25$ см возрастает за время ускорения электрона практически с постоянной скоростью $dB/dt = 25{,}5$ Тл/с $\approx$ const. При этом электроны приобретают кинетическую энергию $K = 25$ МэВ. Найти число оборотов N, совершаемых электроном за время ускорения, и соответствующее значение пройденного им пути l.

Дано:	
$K = 4 \cdot 10^{-12}$ Дж $r_0 = 0{,}25$ м $dB/dt = 25{,}5$ Тл/с $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл	
N – ? l – ?	

Решение: Ускорение электронов в бетатроне осуществляется вихревым электрическим полем в нарастающем во времени магнитном поле.

Тангенциальная составляющая вихревого электрического поля E_τ равна модулю напряженности вихревого электрического поля на равновесной орбите $E_\tau = E$.

Работа A сил электрического вихревого поля приводит к увеличению кинетической энергии ΔK электрона за время одного оборота

$$A = \Delta K. \qquad (1)$$

Работа сил электрического вихревого поля:

$$A = e\mathcal{E}. \tag{2}$$

Здесь $\mathcal{E}$ – ЭДС индукции, определяемая по закону Фарадея

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \tag{3}$$

где Ф – поток магнитной индукции, пронизывающий область в пределах площади круга ($S = \pi r_0^2$), где r_0 – радиус орбиты электрона.

$$\Phi = \pi r_0^2 \langle B \rangle. \tag{4}$$

Уравнение (3) примет вид

$$\mathcal{E} = -\pi r_0^2 \frac{d\langle B \rangle}{dt}, \tag{5}$$

где $\langle B \rangle$ – среднее значение индукции магнитного поля в пределах площади круга πr_0^2, очерченного орбитой электрона в момент времени t.

$$\langle B \rangle = \frac{\Phi}{\pi r_0^2}.$$

Учитывая бетатронное условие $\langle B \rangle = 2B$, формулу (5) можно записать

$$\mathcal{E} = -2\pi r_0^2 \frac{dB}{dt}. \tag{6}$$

Решая систему уравнений (1), (2) и (6), получим, что энергия, приобретаемая электроном за один период,

$$\Delta K = -2e\pi r_0^2 \frac{dB}{dt} = 2|e|\pi r_0^2 \frac{dB}{dt}.$$

Полная энергия, приобретаемая электроном за N оборотов,

$$K = N \cdot \Delta K.$$

Таким образом, число оборотов электрона за время ускорения до энергии K

$$N = \frac{K}{2|e|\pi r_0^2 (dB/dt)} = \frac{4 \cdot 10^{-12}}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot \pi \cdot 0{,}25^2 \cdot 25{,}5} = 2{,}5 \cdot 10^6.$$

Электроны вращаются по орбите постоянного радиуса r_0, следовательно, путь l, пройденный электроном,

$$l = 2\pi r_0 N = 2 \cdot \pi \cdot 0{,}25 \cdot 2{,}5 \cdot 10^6 = 3{,}93 \cdot 10^6 \text{ м}.$$

Ответ: $N = 2{,}5 \cdot 10^6$ оборотов, $l = 3{,}93 \cdot 10^6$ м.

Задача 10. Радиус r_0 орбиты ускоряемых электронов в бетатроне равен 37,5 см. Определить напряженность E вихревого электрического поля на орбите электрона и силу F, действующую на электрон, если средняя скорость изменения среднего значения индукции магнитного поля в пределах круга, очерченного орбитой электрона, $d\langle B\rangle/dt$ в бетатроне равна 80 Тл/с.

Дано:	
$r_0 = 0{,}375$ м $d\langle B\rangle/dt = 80$ Тл/с $\lvert e\rvert = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл	**Решение:** Во время движения электрона в магнитном поле бетатрона он непрерывно подвергается воздействию электрического вихревого поля. Циркуляция вектора напряженности **E** электрического вихревого поля по контуру L равна ЭДС электромагнитной индукции $\mathcal{E}$
$E - ?\ \ F - ?$	

$$\oint_L Edl = \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \qquad (1)$$

где Φ – поток магнитной индукции, пронизывающий площадь круга радиусом r_0, очерченного орбитой электрона.

$$\Phi = \pi r_0^2\langle B\rangle. \qquad (2)$$

Проинтегрировав (1) по замкнутой орбите электрона, получим

$$\oint_L Edl = E\int_0^{2\pi r_0} dl = 2\pi r_0 E, \text{ тогда } E = \frac{1}{2\pi r_0}\left|-\frac{d\Phi}{dt}\right|. \qquad (3)$$

Дифференцируя (2) $\dfrac{d\Phi}{dt} = \pi r_0^2\dfrac{d\langle B\rangle}{dt}$ и подставляя в (3), получим

$$E = \frac{r_0}{2}\frac{d\langle B\rangle}{dt}$$

Модуль напряженности E электрического вихревого поля бетатрона в точках круговой орбиты электрона $E = \dfrac{0{,}375\cdot 80}{2} = 15$ В/м.

Сила F, действующая на электрон, равна

$$F = |e|E = 1{,}6\cdot10^{-19}\cdot15 = 2{,}4\cdot10^{-18}\text{ Н.}$$

Ответ: $E = 15$ В/м, $F = 2{,}4\cdot10^{-18}$ Н.

Задача 11. Электрон в бетатроне за один оборот приобретает кинетическую энергию $\Delta K = 15$ эВ, двигаясь по орбите радиусом $r_0 = 0{,}3$ м. Вычислить скорость изменения среднего значения магнитной индукции $d\langle B\rangle/dt$, считая эту скорость в течение интересующего нас промежутка времени постоянной.

Дано:	
$r_0 = 0{,}3$ м $\Delta K = 2{,}4\cdot10^{-18}$ Дж $e = -1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл	**Решение:** Ускорение электронов в бетатроне осуществляется вихревым электрическим полем в нарастающем во времени магнитном поле. Электрон в бетатроне за один оборот приобретает кинетическую энергию ΔK, равную работе A сил электрического вихревого поля $\Delta K = A$
$d\langle B\rangle/dt - ?$	

$$\Delta K = e\oint_L E\,dl = 2\pi r_0 eE = e\mathscr{E}, \text{ или } \mathscr{E} = \Delta K/e. \tag{1}$$

Здесь $\mathscr{E}$ – ЭДС индукции, определяемая по закону Фарадея

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi r_0^2 \frac{d\langle B\rangle}{dt}, \tag{2}$$

где $\Phi = \pi r_0^2\langle B\rangle$ – поток магнитной индукции, пронизывающий область в пределах площади $S = \pi r_0^2$ орбиты электрона в момент времени t.

Приравнивая левые части выражений (1) и (2), получим

$$\frac{d\langle B\rangle}{dt} = -\frac{\Delta K}{e\pi r_0^2} = -\frac{2{,}4\cdot 10^{-18}}{-1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot \pi\cdot 0{,}3^2} = 53{,}1 \text{ Тл/с.}$$

Ответ: $d\langle B\rangle/dt = 53{,}1$ Тл/с.

Задача 12. Одна из возможностей значительного увеличения энергии соударяющихся частиц заключается в использовании встречных пучков этих частиц. Какую кинетическую энергию следовало бы сообщить протону, налетающему на покоящийся протон, чтобы их суммарная кинетическая энергия $K_{экв}$ в системе центра инерции была бы такой же, как у двух протонов, движущихся навстречу друг другу с кинетическими энергиями K_1 = 10 ГэВ?

Дано:
K_1 = 10 ГэВ
W_0 = 0,938 ГэВ
$K_{экв}$ – ?

Решение: Если осуществить столкновение встречных пучков частиц, то эффект будет такой же, как при столкновении с неподвижным протоном с эквивалентной энергией $K_{экв}$.

По теории относительности связь полной энергии W с импульсом релятивистской частицы:

$$W^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4, \tag{1}$$

учитывая, что масса покоя частицы m_0 и скорость света c в вакууме не зависят от выбора инерциальной системы отсчета, следовательно, (1) можно записать:

$$\frac{W^2}{c^2} - p^2 = m_0^2c^2 = \text{inv}, \tag{2}$$

т.е. разность квадрата полной энергии W, деленной на квадрат скорости света c в вакууме, и квадрата импульса этой частицы не зависят от выбора инерциальной системы отсчета.

Учитывая, что полная энергия W равна сумме кинетической энергии K и энергии покоя W_0 частицы $W = K + W_0$, уравнение (2) в системе отсчета, связанной с центром инерции протонов, запишется

$$\frac{(K_{экв} + 2W_0)^2}{c^2} - p^2 = \frac{\left[2(K_1 + W_0)\right]^2}{c^2}, \tag{3}$$

где p – релятивистский импульс протона, налетающего на неподвижный протон

$$p^2 = \frac{K_{экв}(K_{экв} + 2W_0)}{c^2}. \qquad (4)$$

Подставив правую часть (4) в (3), после преобразований получим

$$K_{экв} = \frac{2K_1(K_1 + 2W_0)}{W_0} = \frac{2 \cdot 10\ (10 + 2 \cdot 0{,}938)}{0{,}938} = 253 \text{ ГэВ}.$$

Таким образом, способом встречных пучков теоретически можно получить энергию, в 25 раз превышающую кинетическую энергию движущихся протонов.

Ответ: $K_{экв}$ = 253 ГэВ.

Задачи для самостоятельного решения

20.1. Пусть пролетные трубки в линейном ускорителе (рис. 20.4) имеют одинаковую длину l = 6 см. В каких пределах необходимо изменять частоту ν генератора напряжений такого ускорителя, чтобы ускорить электроны от K_{min} = 5 МэВ до K_{max} = 50 МэВ? Энергия покоя электрона m_0c^2 = 0,51 МэВ.

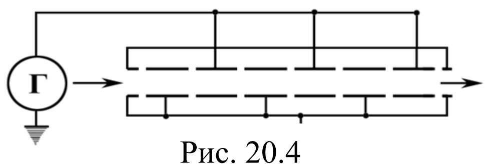


Рис. 20.4

Ответ: $\nu = \frac{c}{2l}\sqrt{1 - 1\Big/\left(K/m_0c^2 + 1\right)^2}$; от ν_{min} = 2,485 ГГц до ν_{max} = 2,499 ГГц.

20.2. Ускоряющая система линейного ускорителя ионов питается от генератора, работающего в диапазоне коротких длин волн, λ_0 = 30 м. Линейный ускоритель состоит из N = 36 трубок дрейфа, установленных по оси стеклянной вакуумной камеры (рис. 20.5). Длина первой трубки l_1 = 1 см. Пренебрегая величиной зазоров между трубками, определите длину последней l_N трубки и длину L всего ускорителя.

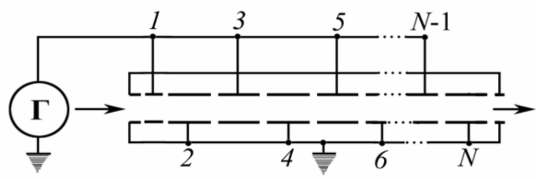


Рис. 20.5

Ответ: $l_N = l_1\sqrt{N} = 6$ см ; $L \approx 2l_1N^{3/2}\big/3 = 1{,}44$ м .

20.3. Максимальный диаметр кривизны траектории протонов в циклотроне d = 1 м. Индукция магнитного поля B = 1,20 Тл. Амплитуда ускоряющего напряжения U_m = 100 кВ. Найти время τ, в течение которого длится процесс ускорения.

Ответ: $\tau = \pi B d^2\big/\left(8U_m\right) = 4{,}7 \cdot 10^{-6}$ с $= 4{,}7$ мкс .

20.4. Электрон движется по окружности радиуса r_0 в однородном магнитном поле со скоростью $v = 0{,}8c$ (c – скорость света в вакууме). Индукция B магнитного поля равна 0,01 Тл. Определить радиус r_0 окружности, учитывая увеличение массы электрона при увеличении скорости.

Ответ: $r_0 = \dfrac{m_0 v}{eB\sqrt{1-v^2/c^2}} = 22{,}7$ см.

20.5. Максимальный диаметр кривизны траектории протонов в циклотроне $d = 1$ м. Индукция магнитного поля $B = 1{,}20$ Тл. Найти максимальную кинетическую энергию K, до которой могут быть ускорены в этом циклотроне протоны, и скорость v, приобретаемую протонами к концу ускорения.

Ответ: $K = (eBd)^2 / (8m_\text{p}) = 2{,}76 \cdot 10^{-12}$ Дж $= 17{,}2$ МэВ;

$v = eBd / (2m_\text{p}) = 5{,}75 \cdot 10^7$ м/с.

20.6. Частота генератора циклотрона $\nu = 10$ МГц. Найти амплитудное U_m ускоряющее напряжение на дуантах этого циклотрона, при котором расстояние между соседними траекториями протонов с радиусом $r_0 = 0{,}5$ м не меньше чем $\Delta r = 2$ мм , если индукция магнитного поля в циклотроне $B = 1{,}2$ Тл.

Ответ: $U_m = \pi\nu B\left(r_1^2 - r_0^2\right)/2 = 37{,}8$ кэВ.

20.7. Протоны ускоряются в циклотроне так, что максимальный радиус кривизны их траектории $r_0 = 50$ см. Найти кинетическую энергию K протонов в конце ускорения, если индукция магнитного поля в циклотроне $B = 1{,}0$ Тл.

Ответ: $K = \dfrac{(eBr_0)^2}{2m_\text{p}} = 1{,}92 \cdot 10^{-12}$ Дж $= 12$ МэВ.

20.8. Протоны ускоряются в циклотроне так, что максимальный радиус кривизны их траектории $r_0 = 50$ см. Найти минимальную частоту $\nu_{\min}$ генератора циклотрона, при которой в конце ускорения протоны будут иметь кинетическую энергию $K = 20$ МэВ.

Ответ: $\nu_{\min} = \sqrt{\dfrac{K}{2\pi^2 r_0^2 m_\text{p}}} = 19{,}7$ МГц

20.9. Определить кинетическую энергию K, которую приобретает протон, сделав $N = 40$ оборотов в магнитном поле циклотрона, если максимальное значение $U_{\max}$ переменной разности потенциалов между дуантами равно 60 кВ.

Ответ: $K = 2NeU_{\max} = 1{,}7 \cdot 10^{-13}$ Дж $= 4{,}8$ МэВ.

20.10. Вычислить скорость υ и кинетическую K энергию α-частицы ($^4_2\mathrm{He}$), выходящей из циклотрона, если, подходя к выходному окну, α-частицы движутся по окружности радиусом r_0 = 50 см. Индукция B магнитного поля циклотрона равна 1,7 Тл.

Ответ: $\upsilon = \dfrac{2eBr_0}{m_\alpha} = 4{,}1\cdot 10^7$ м/с; $K = m_\alpha \upsilon^2/2 = 34{,}9$ МэВ.

20.11. Индукция B магнитного поля циклотрона равна 1 Тл. Какова частота ν ускоряющего поля между дуантами, если в циклотроне ускоряются дейтроны $^2_1\mathrm{D}$?

Ответ: $\nu = \dfrac{eB}{2\pi m_\mathrm{d}} = 7{,}63$ МГц

20.12. В циклотроне требуется ускорять ионы гелия ($^4_2\mathrm{He}^{++}$). Частота ν переменной разности потенциалов, приложенной к дуантам, равна 10 МГц. Какова должна быть индукция B магнитного поля циклотрона, чтобы период T обращения ионов совпал с периодом изменения разности потенциалов?

Ответ: $B = \pi\nu m_\mathrm{He}/e = 1{,}3$ Тл.

20.13. Чтобы в циклотроне не возникала расстройка в процессе ускорения частицы, связанная с изменением ее периода обращения при возрастании энергии, медленно изменяют частоту ускоряющего поля. Такой ускоритель называется ф а з о т р о н о м. На сколько процентов следует изменять частоту ускоряющего поля фазотрона, чтобы ускорить протоны и α-частицы до энергии K = 500 МэВ?

Ответ: $\dfrac{\Delta\nu_\mathrm{p}}{\nu_\mathrm{p}} = 1 - \dfrac{m_{\mathrm{p}0}c^2}{\left(K + m_{\mathrm{p}0}c^2\right)} = 0{,}347 \approx 33\%$; $\dfrac{\Delta\nu_\alpha}{\nu_\alpha} = 1 - \dfrac{m_{\alpha 0}c^2}{\left(K + m_{\alpha 0}c^2\right)} = 0{,}118 \approx 12\%$.

20.14. Определить число N оборотов, которое должен сделать протон в магнитном поле циклотрона, чтобы приобрести кинетическую энергию K = 10 МэВ, если при каждом обороте протон дважды проходит между дуантами разность потенциалов U_m = 30 кВ.

Ответ: $N = \dfrac{K}{2eU_m} = 167$ оборотов.

20.15. Протоны ускоряются в циклотроне в однородном магнитном поле с индукцией B = 1,2 Тл. Максимальный радиус кривизны траектории протонов составляет r_0 = 40 см. Определить кинетическую энергию K в конце ускорения.

Ответ: $K = \dfrac{\left(eBr_0\right)^2}{2m_\mathrm{p}} = 1{,}77\cdot 10^{-12}$ Дж $= 11$ МэВ.

20.16. Протоны ускоряются в циклотроне.. Максимальный радиус кривизны траектории протонов составляет r_0 = 40 см. Определить минимальную частоту ускоряющего напряжения ν_{min}, при которой протоны ускоряются до энергий K = 20 МэВ.

Ответ: $\nu_{\text{min}} = \sqrt{K/\left(2\pi^2 r_0^2 m_{\text{p}}\right)} = 24{,}6\ \text{МГц}$.

20.17. При каких значениях кинетической энергии K период T обращения электронов, протонов и α-частиц в однородном магнитном поле на δ = 0,01 больше периода обращения при нерелятивистских скоростях?

Ответ: $K = \delta\cdot m_0c^2$; K_e = 5,1 кэВ; K_p = 9,4 МэВ; K_α = 37,3 МэВ.

20.18. Определить удельный заряд q/m частиц, ускоренных в циклотроне в однородном магнитном поле с индукцией B = 1,7 Тл при частоте ускоряющего напряжения ν = 25,9 МГц.

Ответ: $q/m = 2\pi\nu/B = 9{,}57\cdot10^7$ Кл/кг.

20.19. Среднее значение магнитной индукции $\langle B\rangle$ поля, создаваемого магнитом бетатрона, изменяясь приблизительно по линейному закону, возрастает за время τ = 1,00 мс от нуля до значения B_m = 200 мТл. Радиус орбиты электронов r_0 = 300 мм. Найти путь l, проходимый электронами за время ускорения до энергии K = 50 МэВ.

Ответ: $l = 2\tau K/(r_0eB_m) = 1{,}7\cdot10^6$ м.

20.20. В бетатроне индукция магнитного поля на равновесной орбите радиуса r_0 = 20 см изменяется за время τ = 1 мс практически с постоянной скоростью от нуля до B = 0,40 Тл. Найти энергию K, приобретаемую электроном за каждый оборот.

Ответ: $\Delta K = 2\pi r_0^2 eB/\tau = 1{,}6\cdot10^{-17}\ \text{Дж} = 100\ \text{эВ}$.

20.21. Средняя скорость изменения магнитного потока $\langle d\Phi/dt\rangle$ в бетатроне, рассчитанном на энергию K = 60 МэВ, составляет 50 Вб/с. Определить число N оборотов электрона на орбите за время ускоренного движения и путь l, пройденный электроном, если радиус r_0 орбиты равен 20 см.

Ответ: $N = \dfrac{K}{e\langle d\Phi/dt\rangle} = 1{,}2\cdot10^6$ оборотов; $l = 2\pi r_0N$ = $1{,}51\cdot10^6$ м.

20.22. Среднее значение магнитной индукции $\langle B\rangle$ поля, создаваемого магнитом бетатрона, изменяясь приблизительно по линейному закону, возрастает за время τ = 1,00 мс от нуля до значения B_m = 200 мТл. Радиус орбиты электронов r_0 = 300 мм. За время ускорения электроны прошли путь $l = 1{,}7\cdot10^6$ м. Найти скорость υ электронов в конце ускорения.

Ответ: $\upsilon = c\sqrt{1 - \dfrac{1}{(\gamma+1)^2}} = 0{,}99995c$, где $\gamma = r_0leB_m/\left(2m_0c^2\tau\right) = 99{,}8$.

20.23. В бетатроне магнитный поток внутри равновесной орбиты радиуса r_0 = 25 см возрастает за время ускорения практически с постоянной скоростью $d\Phi/dt$ = 5 Вб/с. При этом электроны приобретают кинетическую энергию K = 25 МэВ. Найти число оборотов N, совершенных электроном за время ускорения, и соответствующее значение пройденного им пути l.

Ответ: $N = \dfrac{K}{e(d\Phi/dt)} = 5\cdot10^6$ оборотов; $l = 2\pi r_0 N = 7{,}9\cdot10^6$ м

20.24. Электрон в бетатроне движется по орбите радиусом r_0 = 0,4 м и приобретает за один оборот кинетическую энергию ΔK = 20 эВ. Вычислить скорость изменения среднего значения магнитной индукции $d\langle B\rangle/dt$, считая эту скорость в течение интересующего нас промежутка времени постоянной.

Ответ: $\dfrac{d\langle B\rangle}{dt} = \dfrac{\Delta K}{\pi r_0^2 e} = 39{,}8$ Тл.

20.25. В бетатроне средняя скорость изменения среднего значения магнитной индукции $d\langle B\rangle/dt$ = 60 Тл/с. Радиус r_0 орбиты ускоряемых электронов равен 0,4 м. Определить напряженность E вихревого электрического поля на орбите электрона и силу F, действующую на электрон.

Ответ: $E = \dfrac{r_0}{2}\dfrac{d\langle B\rangle}{dt} = 12$ В/м; $F = eE = 1{,}92\cdot10^{-18}$ Н.

21. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА. ТОК СМЕЩЕНИЯ

Основные формулы и обозначения

Полная система уравнений Максвелла в дифференциальной и интегральной форме

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \quad \oint_L (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = \int_{(S)} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S};$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \oint_L (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = -\int_{(S)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S};$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho; \quad \oint_{(S)} (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = \int_V \rho dV;$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0; \quad \oint_{(S)} (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0.$$

Плотность тока смещения

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t},$$

где $\mathbf{D}$ – вектор электрической индукции (электрическое смещение); $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t$ – плотность тока смещения в вакууме; $\partial \mathbf{P}/\partial t$ – плотность тока поляризации.

Дополнительные соотношения: $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}$; $\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H}$; $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ (для однородных изотропных веществ).

Задачи с решениями

Задача 1. В некоторой области инерциальной системы отсчета имеется вращающееся с угловой скоростью ω магнитное поле B = const. Найти rot $\mathbf{E}$ в этой области, как функцию векторов ω и $\mathbf{B}$.

Решение: Физическая система состоит из магнитного поля, которое вращается с угловой скоростью ω. Для решения задачи нужно визуализировать ситуацию. Это можно сделать с помощью рис. 21.1.1. Вектор $\mathbf{B}$ – величина постоянная по модулю. Если осуществляется его поворот на угол $d\alpha = \omega dt$, то из рисунка следует, что

$$|\, d\mathbf{B} \,| = B\omega dt; \; d\alpha \to 0. \qquad (1)$$

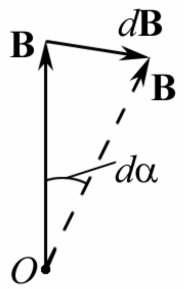


Рис. 21.1.1

Задача фактически решена, т.к. из уравнения Максвелла – Фарадея находим, что

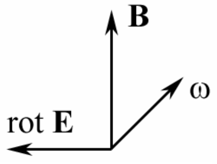


Рис. 21.1.2

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt}. \tag{2}$$

Подставляя (1) в (2), находим, с учетом знаков и значения $\left|\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right| = B\omega$, что rot **E** = –[ω **B**] (рис. 21.1.2).

Вектор ротора **E** направлен, как ясно из (2), в сторону, обратную вектору $d\mathbf{B}$.

Ответ: rot **E** = –[ω **B**].

Задача 2. Длинный прямой соленоид имеет n витков на единицу длины. По нему течет переменный ток $I = I_0 \sin\omega t$. Найти плотность $\mathbf{j}_{\text{см}}$ тока смещения как функцию расстояния r от оси соленоида. Радиус сечения соленоида R.

Решение: Физическая система задана соленоидом, как источником переменного магнитного поля. Согласно уравнению Максвелла

$$\oint_L (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = -\int_{(S)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S} \tag{1}$$

переменное магнитное поле является источником вихревого электрического поля. Плотность тока смещения равна

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \text{ где } \varepsilon = 1. \tag{2}$$

После того как выстроена логическая схема решения, нужно обратиться к определению B в соленоиде.

$$B = \mu\mu_0 nI = \mu\mu_0 nI_0 \sin\omega t, \text{ где } \mu = 1. \tag{3}$$

Выберем контур L в виде окружности радиуса $r < R$ и радиуса $r \ge R$ и запишем уравнение (1), учитывая (3) и то, что поле соленоида однородно:

$$2\pi r E = -\pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t}; \qquad E = -\frac{r}{2}\mu_0 n I_0 \omega \cos\omega t \quad (r < R);$$

$$2\pi r E = -\pi R^2 \frac{\partial B}{\partial t}; \qquad E = -\frac{R^2}{2r}\mu_0 n I_0 \omega \cos\omega t \quad (r \ge R).$$

Подставляя E в формулу (2), получим

$$j_{\text{см}} = \frac{r}{2}\varepsilon_0\mu_0 n I_0 \omega^2 \sin\omega t \quad (r < R); \qquad j_{\text{см}} = \frac{R^2}{2r}\varepsilon_0\mu_0 n I_0 \omega^2 \sin\omega t \quad (r \ge R).$$

Полезно проиллюстрировать полученные зависимости графиком.

Задача 3. Показать, что из уравнений Максвелла следует закон сохранения электрического заряда, т.е. $\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$.

Решение: Наиболее просто закон сохранения электрического заряда получается, если применить уравнения Максвелла в дифференциальной форме. Запишем

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \qquad (1)$$

Возьмем дивергенцию от обеих частей этого уравнения

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathrm{div}\left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right), \qquad (2)$$

но

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 0. \qquad (3)$$

Тогда

$$\mathrm{div}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 0. \qquad (4)$$

Подставим уравнение Максвелла div $\mathbf{D} = \rho$ в (4).

Окончательный результат $\mathrm{div}\,\mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ – это и есть закон сохранения заряда в дифференциальной форме.

$$\mathrm{div}\,\mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

В четырехмерном пространстве он имеет вид div $\mathbf{j}_n = 0$, где $\mathbf{j}_n$ – четырехмерный вектор плотности тока, а $j_4 = ic\rho$.

Задача 4. Точечный заряд q_0 движется прямолинейно и равномерно со скоростью $\boldsymbol{\upsilon}$ ($\upsilon << c$). Найти вектор $\mathbf{j}_{\text{см}}$ плотности тока смещения в точке A, находящейся на расстоянии r на прямой, совпадающей с его траекторией.

Решение: По определению плотность тока смещения равна

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \qquad (1)$$

Как известно, $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$ для однородной изотропной среды. Поэтому задача сводится к определению вектора $\mathbf{E}$ одиночного заряда и вычислению производной $\mathbf{E}$.

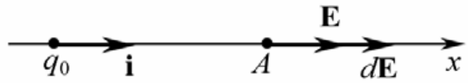


Рис. 21.2

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{r^2}\mathbf{i}. \qquad (2)$$

Обратите внимание, что заряд q_0 приближается к точке A (рис. 21.2)

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{2}{r^3}\frac{dr}{dt}\right)\mathbf{i}, \qquad (3)$$

здесь **i** – единичный вектор, направленный по оси x.

Так как заряд q_0 приближается к точке A, то

$$\boldsymbol{\upsilon} = -\frac{dr}{dt}\mathbf{i}\,. \qquad (4)$$

После подстановки (3) и (4) в (1), получаем окончательный ответ

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{q_0}{2\pi r^3}\boldsymbol{\upsilon}.$$

Задача 5. Плоский конденсатор образован двумя дисками, между которыми находится слабопроводящая среда. Если конденсатор отключить от источника питания, то он начинает разряжаться в связи с наличием слабопроводящей среды. Как известно, источником магнитного поля являются токи. Вычислить магнитное поле внутри такого конденсатора.

Решение: Для определения магнитного поля прежде всего воспользуемся теоремой о циркуляции вектора $\oint\limits_L (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = \sum I_i$, где $\sum I_i$ – алгебраическая сумма токов, которые пронизывают воображаемый (мысленный) контур L.

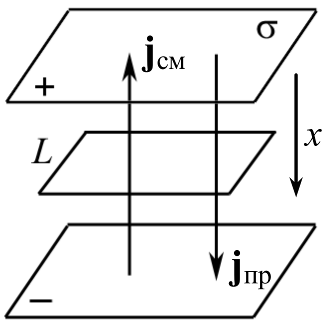


Рис. 21.3

Физическая система образована пластинами конденсатора, поверхностный заряд которого уменьшается со временем. Ток проводимости равен $I_{\text{пр}} = \dfrac{\partial q}{\partial t} = \dfrac{\partial \sigma}{\partial t}S$, и направлен по оси x так, как показано на рис. 21.3, где $\sigma = q/S$ – поверхностная плотность заряда q.

Однако наличие тока проводимости приводит к уменьшению поверхностной плотности заряда σ, а следовательно, изменению электрического поля $E = \sigma/(\varepsilon\varepsilon_0)$ и соответствующему появлению тока смещения $j_{\text{см}} = \varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{\partial E}{dt} = \dfrac{\partial \sigma}{\partial t}$, или $I_{\text{см}} = j_{\text{см}}S = \dfrac{\partial \sigma}{\partial t}S$, направленного против $j_{\text{пр}}$. Поэтому

$$\oint\limits_L (\mathbf{H}\; d\mathbf{l}) = \sum\left(I_{\text{пр}} - I_{\text{см}}\right) = S\sum\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial t}\right) = 0,$$

т.е. $H = 0$. Следует особо подчеркнуть, что конденсатор отключен от источника.

Ответ: $H = 0$.

Задача 6. Пусть плоский конденсатор подключен к источнику переменного напряжения так, что напряженность электрического поля между обкладками меняется по закону $E = E_0\sin\omega t$. Пластины конденсатора имеют вид дисков, пространство между ними заполнено слабо проводящей средой с удельной проводимостью σ и диэлектрической проницаемостью ε. Найти напряженность магнитного поля H на расстоянии r от оси дисков между обкладками.

Решение: Запишем уравнение Максвелла, которое связывает вектор **H** и его источники (токи проводимости **j** и смещения $\partial\mathbf{D}/\partial t$):

$$\oint_L (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = \int_{(S)} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) d\mathbf{S}. \qquad (1)$$

В связи с цилиндрической симметрией физической системы и ее однородностью уравнение (1) принимает вид (выбираем контур L, который имеет длину $2\pi r$ – окружность с центром в центре симметрии цилиндра, и площадь поверхности натянутой на этот контур $S = \pi r^2$)

$$H \cdot 2\pi r = \left(j + \frac{\partial D}{\partial t}\right) \cdot \pi r^2. \qquad (2)$$

Из условия задачи $\quad D = \varepsilon\varepsilon_0 E = \varepsilon\varepsilon_0 E_0 \sin\omega t. \qquad (3)$

Закон Ома в дифференциальной форме

$$j = \sigma E = \varepsilon\varepsilon_0 E_0 \sin\omega t. \qquad (4)$$

Подставляя (3), (4) в (2), получаем

$$H = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E_0 r}{2}\left(\sigma \sin\omega t + \omega\cos\omega t\right).$$

Задача 7. Магнитное поле, которое создает движущийся со скоростью $\boldsymbol{\upsilon}$ ($\upsilon << c$) заряд q_0 в некоторой точке **r** (рис. 21.4.1), равно $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_0[\boldsymbol{\upsilon}\,\mathbf{r}]}{r^3}$. Доказать, что данная формула является следствием уравнений Максвелла.

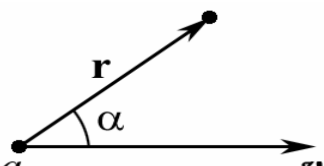


Рис. 21.4.1

Решение: Поле **B**, которое задано в условии задачи, получено из закона Био – Савара – Лапласа. В отсутствие токов проводимости уравнение Максвелла для циркуляции вектора **H** имеет вид

$$\oint_L \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{D}\, d\mathbf{S}. \qquad (1)$$

Левую часть этого равенства упростим, если выберем, из соображений симметрии, окружность радиуса R с центром в точке O, как показано на рис. 21.4.2.

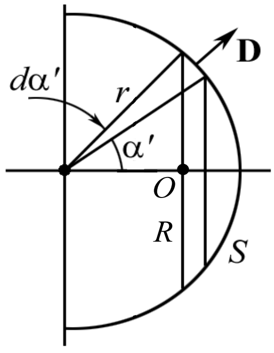


Рис. 21.4.2

$$2\pi RH = \frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{D}\, d\mathbf{S}, \qquad (2)$$

где $\mathbf{D}\, d\mathbf{S} = \mathbf{D}\, dS{\cdot}\mathbf{n} = (\mathbf{D}\,\mathbf{n})dS = DdS$.

Очевидно, что основная вычислительная трудность состоит в определении потока вектора **D** через поверхность S. Найдем поток через сферическое кольцо площадью $dS = 2\pi(r\sin\alpha')rd\alpha'$

$$DdS = \frac{q_0}{4\pi r^2}2\pi(r\cdot\sin\alpha')\cdot rd\alpha' = \frac{q_0}{2}\sin\alpha' d\alpha'. \qquad (3)$$

Интегрируя (3), имеем

$$\int_0^{\alpha} DdS = \frac{q_0}{2}\left(1-\cos\alpha\right). \qquad (4)$$

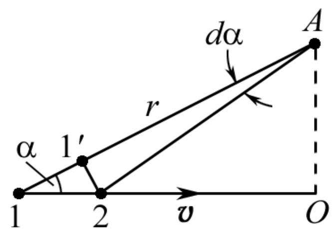


Рис. 21.4.3

Угол α в (4) есть величина переменная (см. рис. 21.4.3)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int DdS = \frac{q_0}{2}\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt}. \qquad (5)$$

Отрезок $l_{12} = \upsilon dt$.

Из треугольника $1'A2$ $dl' = rd\alpha$.

Из треугольника $11'2$

$$dl' = \upsilon dt{\cdot}\sin\alpha = rd\alpha. \qquad (6)$$

Из (6)
$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\upsilon\sin\alpha}{r}. \qquad (7)$$

Подставляя в (2) полученные уравнения (5) – (7), имеем

$$H = \frac{q_0\upsilon r\sin\alpha}{4\pi r^3}, \text{ т.к. } R = r\sin\alpha.$$

Так как $B = \mu\mu_0 H = \mu_0 H$ (при $\mu = 1$), то $\mathbf{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}q_0\dfrac{[\boldsymbol{\upsilon}\,\mathbf{r}]}{r^3}$.

Примечание. Метод, который использован при решении, носит название «оперативного», т.к. в курсе «Электричество и магнетизм» широко распространен (приведите примеры).

Задача 8. В каких ситуациях уравнения Максвелла описывают независимые друг от друга магнитные и электрические поля.

Решение: Для получения результата необходимо записать:

1. Уравнения электростатики div $\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ и rot $\mathbf{E} = 0$;
2. Уравнения магнитостатики div $\mathbf{B} = 0$ и rot $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}$.

Иначе, необходимо положить, что $\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0$ и $\dfrac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} = 0$.

Таким образом, уравнения Максвелла распадаются на две группы независимых уравнений. Электрические и магнитные поля независимы друг от друга. Источниками электрических полей являются неподвижные заряды, магнитных – постоянные токи проводимости.

Задача 9. Можно ли создать магнитное поле, силовые линии которого параллельны, а величина напряженности поля линейно возрастает вдоль силовых линий?

Решение: Пусть силовые линии изучаемого поля параллельны оси z (рис. 21.5). Тогда, согласно условиям задачи, вектор напряженности магнитного поля имеет компоненты $\mathbf{H} = (0, 0, \alpha z)$. Следовательно,

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial H_z}{\partial z} = \alpha.$$

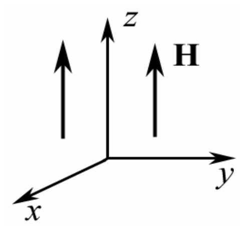


Рис. 21.5

Находим дивергенцию вектора **H**

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = \alpha \neq 0,$$

что противоречит уравнениям Максвелла. Таким образом, создать такое поле невозможно.

Задача 10. Объясните, почему токи смещения, в отличие от токов проводимости, не выделяют джоулевой теплоты. Электрическое поле в среде изменяется по закону $E = E_0 \sin\omega t$.

Решение: Ответ на этот вопрос очевиден для вакуума. Это также справедливо для токов смещения в диэлектриках, диэлектрическая постоянная которых не зависит от температуры. У диэлектриков с постоянными диполями изменение поляризации сопровождается выделением и поглощением тепла, особенно заметным в высокочастотных полях. Но закономерности этого тепловыделения заметно отличаются от джоулевого. В металлах величина токов смещения очень мала

$$j_{\text{см}} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \varepsilon\varepsilon_0 E_0 \omega \cos\omega t$$

по сравнению с токами проводимости $j_{\text{пр}} = \sigma E = \sigma E_0 \sin\omega t$ при всех частотах, применяемых в технике $\omega < 10^{14}$ с$^{-1}$, поэтому пренебрежение ими в расчетах вполне обоснованно.

22. СВОБОДНЫЕ (ГАРМОНИЧЕСКИЕ) И ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

Основные формулы и обозначения

Уравнение колебания заряда в LC-контуре

$$q = q_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

или движение груза на пружинке

$$x = x_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где q_0, x_0 – амплитуда; ω_0 – циклическая (круговая) частота колебаний; $(\omega_0 t + \varphi_0)$ – фаза колебаний; φ_0 – начальная фаза.

$$\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2\pi\nu_0,$$

где T_0 – период колебаний; ν_0 – собственная частота.

Скорость точки, совершающей гармонические колебания,

$$\upsilon = \dot{x} = -x_0\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Ток в электрической LC-цепи

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Кинетическая E_K и потенциальная $E_П$ энергии колеблющейся материальной точки массой m

$$E_К = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2}; \quad E_П = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x_0^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2},$$

где $k = m\omega_0^2$ – коэффициент упругости (жесткость) пружины.

Полная энергия колебаний $E = E_К + E_П = \dfrac{\omega_0^2 x_0^2 m}{2} = \dfrac{2\pi^2 x_0^2 m}{T^2}.$

Период колебаний:

а) математического маятника длиной l $T = 2\pi\sqrt{l/g}$;

б) пружинного маятника $T = 2\pi\sqrt{m/k}$;

в) физического маятника $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mgl}}$, где J – момент инерции маятника относительно оси колебаний; l – расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника;

г) заряда в LC-цепи $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0; \qquad \ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0,$$

где β – коэффициент затухания; $\beta = r/(2m)$ в случае механических колебаний и $\beta = R/(2L)$ в случае электромагнитных колебаний.

Зависимость амплитуды затухающих колебаний от времени

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}.$$

Уравнение затухающего колебательного движения

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Логарифмический декремент затухания δ

$$\delta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T.$$

Добротность колебательной системы $Q = \pi/\delta = \omega_0/(2\beta)$.

Частота затухающих колебаний $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

Циклическая частота ω LCR-цепи $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}$.

Задачи с решениями

Задача 1. Шарик массой m = 100 г, подвешенный к пружине, с коэффициентом жесткости k = 10 Н/м совершает синусоидальные колебания, амплитуда которых $x_0 = 4{,}0\cdot10^{-2}$ м. Считая колебания незатухающими и начальную фазу равной нулю, определить смещение шарика спустя время $t = 52{,}36\cdot10^{-3}$ с от начала колебаний. Массой пружины и размерами шарика пренебречь.

Дано:
$m = 0{,}1$ кг
$k = 10$ Н/м
$\varphi_0 = 0$
$t = 5{,}236\cdot10^{-2}$ с
$x_0 = 4\cdot10^{-2}$ м

x – ?

Решение: Смещение при синусоидальных колебаниях определяется по формуле

$$x = x_0 \sin\left(\omega t + \varphi_0\right) = x_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \text{ т.к. } \varphi_0 = 0.$$

Период колебаний $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

Находим смещение шарика $x = x_0 \sin\left(\sqrt{k/m}\cdot t\right)$;

$$x = 4\cdot10^{-2}\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{10}{0{,}1}}\cdot5{,}236\cdot10^{-2}\right) = 2\cdot10^{-2}\text{ м} = 2\text{ см}.$$

Ответ: x = 2 см.

Задача 2. Кабина, к потолку которой подвешен математический маятник длиной в l = 1,0 м, начинает опускаться вертикально вниз с ускорением $a = g/4$. Через время t_1 = 3,0 с от начала движения кабина начинает двигаться равномерно, а затем в течение t_3 = 3,0 с тормозится до остановки. Определить: 1) период гармонических колебаний маятника на каждом участке пути; 2) как изменится период гармонических колебаний маятника, если массу маятника увеличить в два раза?

Дано:
$l = 1{,}0$ м
$a = g/4$
$t_1 = 3{,}0$ с
$t_3 = 3{,}0$ с

$T_1 - ?$ $T_2 - ?$
$T_3 - ?$

Решение: Период гармонических колебаний математического маятника определяется по формуле $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ и не зависит от скорости движения и массы.

При равномерном движении $T_2 = 2\pi\sqrt{l/g}$.

При движении точки подвеса с ускорением **a** период колебаний определяется по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{l/g'}\,,$$

где модуль вектора $g' = \sqrt{g^2 + a^2 - 2ga\cos\alpha}$, α – угол между векторами **g** и **a**. При $\alpha = 0$ $g' = g - a$; при $\alpha = 180°$ $g' = g + a$.

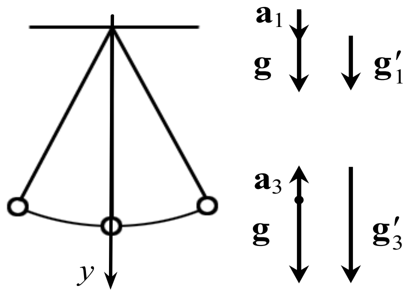


Рис. 22.1

При движении точки подвеса вниз с ускорением $\mathbf{a}_1$ (рис. 22.1) в скалярной форме имеем $g'_1 = g - a_1$. При торможении точки подвеса $g'_3 = g + a_3$, где $a_3 = a_1 = a$ (по величине), так как маятник тормозится столько же времени, сколько разгоняется из состояния покоя ($t_1 = t_3$).

Определяем периоды колебания маятника на трех участках пути

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}} = 2\pi\sqrt{\frac{1{,}0}{9{,}8-(9{,}8/4)}} \approx 2{,}3 \text{ с;} \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1{,}0}{9{,}8}} = 2{,}0 \text{ с;}$$

$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}} = 2\pi\sqrt{\frac{1{,}0}{9{,}8+(9{,}8/4)}} \approx 1{,}8 \text{ с.}$$

Ответ: $T_1 = 2{,}3$ с; $T_2 = 2$ с; $T_3 = 1{,}8$ с. Период колебаний математического маятника не зависит от его массы.

Задача 3. Амплитуда гармонических колебаний материальной точки равна $x_0 = 5$ см. Масса материальной точки $m = 10$ г и полная энергия колебаний $E = 3{,}1\cdot10^{-5}$ Дж. Написать уравнение гармонических колебаний этой точки (с числовыми коэффициентами), если начальная фаза колебаний $\varphi_0 = 60°$.

Дано:
$x_0 = 0{,}05$ м
$m = 0{,}01$ кг
$E = 3{,}1\cdot10^{-5}$ Дж
$\varphi_0 = \pi/3$

$x(t) - ?$

Решение: Общее уравнение гармонических колебаний имеет вид

$$x = x_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right). \qquad (1)$$

Период T колебаний неизвестен, но его можно найти из условия

$$E = \frac{2\pi^2 x_0^2 m}{T^2}.$$

Отсюда $$T = \sqrt{\frac{2\pi^2 x_0^2 m}{E}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \pi^2 \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}01}{3{,}1 \cdot 10^{-5}}} = 4 \text{ с}.$$

Тогда уравнение (1) примет вид $x = 0{,}05 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Так как $\cos(\omega t + \varphi_0)$ – величина безразмерная, наименование x будет соответствовать x_0, т.е. [м].

Ответ: $x = 0{,}05 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$ м.

Задача 4. Материальная точка с массой m = 0,01 кг совершает гармонические колебания по закону синуса с периодом T = 2 с и начальной фазой, равной нулю. Полная энергия колеблющейся точки E = 0,1 мДж. Требуется: 1) найти амплитуду колебаний; 2) написать уравнение данных колебаний; 3) найти наибольшее значение силы F_{max}, действующей на точку.

Дано:
$m = 0{,}01$ кг
$T = 2$ с
$E = 1 \cdot 10^{-4}$ Дж
$\varphi_0 = 0$
x_0 – ? $x(t)$ – ?
F_{max} – ?

Решение: 1. Запишем уравнение гармонических колебаний без начальной фазы $x = x_0 \sin\omega t$.

Взяв производную смещения x по времени, найдем скорость колеблющейся точки

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = x_0 \omega \cos \omega t.$$

Кинетическая энергия колеблющейся точки

$$E_{К} = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m x_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t}{2}.$$

Полная энергия колеблющейся точки равна максимальному значению кинетической энергии точки $E = E_{К\,max} = \frac{m x_0^2 \omega^2}{2}$. Отсюда, учитывая, что $\omega = 2\pi/T$, находим выражение для амплитуды колебаний:

$$x_0 = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}} = \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Произведем вычисления: $x_0 = \frac{2}{2\pi}\sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-4}}{10^{-2}}} = 0{,}045 \text{ м} = 4{,}5 \text{ см}.$

Найдем числовое значение циклической частоты $\omega = 2\pi/2 = \pi$ с$^{-1}$.

2. Запишем уравнение гармонических колебаний для данной точки

$$x = 0{,}045 \cdot \sin \pi t \text{ (м)}.$$

3. Ускорение колеблющейся точки найдем, взяв производную от скорости $a = \frac{dv}{dt} = -x_0\omega^2 \sin\omega t$. Отсюда максимальное ускорение $a_{max} = x_0\omega^2$. Из второго закона динамики, найдем максимальную силу, действующую на точку

$$F_{max} = ma_{max} = mx_0\omega^2.$$

$$F_{max} = 0{,}01 \cdot 0{,}045 \cdot \pi^2 = 4{,}3 \cdot 10^{-3}\ \text{Н} = 4{,}3\ \text{мН}.$$

Ответ: $x_0 = 4{,}5$ см; $F_{max} = 4{,}3$ мН.

Задача 5. Материальная точка совершает колебания, уравнение которых имеет вид: $x = 0{,}1 \cdot \sin 2t$ м. В момент, когда возвращающая сила впервые достигла значения $F = -10^{-2}$ Н, точка обладает потенциальной энергией $E_П = 2 \cdot 10^{-4}$ Дж. Найти этот момент времени t и соответствующую ему фазу колебаний.

Дано:
$x_0 = 0{,}1$ м
$\omega = 2$ рад/с
$F = -10^{-2}$ Н
$E_П = 2 \cdot 10^{-4}$ Дж
t – ? φ – ?

Решение: Возвращающая сила $F = -kx = ma$.

Если уравнение колебаний $x = x_0 \sin\omega t$, то ускорение может быть представлено как $a = -x_0\omega^2 \sin\omega t$, и, следовательно, возвращающая сила

$$F = -mx_0\omega^2 \sin\omega t. \qquad (1)$$

Потенциальная энергия колеблющейся материальной точки массой m равна $E_П = kx^2/2$.

Учитывая, что $k = m\omega^2$, получаем

$$E_П = \frac{m\omega^2 x_0^2 \sin^2 \omega t}{2}. \qquad (2)$$

Решая систему уравнений (1) – (2) относительно $\sin\omega t$, находим

$$m = -\frac{F}{x_0\omega^2 \sin\omega t}; \quad E_П = -\frac{F\omega^2 x_0^2 \sin^2 \omega t}{2x_0\omega^2 \sin\omega t} = -\frac{Fx_0 \sin\omega t}{2}.$$

Откуда

$$\sin\omega t = -\frac{2E_П}{Fx_0} = -\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{-0{,}01 \cdot 0{,}1} = 0{,}4;$$

$$\varphi = \omega t = \arcsin 0{,}4 = 0{,}412\ \text{рад};$$

$$t = \varphi/\omega = 0{,}412/2 = 0{,}206\ \text{с}.$$

Ответ: $t = 0{,}206$ с; $\varphi = 0{,}412$ рад.

Задача 6. Ток в колебательном контуре изменяется со временем по закону $I = 0{,}01\cos 10^3 t$. Найти индуктивность L контура, зная, что емкость его конденсатора $C = 2 \cdot 10^{-5}$ Ф.

Дано:	
$\omega = 10^3$ рад/с	
$C = 2\cdot10^{-5}$ Ф	
L – ?	

Решение: Зависимость силы тока от времени в общем виде может быть представлена как $I = I_0\cos\omega t$.

Из формулы Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$, учитывая, что $T = 2\pi/\omega$, получим

$$L = \frac{1}{C}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{10^6\cdot 2\cdot 10^{-5}} = 0{,}05 \text{ Гн}.$$

Ответ: $L = 0{,}05$ Гн.

Задача 7. В контуре с индуктивностью L и емкостью C совершаются свободные незатухающие колебания. Зная, что максимальное напряжение на конденсаторе равно U_{max}, найти максимальный ток I_{max} в контуре.

Решение: Закон сохранения энергии в данном случае запишется в виде

$$\frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = \frac{CU_{max}^2}{2} = \frac{LI_{max}^2}{2}, \text{ откуда } I_{max} = U_{max}\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Ответ: $I_{max} = U_{max}\sqrt{C/L}.$

Задача 8. На какую длину волны настроен колебательный контур, если он состоит из катушки индуктивностью $L = 2\cdot10^{-3}$ Гн и плоского конденсатора? Расстояние между пластинами конденсатора $d = 1$ см, диэлектрическая проницаемость вещества, заполнившего пространство между пластинами, $\varepsilon = 11$. Площадь каждой пластины $S = 800$ см^2.

Дано:	
$L = 2\cdot10^{-3}$ Гн	
$d = 1\cdot10^{-2}$ м	
$\varepsilon = 11$	
$S = 8\cdot10^{-2}$ м^2	
λ – ?	

Решение: Длина волны $\lambda = cT$, где c – скорость распространения электромагнитных волн ($c = 3\cdot10^8$ м/с); T – период колебаний.

Период найдем по формуле Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$, где C – емкость конденсатора; L – индуктивность катушки. Тогда $\lambda = 2\pi c\sqrt{LC}$.

Подставив в эту формулу значение емкости плоского конденсатора $C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d$, получим

$$\lambda = 2\pi c\sqrt{L\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}}.$$

Подставив числовые значения, найдем

$$\lambda = 2\pi\cdot 3\cdot 10^8\sqrt{2\cdot10^{-3}\cdot\frac{11\cdot 8{,}85\cdot10^{-12}\cdot 8\cdot10^{-2}}{10^{-2}}} \approx 2351{,}4 \text{ м}.$$

Ответ: $\lambda = 2351{,}4$ м.

Задача 9. Измерениями установлено, что логарифмический декремент затухания δ камертона, колеблющегося с частотой $\nu = 100$ с$^{-1}$, равен 0,002. Через какой промежуток времени амплитуда колебаний возбужденного камертона уменьшится в 100 раз? Как изменится при этом энергия колебаний?

Дано:
$\nu = 100$ с$^{-1}$
$\delta = 0{,}002$
$A_0/A = 100$
t – ?
E_0/E – ?

Решение: Амплитуда затухающих колебаний изменяется со временем t по закону

$$A = A_0 e^{-\beta t}, \tag{1}$$

где $\beta = \delta/T$ – коэффициент затухания; δ – логарифмический декремент затухания; $T = 1/\nu$ – период колебаний.

Поэтому формулу (1) можно записать в виде:

$$A = A_0 e^{-\delta\nu t}.$$

Отсюда $$t = \frac{1}{\delta\nu}\ln\frac{A_0}{A} = \frac{1}{2\cdot 10^{-3}\cdot 100}\cdot \ln 100 = 23{,}0 \text{ с.}$$

Полная энергия колебаний E пропорциональна квадрату произведения амплитуды и частоты колебаний $E = m\omega^2 A^2/2$.

В данной задаче $m = \text{const}$ и $\omega = 2\pi\nu = \text{const}$. Поэтому

$$\frac{E_0}{E} = \left(\frac{A_0}{A}\right)^2 = 100^2 = 10^4.$$

Ответ. $t = 23$ с; $E_0/E = 10^4$, т.е. энергия уменьшится в 10^4 раз.

Задача 10. Логарифмический декремент δ затухания математического маятника равен 0,2. Найти, во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний за одно полное колебание маятника?

Дано:
$\delta = 0{,}2$
A_1/A_2 – ?

Решение: В произвольный момент времени t выражение для амплитуды затухающих колебаний имеет вид

$$A = A_0 e^{-\beta t}, \tag{1}$$

где β – коэффициент затухания.

Логарифмический декремент затухания δ связан с β по формуле

$$\delta = \beta T, \tag{2}$$

где T – период колебаний.

С учетом (2) выражение (1) запишется в виде

$$A_1 = A_0 e^{-\delta\frac{t}{T}}; \qquad A_2 = A_0 e^{-\delta\frac{t+T}{T}},$$

где A_1 и A_2 – амплитуды колебаний в момент времени t и $t + T$ (т.е. через период), соответственно.

Следовательно, $$A_1/A_2 = e^{\delta} = e^{0{,}2} = 1{,}22.$$

Ответ: уменьшится в 1,22 раза.

Задача 11. Период затухающих колебаний T = 4 с, логарифмический декремент затухания δ = 1,6, начальная фаза φ_0 равна нулю. Смещение точки при $T/4$ равно 4,5 см. Написать уравнение движения этого колебания.

Дано:	
$T = 4$ с	
$\delta = 1{,}6$	
$x_1 = 4{,}5\cdot10^{-2}$ м	
$x(t)$ – ?	

Решение: Уравнение затухающего колебательного движения имеет вид

$$x = A_0e^{-\beta t}\cdot\sin(\omega t + \varphi_0). \qquad (1)$$

В данной задаче $\varphi_0 = 0$ и учитывая, что $\beta = \delta/T$, запишем уравнение (1) в виде

$$x = A_0 e^{-\delta\frac{t}{T}}\cdot\sin\frac{2\pi}{T}t. \qquad (2)$$

Так как при $t = T/4$ $x = x_1$, то из уравнения (2) можно определить начальную амплитуду

$$A_0 = \frac{x_1e^{\delta/4}}{\sin(\pi/2)} = x_1e^{\delta/4} = 4{,}5\cdot10^{-2}\cdot e^{1{,}6/4} = 0{,}067 \text{ м.}$$

Таким образом, при $\beta = \delta/T = 1{,}6/4 = 0{,}4$ с$^{-1}$ и $\omega = 2\pi/T = \pi/2$, уравнение (1) примет вид:

$$x = 0{,}067e^{-0{,}4t}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \text{ м.}$$

Задача 12. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C = 4 мкФ и катушки индуктивностью L = 24 мГн и активным сопротивлением R = 50 Ом. Определить частоту свободных электромагнитных колебаний в этом контуре. На сколько изменится частота, если пренебречь активным сопротивлением катушки?

Дано:	
$C = 4\cdot10^{-6}$ Ф	
$L = 2{,}4\cdot10^{-2}$ Гн	
$R = 50$ Ом	
ν – ? $\Delta\nu$ – ?	

Решение: Циклическая частота электромагнитных колебаний в контуре (LCR-цепь)

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}.$$

Частота свободных электромагнитных колебаний

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = 486{,}2 \text{ Гц.}$$

Если $R = 0$, то $$\nu_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 513{,}7 \text{ Гц.}$$

Изменение частоты равно $\Delta\nu = \nu_1 - \nu = 27{,}5$ Гц.

Ответ: $\nu = 486{,}2$ Гц; $\Delta\nu = 27{,}5$ Гц.

Задача 13. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью в C = 7 мкФ и катушки индуктивностью L = 0,23 Гн и сопротивлением R = 40 Ом. Конденсатор заряжен количеством электричества $q_0 = 5{,}6\cdot10^{-4}$ Кл. 1) Найти период колебаний контура. 2) Найти логарифмический декремент затухания δ колебаний. 3) Написать уравнение зависимости изменения разности потенциалов U на обкладках конденсатора от времени.

Дано:
$C = 7\cdot10^{-6}$ Ф
L = 0,23 Гн
R = 40 Ом
$q_0 = 5{,}6\cdot10^{-4}$ Кл

T – ? δ – ?
$U(t)$ – ?

Решение: Период электромагнитных колебаний в колебательном контуре определим по формуле

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} = \frac{2\cdot 3{,}14}{\sqrt{\frac{1}{7\cdot10^{-6}\cdot 0{,}23} - \left(\frac{40}{2\cdot 0{,}23}\right)^2}} = 8\cdot10^{-3}\ \text{с}.$$

Логарифмический декремент затухания $\delta = \beta T$,

где $\beta = R/(2L)$ – коэффициент затухания.

Тогда
$$\delta = \frac{R}{2L}T = \frac{40\cdot 8\cdot10^{-3}}{2\cdot 0{,}23} = 0{,}696 = 0{,}7.$$

Разность потенциалов между обкладками конденсатора в зависимости от времени t определяется уравнением

$$U = U_0 e^{-\beta t}\cdot\cos\omega t,$$

где $U_0 = q_0/C = 80$ В; $\omega = 2\pi/T = 250\pi$; $\beta = R/(2L) = 87$.

Окончательно уравнение запишется в виде

$$U = 80\cdot e^{-87t}\cdot\cos 250\pi t.$$

Задача 14. Батарея, состоящая из двух одинаковых заряженных конденсаторов емкостью C_0 = 10 мкФ, включается в цепь, индуктивность и активное сопротивление которой равны L = 10 мГн и R = 40 Ом. Определить период возникающих в цепи электромагнитных колебаний, если конденсаторы соединены параллельно и последовательно.

Дано:
$C_0 = 10^{-5}$ Ф
$L = 10^{-2}$ Гн
R = 40 Ом

T_1 – ? T_2 – ?

Решение: Период T электромагнитных колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}},$$

где C – емкость батареи конденсаторов.

При параллельном и последовательном соединениях двух одинаковых конденсаторов емкостью C_0 значения емкости батареи соответственно равны $C_1 = 2C_0$ и $C_2 = C_0/2$.

Поэтому искомые периоды колебаний T_1 и T_2 можно найти по формулам

$$T_1=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{2LC_0}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{2\cdot10^{-2}\cdot10^{-5}}-\left(\frac{40}{2\cdot10^{-2}}\right)^2}}=6,28\cdot10^{-3}\text{ с};$$

$$T_2=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2}{LC_0}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2}{10^{-2}\cdot10^{-5}}-\left(\frac{40}{2\cdot10^{-2}}\right)^2}}=1,57\cdot10^{-3}\text{ с}.$$

Ответ: T_1 = 6,28·10^{-3} с, T_2 = 1,57·10^{-3} с.

Задача 15. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью в C = 0,2 мкФ и катушки, индуктивность которой L = = 5,07·10^{-3} Гн. При каком логарифмическом декременте δ затухания разность потенциалов на обкладках конденсатора через t_1 = 10^{-3} с колебаний уменьшится в 3 раза?

Дано:
$C = 2\cdot10^{-7}$ Ф
$L = 5,07\cdot10^{-3}$ Гн
$t_1 = 10^{-3}$ с
$U_0/U_1 = 3$

δ – ?

Решение: Полагая сопротивление в колебательном контуре малым, найдем период колебаний

$$T=2\pi\sqrt{LC}=2\pi\sqrt{5,07\cdot10^{-3}\cdot2\cdot10^{-7}}=2\cdot10^{-4}\text{ с}.$$

Напряжение на конденсаторе изменяется по закону $U_1=U_0e^{-\beta t_1}=U_0e^{-\delta\frac{t_1}{T}}$. Отсюда $\delta\frac{t_1}{T}=\ln\frac{U_0}{U_1}$.

Следовательно, искомая величина

$$\delta=\frac{T\ln\left(U_0/U_1\right)}{t_1}=\frac{2\cdot10^{-4}\cdot\ln3}{10^{-3}}=0,22.$$

Ответ: δ = 0,22.

Задачи для самостоятельного решения

22.1.1. Записать уравнение гармонических колебаний при следующих параметрах:

1) A = 10 см; $\varphi_0 = \pi/4$ рад; $\omega = 2\pi$ рад/с.
2) A = 5,0 см; $\varphi_0 = \pi/4$ рад; T = 2 с.
3) A = 4,0 см; $\varphi_0 = \pi$ рад; ν = 2,0 с$^{-1}$.

22.1.2. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону $x=2\sin\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left[\pi\left(\frac{t}{4}+\frac{1}{2}\right)\right]$, где x – в см; t – в с. Определите амплитуду колебаний A, начальную фазу φ_0, период колебаний T.

Ответ: A = 2 см; $\varphi_0 = \pi/2$; T = 8 с.

22.1.3. Амплитуда гармонических колебаний материальной точки A = 2 см, полная энергия колебаний $W = 3\cdot10^{-7}$ Дж. При каком смещении от положения равновесия на колеблющуюся точку действует сила $F = 2{,}25\cdot10^{-5}$ Н?

Ответ: $x = FA^2\big/\left(2W\right) = 1{,}5\cdot10^{-2}$ м.

22.1.4. Уравнение колебания материальной точки массой m = $= 1{,}6\cdot10^{-2}$ кг имеет вид $x = 0{,}1\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{8}t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ м. Построить график зависимости от времени t (в пределах одного периода) силы F, действующей на точку. Найти значение максимальной силы.

Ответ: $F_{\max} = m\omega^2 A = 2{,}46\cdot10^{-4}$ Н.

22.1.5. Начальная фаза φ_0 гармонического колебания равна нулю. При смещении точки от положения равновесия, равном x_1 = 2,4 см, скорость точки равна υ_1 = 3 см/с, а при смещении, равном x_2 = 2,8 см, скорость равна υ_2 = 2 см/с. Найти амплитуду и период этого колебания.

Ответ: $A = \sqrt{\dfrac{v_1^2x_2^2 - v_2^2x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}} = 3{,}1\cdot10^{-2}$ м; $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{x_2^2 - x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}} = 4{,}1$ с.

22.1.6. Написать уравнение гармонического колебательного движения, если максимальное ускорение точки $a_{\max}$ = 49,3 см/с^2, период колебания T = 2 с и смещение точки от положения равновесия в начальный момент времени x_0 = 25 мм.

Ответ: $A = \dfrac{a_{\max}T^2}{4\pi^2} = 5{,}0$ см; $\varphi_0 = \arcsin\dfrac{x_0}{A} = \dfrac{\pi}{6}$; $x = 5\cdot\sin\left(\pi t - \dfrac{\pi}{6}\right)$ см.

22.1.7. Материальная точка совершает гармонические колебания. В некоторый момент времени смещение точки равняется x = 5 см, скорость ее υ = 20 см/с и ускорение a = –80 см/с^2. Найти: циклическую частоту ω и период T колебаний, амплитуду A колебаний и фазу φ колебаний в рассматриваемый момент времени.

Ответ: $\omega = \sqrt{-\dfrac{a}{x}} = 4$ с$^{-1}$; $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 1{,}57$ с;

$A = \sqrt{x^2 + \dfrac{\upsilon^2}{\omega^2}} = 7{,}07$ см; $\varphi = \arcsin\dfrac{x}{A} = \dfrac{\pi}{4}$.

22.1.8. Как изменится период колебаний маятника при переносе его с Земли на Луну?

Ответ: $T_{\text{Л}}/T_{\text{З}} = \sqrt{g_{\text{З}}/g_{\text{Л}}} = 2{,}46$.

22.1.9. Математический маятник длиной l = 1 м установлен в лифте. Лифт поднимается с ускорением a = 2,5 м/с^2. Определить период колебания маятника.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g+a}} = 1{,}8$ с.

22.1.10. Математический маятник длиной l = 50 см колеблется в кабине самолета. Каков период его колебаний, если самолет: а) движется равномерно; б) летит горизонтально с ускорением a = 2,5 м/с^2; в) планирует равномерно вниз под углом α = 15° к горизонту?

Ответ: $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} = 1{,}42$ с; $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{g^2+a^2}}} = 1{,}4$ с; $T_3 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} = 1{,}42$ с.

22.1.11. За две минуты маятник совершил N_1 = 120 колебаний. Когда длину маятника увеличили на Δl = 74,7 см, то он за то же время совершил N_2 = 60 колебаний. Найти начальную и конечную длину маятника и ускорение свободного падения в этом месте.

Ответ: $l_1 = g\left(\dfrac{t}{\pi N_1}\right)^2 = 24{,}9$ см; $l_2 = l_1 + \Delta l = 99{,}6$ см; $g = \dfrac{4\pi^2 N_1^2 N_2^2 \Delta l}{t^2(N_1^2 - N_2^2)} = 9{,}82$ м/с.

22.1.12. Найти амплитуду A, период T, частоту ν и начальную фазу φ_0 колебания, заданного уравнением $x = 5\cdot\sin\left(\dfrac{39{,}2t+5{,}2}{5}\right)$ см.

Ответ: $x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$. A = 5 см; T = 0,8 с; ν = 1,25 Гц; φ_0 = 1,04 рад.

22.1.13. Однородный диск радиуса R колеблется около горизонтальной оси, проходящей через одну из образующих цилиндрической поверхности диска. Каков период его колебаний?

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{3R/(2g)}$.

22.1.14. К пружине подвешена чашка весов с гирями. Период вертикальных колебаний чашки равен T_1. После того как на чашку положили добавочные гири, период вертикальных колебаний стал равен T_2. На сколько удлинилась пружина от прибавления добавочного груза?

Ответ: $\Delta x = \dfrac{g}{4\pi^2}\left(T_2^2 - T_1^2\right)$.

22.1.15. Частота ν электрических колебаний в контуре оказалась 1,0 МГц. Емкость конденсатора C = 200 пФ. Какова индуктивность катушки?

Ответ: $L = 1\Big/\left(4\pi^2\nu^2 C\right) = 127$ мкГн.

22.1.16. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C = 2,0 пФ и катушки с индуктивностью L = 0,50 мкГн. Какова частота колебаний в контуре?

Ответ: $\nu = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 159$ МГц.

22.1.17. В колебательном контуре происходят свободные колебания. Зная, что максимальный заряд конденсатора q_m = $1\cdot10^{-6}$ Кл, а максимальный ток I_m = 10 А, найти длину волны этого контура.

Ответ: $\lambda = \dfrac{2\pi c q_m}{I_m} = 188$ м.

22.1.18. Катушка, индуктивность которой L = $3\cdot10^{-5}$ Гн, присоединена к плоскому конденсатору с площадью пластин S = 100 см^2. Расстояние между пластинами d = 0,1 мм. Чему равна относительная диэлектрическая проницаемость ε среды между пластинами конденсатора, если контур резонирует на волну длиной λ = 750 м?

Ответ: $\varepsilon = \dfrac{\lambda^2 d}{4\pi^2\varepsilon_0 c^2 LS} = 6$.

22.1.19. Какую индуктивность надо включить в колебательный контур, чтобы при емкости C = 2 мкФ получить звуковую частоту ν = $1\cdot10^3$ Гц? Сопротивлением контура пренебречь.

Ответ: $L = \dfrac{1}{4\pi^2\nu^2 C} = 12{,}7$ мГн.

22.1.20. Уравнение изменения со временем разности потенциалов на обкладках конденсатора в колебательном контуре дано в виде U = = $50\cos(10^4\pi t)$ В. Емкость конденсатора C = $1\cdot10^{-7}$ Ф. Найти: 1) период колебаний; 2) индуктивность контура; 3) закон изменения со временем силы тока в цепи; 4) длину волны, соответствующую этому контуру.

Ответ: $T = 2\pi/\omega = 2\cdot10^{-4}$ с; $L = 1\big/\left(\omega^2 C\right) = 10{,}13$ мГн;

$I_C = U_m\omega C\sin(\omega t) = -157\sin(10^4\pi t)$ мА; $\lambda = 2\pi c/\omega = 6\cdot10^4$ м.

22.1.21. Уравнение изменения силы тока в колебательном контуре со временем дается в виде I = $-0{,}02\sin(400\pi t)$ А. Индуктивность контура L = 1 Гн. Найти: 1) период колебаний; 2) емкость контура; 3) максимальную разность потенциалов на обкладках конденсатора; 4) максимальную энергию магнитного поля; 5) максимальную энергию электрического поля.

Ответ: $T = 2\pi/\omega = 5$ мс; $C = 1\big/\left(\omega^2 L\right) = 0{,}63$ мкФ; $U_m = I_m\big/\left(\omega C\right) = 25{,}3$ В;

$W_M = LI_m^2/2 = 0{,}2$ мДж; $W_E = CU_m^2/2 = 0{,}2$ мДж.

22.1.22. Чему равно отношение энергии магнитного поля колебательного контура к энергии его электрического поля для момента $t = T/8$ с?

Ответ: $W_M / W_E = \mathrm{tg}^2(2\pi t/T) = 1$.

22.1.23. Колебательный контур состоит из индуктивности и двух одинаковых конденсаторов, включенных параллельно. Период колебания контура T_1 = 20 мкс. Чему будет равен период, если конденсаторы включить последовательно?

Ответ: $T_2 = T_1/2$ = 10 мкс.

22.1.24. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью L = 1 мГн и воздушного конденсатора, обкладка которого – две круглые пластины диаметром D = 20 см каждая. Расстояние между пластинами d = 1 см. Определите период колебательного контура.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{L\dfrac{\varepsilon_0 D^2}{4d}} = 1{,}05$ мкс.

22.1.25. Максимальный заряд на обкладках конденсатора колебательного контура $q_m = 1\cdot10^{-6}$ Кл. Амплитудное значение силы тока в контуре $I_m = 1\cdot10^{-3}$ А. Определить период колебаний.

Ответ: $T = 2\pi q_m / I_m = 6{,}28$ мс.

22.2.1. Математический маятник длиной l = 0,5 м, выведенный из положения равновесия, отклонился при первом колебании на x_1 = 5 см, а при втором (в ту же сторону) – на x_2 = 4 см. Найти время релаксации, т.е. время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшится в e раз, где e – основание натуральных логарифмов.

Ответ: $\tau = 2\pi \ln^{-1}(x_1/x_2)\sqrt{l/g} = 6{,}4$ с.

22.2.2. Уравнение затухающих колебаний дано в виде $x = 5e^{-0{,}25t}\sin(\pi t/2)$ (м). Найти скорость колеблющейся точки в моменты времени: $t_1 = 0$, $t_2 = T$, $t_3 = 2T$.

Ответ: $\upsilon = 5e^{-0{,}25t}\left[\dfrac{\pi}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right) - 0{,}25\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)\right]$;

υ_1 = 7,85 м/с; υ_2 = 2,88 м/с; υ_1 = 1,06 м/с.

22.2.3. Логарифмический декремент колебаний δ маятника равен 0,003. Определить число N полных колебаний, которые должен сделать маятник, чтобы амплитуда A уменьшилась в 2 раза.

Ответ: $N = \dfrac{\ln 2}{\delta} = 231$.

22.2.4. Математический маятник длиной l = 1,2 м колеблется в среде с малым сопротивлением. Считая, что сопротивление среды не влияет на период колебания маятника, найти коэффициент затухания β и логарифмический декремент затухания δ, если за t_1 = 8 мин амплитуда колебаний маятника уменьшилась в три раза.

Ответ: $\beta = \dfrac{\ln 3}{t_1} = 2,3\cdot 10^{-3}\,\text{с}^{-1}$; $\delta = 2\pi\beta\sqrt{\dfrac{l}{g}} = 5,05\cdot 10^{-3}$.

22.2.5. Гиря массой m = 500 г подвешена к спиральной пружине жесткостью k = 0,2 Н/см и совершает упругие затухающие колебания. Логарифмический декремент затухания δ = 0,004. Сколько колебаний N должна совершить гиря, чтобы амплитуда колебаний уменьшилась в два раза? За какой промежуток времени t произойдет это уменьшение?

Ответ: $N = \dfrac{\ln 2}{\delta} = 173$; $t = 2\pi\dfrac{\ln 2}{\delta}\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 172$ с.

22.2.6. Чему равен логарифмический декремент затухания δ математического маятника, если за t = 1 мин амплитуда A колебаний уменьшилась в два раза? Длина маятника l = 1 м.

Ответ: $\delta = 2\pi\dfrac{\ln 2}{t}\sqrt{\dfrac{l}{g}} = 0,023$.

22.2.7. Тело массой m = 5 г совершает затухающие колебания. В течение времени t = 50 с тело потеряло η = 0,60 своей энергии. Определить коэффициент сопротивления r.

Ответ: $r = -\dfrac{m}{t}\ln(1-\eta) = 9,16\cdot 10^{-5}\,\text{кг/с}$.

22.2.8. Амплитуда затухающих колебаний математического маятника за t_1 = 60 с уменьшилась в n_1 = 2 раза. Во сколько раз она уменьшится за t_2 = 180 с?

Ответ: $n_2 = n_1^{t_2/t_1} = 8$.

22.2.9. К вертикально висящей пружине подвешивают груз. Оттягивая этот груз и опуская его, заставляют груз совершать колебания. Чему должен быть равен коэффициент затухания β, чтобы колебания прекратились через t = 10 с (считать условно, что колебания прекратились, если их амплитуда упала до 0,01 от начальной)?

Ответ: $\beta = \dfrac{\ln 100}{t} = 0,46$.

22.2.10. Логарифмический декремент затухания системы $\delta = 0{,}01$. Найти число N полных колебаний системы, в течение которых энергия системы уменьшилась в $n = 2$ раза.

Ответ: $N = \ln n/(2\delta)$.

22.2.11. Период затухающих колебаний $T = 4$ с, логарифмический декремент затухания $\delta = 1{,}6$. Начальная фаза φ_0 равна нулю. Смещение x_1 точки при $T/4$ равно 4,5 см. Написать уравнение движения этого колебания.

Ответ: $x = 0{,}067e^{-0{,}4t} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ м.

22.2.12. Математический маятник длиной в $l = 24{,}7$ см совершает затухающие колебания. Через сколько времени энергия колебаний маятника уменьшится в $W_0/W = 9{,}4$ раза? Задачу решить при значении логарифмического декремента затухания: $\delta_1 = 0{,}01$ и $\delta_2 = 1$.

Ответ: $t = \frac{\pi}{\delta}\ln\left(\frac{W_0}{W}\right)\sqrt{\frac{l}{g}}$; $t_1 = 112$ с; $t_2 = 1{,}12$ с.

22.2.13. Математический маятник совершает затухающие колебания с логарифмическим декрементом затухания δ, равным 0,2. Во сколько раз уменьшится полное ускорение маятника в его крайнем положении за одно колебание?

Ответ: $n = e^{\delta} = 1{,}22$.

22.2.14. Амплитуда A затухающих колебаний математического маятника за $t_1 = 1$ мин уменьшилась вдвое. Во сколько раз она уменьшится за $t_2 = 3$ мин?

Ответ: $n_2 = n_1^{t_2/t_1} = 8$.

22.2.15. К вертикально висящей пружине подвешивают груз. При этом пружина удлиняется на $x_0 = 9{,}8$ см. Оттягивая этот груз вниз и отпуская его, заставляют груз совершать колебания. Чему должен быть равен коэффициент затухания β, чтобы: 1) колебания прекратились через $t_1 = 10$ с (считать условно, что колебания прекратились, если амплитуда упала до 0,01 от начальной величины); 2) груз возвращался в положение равновесия апериодически; 3) логарифмический декремент затухания был равен 6?

Ответ: $\beta_1 = \frac{1}{t_1}\ln\frac{A_0}{A} = 0{,}46\ \text{с}^{-1}$; $\beta_2 = \omega_0 = \sqrt{g/x_0} = 10\ \text{с}^{-1}$;

$$\beta_3 = \delta\sqrt{\frac{g}{x_0(4\pi^2 + \delta^2)}} = 6{,}9\ \text{с}^{-1}.$$

22.2.16. Период T_0 собственных колебаний системы равен 1 с, а логарифмический декремент $\delta = 0{,}628$. Каков период T затухающих колебаний системы?

Ответ: $T = \dfrac{T_0}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 + \delta^2} = 1{,}006$ с.

22.2.17. Чему равна частота свободных колебаний в контуре, состоящем из емкости $C = 2{,}2$ мкФ, индуктивности $L = 0{,}12$ Гн и активного сопротивления $R = 15$ Ом?

Ответ: свободных колебаний в контуре нет.

22.2.18. Затухающие колебания в контуре происходят с частотой $\nu =$ $= 250$ кГц. Определить емкость в контуре, если индуктивность в нем $L = 0{,}024$ мГн и активное сопротивление $R = 34$ Ом.

Ответ: $C = \dfrac{4L}{16\pi^2\nu^2L^2 + R^2} = 14$ нФ.

22.2.19. Какой длины волны будут создавать в вакууме колебания, которые происходят в контуре с емкостью $C = 2400$ пФ, индуктивностью $L =$ $= 0{,}054$ мГн и активным сопротивлением $R = 76$ Ом?

Ответ: $\lambda = 2\pi c \Big/ \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}} = 701$ м.

22.2.20. Определить период колебаний в контуре, состоящем из конденсатора емкостью $C = 0{,}064$ мкФ, катушки с индуктивностью $L = 0{,}18$ мГн и активным сопротивлением $R = 50$ Ом.

Ответ: $T = 2\pi \Big/ \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}} = 24{,}2$ мкс.

22.2.21. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 2{,}22\cdot 10^{-9}$ Ф и катушки, намотанной из медной проволоки диаметром $d = 0{,}5$ мм. Длина катушки $l = 20$ см. Найти логарифмический декремент затухания колебаний.

Ответ: $\delta = \dfrac{8\rho_{Cu}}{d^2}\sqrt{\dfrac{\pi\, lC}{\mu\mu_0}} = 0{,}018$.

22.2.22. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 0{,}2$ мкФ и катушки индуктивностью $L = 5{,}07\cdot 10^{-3}$ Гн. 1) При каком логарифмическом декременте δ затухания разность потенциалов на обкладках конденсатора за $t = 1\cdot 10^{-3}$ с уменьшится в три раза? 2) Чему при этом равно сопротивление R контура?

Ответ: $\delta = \dfrac{2\pi}{t}\sqrt{LC}\cdot \ln\dfrac{U_0}{U} = 0{,}22$; $R = \dfrac{\delta}{\pi}\sqrt{\dfrac{L}{C}} = 11{,}2$ Ом.

22.2.23. Колебательный контур имеет емкость $C = 1{,}1 \cdot 10^{-9}$ Ф и индуктивность $L = 5 \cdot 10^{-3}$ Гн. Логарифмический декремент затухания δ равен 0,005. За сколько времени потеряется вследствие затухания 0,99 энергии контура ($E_0/E = 100$)?

Ответ: $t = 2\pi\sqrt{LC} \cdot \ln\left(\sqrt{E_0/E}\right)\Big/\delta = 6{,}8$ мс

22.2.24. Колебательный контур состоит из емкости $C = 0{,}405$ мкФ, индуктивности $L = 1 \cdot 10^{-2}$ Гн и сопротивления $R = 2$ Ом. Найти, во сколько раз уменьшится разность потенциалов на обкладках конденсатора за время одного периода.

Ответ: $\dfrac{U_0}{U} = e^{\delta} \approx \exp\left(\pi\sqrt{CR^2/L}\right) = 1{,}04$.

22.2.25. Параметры некоторого колебательного контура имеют значения: $C = 4$ мкФ; $L = 0{,}1$ мГн; $R = 1$ Ом. Чему равна добротность контура Q? (Добротность контура при малых значениях логарифмического декремента δ $Q = \pi/\delta$).

Ответ: $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} = 5$.

23. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ. РЕЗОНАНС

Основные формулы и обозначения

Уравнение вынужденных колебаний в LCR-цепи

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=\mathcal{E}(t),$$

если $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0\cos\omega t$, то $q = q_a\cos(\omega t - \alpha)$; ω – частота внешней вынужденной силы; $q_a=\dfrac{\mathcal{E}_0/L}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}$ – амплитуда вынужденных колебаний заряда; $\omega_0^2=\dfrac{1}{LC}$ – условие резонанса; $\beta=\dfrac{R}{2L}$; $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$.

Сдвиг фаз вынужденного колебания $\alpha=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2\omega\beta}{\omega_0^2-\omega^2}$.

Амплитуда тока $I_a=q_a\omega=\dfrac{\mathcal{E}_0\omega/L}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\omega^2\beta^2}}$.

Амплитуда тока при резонансе $I_{a0}=\dfrac{\mathcal{E}_0}{R}$.

Амплитуда напряжения на конденсаторе

$$V_a=\frac{q_a}{C}=\frac{\mathcal{E}_0}{LC\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\omega^2\beta^2}}.$$

Амплитуда напряжения на конденсаторе при резонансе

$$V_{a0}=\frac{I_{a0}}{\omega_0 C}.$$

Добротность колебательного контура $Q=\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

При отсутствии потерь ($\beta = 0$, $R = 0$) $q_a=\dfrac{\mathcal{E}_0/L}{\left|\omega_0^2-\omega^2\right|}$.

Резонансная частота для заряда и напряжения на конденсаторе

$$\omega_{q\text{ рез}}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}.$$

Резонансная амплитуда колебаний заряда

$$q_{\text{рез}} = \frac{\mathscr{E}_0}{2L\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Периодические затухающие колебания заряда в LCR-цепи при $\beta < \omega_0$ (или $R^2C/(4L) < 1$)

$$q(t) = q_0\, e^{-\beta t}\cdot\cos(\omega t + \delta).$$

Амплитуда вынужденных механических колебаний

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\beta^2}};\ \beta = \frac{r}{2m};\ \ \omega_0^2 = \frac{k}{m};\ \ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2},$$

где m – масса колеблющегося тела; r – коэффициент сопротивления среды; k – коэффициент упругости.

Задачи с решениями

Задача 1. Определить амплитуду напряжения на конденсаторе V_{a0} и амплитуду тока I_{a0} в цепи приемной антенны телевизора на резонансной частоте ν_0 = 188 МГц, если амплитуда входного сигнала $\mathscr{E}_0$ = 100 мкВ, индуктивность катушки L = 1,26 мкГн, сопротивление R = 20 Ом, емкость конденсатора C = 0,567 пФ.

Дано:

$\nu_0 = 1{,}88\cdot10^8$ Гц

$\mathscr{E}_0 = 1\cdot10^{-4}$ В

$L = 1{,}26\cdot10^{-6}$ Гн

$R = 20$ Ом

$C = 5{,}67\cdot10^{-13}$ Ф

V_{a0} – ? I_{a0} – ?

Решение: Амплитуда тока в цепи, изображенной на рисунке 23.1, равна

$$I_a = q_a\omega = \frac{\mathscr{E}_0\omega/L}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

По условию задачи речь идет о резонансе, т.е. $\omega = \omega_0$.

$$I_{a0} = \frac{\mathscr{E}_0}{L\cdot 2\beta} = \frac{\mathscr{E}_0}{R} = \frac{1\cdot10^{-4}}{20} = 5\cdot10^{-6}\text{ А}.$$

Амплитуда напряжения на конденсаторе равна

$$V_a = \frac{q_a}{C} = \frac{\mathscr{E}_0}{LC\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\beta^2}}.$$

Амплитуда при резонансе

$$V_{a0} = \frac{\mathscr{E}_0}{CL\cdot 2\omega_0} = \frac{\mathscr{E}_0}{R\omega_0 C} = \frac{I_{a0}}{2\pi\nu_0 C};$$

$$V_{a0} = \frac{5\cdot10^{-6}}{2\pi\cdot1{,}88\cdot10^8\cdot5{,}67\cdot10^{-13}} = 7{,}46\cdot10^{-3}\text{ В}.$$

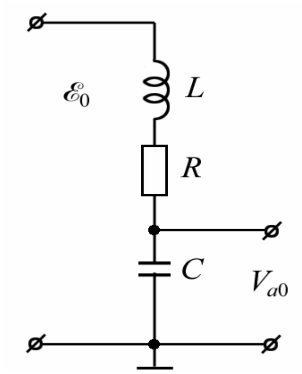


Рис. 23.1

Ответ: V_{a0} = 7,46 мВ; I_{a0} = 5 мкА.

Задача 2. При включении катушки в цепь постоянного тока с напряжением 12 В амперметр показал силу тока 4,0 А. При включении той же катушки в цепь переменного тока с частотой 50 Гц и напряжением 12 В амперметр показал ток 2,4 А. Определить индуктивность катушки. Чему будет равна активная мощность тока в цепи, если последовательно с катушкой включить конденсатор емкостью 394 мкФ?

Дано:
$U_{пост} = 12$ В
$I_{пост} = 4$ А
$U_{перем} = 12$ В
$I_{перем} = 2,4$ А
$\nu = 50$ Гц
$C = 3,94\cdot10^{-4}$ Ф

L – ? P – ?

Решение: Так как при постоянном токе реактивное сопротивление отсутствует, то в этом случае по закону Ома можно найти активное сопротивление катушки $R = U_{пост}/I_{пост} = 12/4 = 3$ Ом.

При переменном токе с помощью того же закона можно найти полное сопротивление катушки:

$$Z_k = \frac{U_{перем}}{I_{перем}} = \frac{12}{2,4} = 5 \text{ Ом.}$$

Полное сопротивление катушки

$$Z_k = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{R^2 + X_L^2}.$$

Определим сопротивление X_L и индуктивность L катушки, а также сопротивление X_C конденсатора

$$X_L = \sqrt{Z_k^2 - R^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ Ом;}$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{X_L}{2\pi\nu} = \frac{4}{2\cdot3,14\cdot50} = 0,0127 \text{ Гн} = 12,7 \text{ мГн;}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\nu C} = \frac{1}{2\cdot3,14\cdot50\cdot3,94\cdot10^{-4}} = 8 \text{ Ом.}$$

Нужный для вычисления коэффициент мощности определяется следующим образом:

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + (8-4)^2}} = 0,6.$$

Активная мощность тока

$$P = U_{перем} I_{перем} \cos\varphi = 12\cdot2,4\cdot0,6 = 17,3 \text{ Вт}$$

или

$$P = I^2_{перем} R = 2,4^2\cdot3 = 17,3 \text{ Вт.}$$

Ответ: $L = 12,7$ мГн; $P = 17,3$ Вт.

Задача 3. Колебательный контур состоит из соединенных последовательно батареи конденсаторов и дросселя, активное сопротивление которого равно $R = 100$ Ом, а индуктивность $L = 0,05$ Гн. Резонансная частота контура $\nu_р = 600$ Гц. Каково полное сопротивление Z цепи для переменного тока, если его частота $\nu = 50$ Гц?

Дано:	
R = 100 Ом	
L = 0,05 Гн	
$\nu_р$ = 600 Гц	
ν = 50 Гц	
Z – ?	

Решение: Полное сопротивление цепи равно

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

где R – ее активное сопротивление; C – емкость; L – индуктивность; ω – циклическая частота переменного тока, равная $2\pi\nu$.

Таким образом,

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2\pi\nu C} - 2\pi\nu L\right)^2}.$$

Резонансная частота ν_p контура, которая находится из условия $2\pi\nu_p L - \frac{1}{2\pi\nu_p C} = 0$, равна $\nu_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, что позволяет найти C. Поэтому, с учетом, что $(\nu_р/\nu)^2 >> 1$, имеем

$$Z = \sqrt{R^2 + \left[2\pi\nu L\left(\nu_p^2/\nu^2 - 1\right)\right]^2} \approx \sqrt{R^2 + \left[2\pi\nu L\left(\nu_p/\nu\right)^2\right]^2};$$

$$Z = \sqrt{100^2 + \left[2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}05 \cdot \left(600/50\right)^2\right]^2} = 2264 \text{ Ом}.$$

Ответ: Z = 2264 Ом.

Задача 4. Груз массой m = 3 кг, подвешенный на пружине, коэффициент упругости которой k = 0,05 Н/см, помещен в масло. Коэффициент сопротивления в масле r = 0,5 кг/с. На верхний конец пружины действует вынуждающая сила, меняющаяся по закону $F = 0{,}1 \cdot \sin\omega t$ (Н). При какой частоте вынуждающей силы амплитуда вынужденных колебаний будет максимальна? Чему равна максимальная амплитуда? Какова амплитуда вынужденных колебаний, если частота вынуждающей силы вдвое больше (меньше) резонансной?

Дано:
m = 3 кг
k = 5 Н/м
r = 0,5 кг/с
F_0 = 0,1 Н
$\omega_р$ – ? A_{max} – ?
$A_{1/2}$ – ? A_2 – ?

Решение: Вынужденные колебания совершаются с частотой вынуждающей силы. Амплитуда вынужденных колебаний определяется формулой

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \qquad (1)$$

где ω – частота вынужденных колебаний; ω_0 – собственная частота маятника; β – коэффициент затухания.

Резонанс наступает тогда, когда

$$\omega_р^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2. \qquad (2)$$

Если $\beta \ll \omega_0$, то можно считать, что резонанс наступает при

$$\omega_р = \omega_0. \qquad (3)$$

Прежде всего, следует по данным задачи рассчитать значения ω и β. Все остальные искомые величины могут быть получены непосредственно с помощью формул (1) и (2) или (3).

Расчет показывает, что

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5}{3}} \approx 1,29\ \text{с}^{-1}; \qquad \beta = \frac{r}{2m} = \frac{0,5}{2\cdot 3} = 0,083\ \text{с}^{-1}.$$

Следовательно, ошибка, совершенная при расчете резонансной частоты по формуле (3), будет составлять всего лишь ~ 0,4 %. Действительно

$$\frac{\Delta\omega^2}{\omega^2} = \frac{2\beta^2}{\omega_0^2} = \frac{2\cdot 0,083^2}{1,29^2} = 0,0083,$$

а так как $\dfrac{\Delta\omega^2}{\omega^2} = \dfrac{2\Delta\omega}{\omega}$, то $\dfrac{\Delta\omega}{\omega} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta\omega^2}{\omega^2} = \dfrac{0,0083}{2} = 0,0041 \approx 0,4\%$.

Поэтому можно считать, что амплитуда колебаний примет максимальное значение при $\omega_р = \omega_0 = 1,29$ с$^{-1}$.

Максимальное значение амплитуды при этом

$$A_{max} = \frac{F_0}{m\cdot 2\beta\omega_р} = \frac{0,1}{3\cdot 2\cdot 0,083\cdot 1,29} \approx 0,16\ \text{м} = 16\ \text{см}.$$

Если $\omega = \omega_0/2$, то $A_{1/2} = \dfrac{F_0}{m\sqrt{\left(3\omega_0^2/4\right)^2 + \beta^2\omega_0^2}}$.

Вынося ω_0 из-под знака радикала и учитывая, что $\beta^2 \ll \omega_0^2$, получим

$$A_{1/2} = \frac{4F_0}{3m\omega_0^2} = \frac{4\cdot 0,1}{3\cdot 3\cdot 1,29^2} = 0,027\ \text{м} = 2,7\ \text{см}.$$

Для частоты $\omega = 2\omega_0$ $A_2 = \dfrac{F_0}{3m\omega_0^2} = \dfrac{A_{1/2}}{4} = \dfrac{2,7}{4} \approx 0,7$ см.

Ответ: $\omega_р = 1,29$ с$^{-1}$; $A_{max} = 16$ см; $A_{1/2} = 2,7$ см; $A_2 = 0,7$ см.

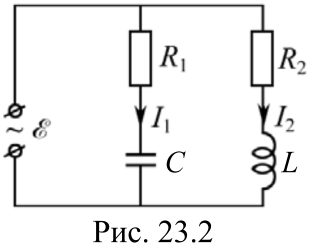


Рис. 23.2

Задача 5. Определить амплитуды токов I_1 и I_2 в цепи (рис. 23.2), если R_1 = 10 Ом, R_2 = = 20 Ом, L = 0,005 Гн, C = 20 мкФ. Если напряжение на клеммах источника изменяется по закону $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0\sin\omega t$, $\mathcal{E}_0$ = 10 В, ν = 5 кГц.

Дано:	
$R_1 = 10$ Ом	
$R_2 = 20$ Ом	
$L = 5\cdot10^{-3}$ Гн	
$C = 2\cdot10^{-5}$ Ф	
$\mathcal{E}_0 = 10$ В	
$\nu = 5\cdot10^{3}$ Гц	
I_{01} – ? I_{02} – ?	

Решение: Применим уравнение вынужденных колебаний в LCR-цепи $L\dfrac{d^2q}{dt^2} + R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{C} = \mathcal{E}_0 \sin\omega t.$

Решение имеет вид

$q = q_a\sin(\omega t - \alpha)$, где

$$q_a = \frac{\mathcal{E}_0/L}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}};\ \ \omega_0^2 = \frac{1}{LC};\ \beta = \frac{R}{2L};\ \ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Токи I_1 и I_2 в цепи (рис. 23.2) не зависят друг от друга. Запишем два независимых уравнения

$$R_1\frac{dq_1}{dt} + \frac{q_1}{C} = \mathcal{E}_0 \sin\omega t; \qquad (1)$$

$$L\frac{d^2q_2}{dt^2} + R_2\frac{dq_2}{dt} = \mathcal{E}_0 \sin\omega t. \qquad (2)$$

Решение уравнения (1), с учетом, что $I = dq/dt$, позволяет определить амплитуду вынужденных колебаний тока в цепи RC

$$I_{01} = q_{01}\omega = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R_1^2 + \left(1/\omega C\right)^2}},\ \text{где } \omega = 2\pi\nu.$$

Вычисляем: $I_{01} = \dfrac{10}{\sqrt{10^2 + 1\Big/\left(2\pi\cdot5\cdot10^3\cdot2\cdot10^{-5}\right)^2}} = 0{,}99$ А.

Аналогично из уравнения (2), определим амплитуду тока I_2

$$I_{02} = q_{02}\omega = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R_2^2 + \left(\omega L\right)^2}} = \frac{10}{\sqrt{20^2 + \left(2\pi\cdot5\cdot10^3\cdot5\cdot10^{-3}\right)^2}} = 0{,}063\ \text{А}.$$

Мгновенные значения токов

$$I_1 = 0{,}99\sin(2\pi\nu t - \alpha_1);\quad I_2 = 0{,}06\sin(2\pi\nu t - \alpha_2).$$

Ответ: $I_{01} = 0{,}99$ А; $I_{02} = 0{,}063$ А.

Примечание. Обычно для решения простых цепей сразу применяют закон Ома в виде $I_0 = \mathcal{E}_0/Z$. В нашем случае сопротивление R_1C цепи $Z_1 = \sqrt{R_1^2 + \left(1/\omega C\right)^2} = 10{,}1$ Ом, для R_2L цепи $Z_2 = \sqrt{R_2^2 + \left(\omega L\right)^2} = 157{,}4$ Ом. Тогда $I_{01} = \mathcal{E}_0/Z_1 = 10/10{,}1 = 0{,}99$ А; $I_{02} = \mathcal{E}_0/Z_2 = 10/157{,}4 = 0{,}063$ А.

Задача 6. В электрической цепи, состоящей из конденсатора C и сопротивления $R = 10$ Ом, источником тока служит генератор ($\mathcal{E} = \mathcal{E}_0\cos\omega t$) с амплитудой напряжения $\mathcal{E}_0 = 10$ В. Амплитуда установившегося тока I_0 оказалась равной 0,6 А. Найти разность фаз между током и внешним напряжением.

Дано:	
R = 10 Ом	
$\mathscr{E}_0$ = 10 В	
I_0 = 0,6 А	
α – ?	

Решение: Из условия задачи ясно, что $I = I_0\cos(\omega t+\alpha)$, где
$$\operatorname{tg}\alpha = 1/(\omega CR). \quad (1)$$
$$I_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R^2+(1/\omega C)^2}}. \quad (2)$$

Таким образом, решение задачи сводится к определению C.

Из (2) находим $C = \dfrac{1}{\omega\sqrt{(\mathscr{E}_0/I_0)^2 - R^2}}$ и подставляем в (1), получим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\omega CR} = \sqrt{\left(\frac{\mathscr{E}_0}{I_0R}\right)^2 - 1} = \sqrt{\left(\frac{10}{0,6\cdot 10}\right)^2 - 1} = 1{,}33,\ \alpha = 53°.$$

Ток опережает по фазе внешнее напряжение на 53°.

Ответ: α = 53°.

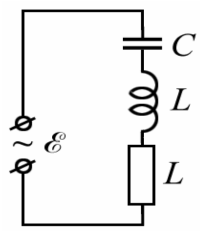


Рис. 23.3.1

Задача 7. На рис. 23.3.1 показана цепь, содержащая конденсатор, катушку индуктивности с активным сопротивлением и источником $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0\sin\omega t$. Частоту ω можно изменять так, что $\mathscr{E}_0$ = const. При частотах ω_1 и ω_2 амплитуды силы тока I_{01} и I_{02} равны. Найти резонансную частоту $\omega_{рез}$ тока, если ν_1 = 10 МГц; ν_2 = 14,4 МГц .

Дано:
$\nu_1 = 1\cdot 10^7$ Гц
$\nu_2 = 1{,}44\cdot 10^7$ Гц
$\omega_{рез}$ – ?

Решение: Нетрудно догадаться, что имеет место ситуация, изображенная на рис. 23.3.2.

Очевидно, что $I_0 = \dfrac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R^2+(\omega L - 1/\omega C)^2}}$.

Амплитуды силы тока I_{01} и I_{02} равны, если выполняется условие
$$\frac{1}{\omega_1 C} - \omega_1 L = \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}. \quad (1)$$

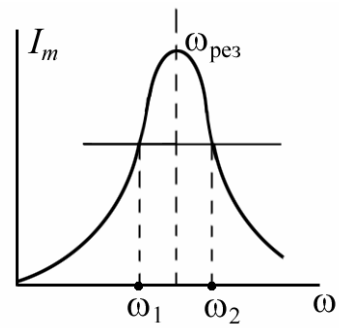


Рис. 23.3.2

С учетом того, что $\omega_{рез}^2 = 1/LC$ уравнение (1) приводим к более удобному виду
$$\frac{\omega_{рез}^2}{\omega_1} - \omega_1 = \omega_2 - \frac{\omega_{рез}^2}{\omega_2};\quad \omega_2 - \omega_1 = \omega_{рез}^2\left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2}\right).$$

Отсюда получаем, что $\omega_{рез} = \sqrt{\omega_1\omega_2}$ или
$$\omega_{рез} = 2\pi\sqrt{\nu_1\nu_2} = 2\pi\sqrt{1\cdot 10^7\cdot 1{,}44\cdot 10^7} = 7{,}74\cdot 10^7\ \text{рад/с}.$$

Ответ $\omega_{рез} = 7{,}74\cdot 10^7$ рад/с.

Задача 8. Тело массой m = 10 г совершает затухающие колебания с коэффициентом затухания β = 1,6 с$^{-1}$. На это тело начала действовать внешняя периодическая сила F, под действием которой установились вынужденные колебания. Уравнение вынужденных колебаний имеет вид $x = 5\sin(10\pi t - 3\pi/4)$ см. Найти уравнение внешней периодической силы.

Дано:
$m = 10^{-2}$ кг
$\beta = 1{,}6$ с$^{-1}$
$x_0 = 5\cdot10^{-2}$ м
$\omega = 10\pi$ с$^{-1}$
$\alpha = -3\pi/4$ рад
$F(t)$ – ?

Решение: По условию сдвиг фаз равен $-3\pi/4$, следовательно,

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \mathrm{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 1, \qquad (1)$$

откуда $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + 2\beta\omega} = \sqrt{(10\pi)^2 + 2\cdot1{,}6\cdot10\pi} = 10{,}5\pi$ рад/с.

Уравнение внешней силы имеет вид

$$F = F_0\sin\omega t.$$

Амплитуда вынужденных механических колебаний равна

$$x_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

Отсюда $F_0 = x_0 m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}$;

$$F_0 = 5\cdot10^{-2}\cdot10^{-2}\cdot\sqrt{\pi^4\left(10{,}5^2 - 10^2\right)^2 + 4\cdot(1{,}6\cdot\pi\cdot10)^2} = 0{,}071 \text{ Н}.$$

Тогда уравнение внешней периодической силы имеет вид

$$F(t) = 71\cdot\sin(10\pi t) \text{ мН}.$$

Ответ: $F(t) = 71\cdot\sin(10\pi t)$ мН.

Задача 9. Тело массой m подвешено на пружине жесткостью k и опущено в жидкость (рис. 23.4). Нерастяжимая нить соединяет груз с электромагнитом, с помощью которого на тело m действует вынуждающая сила $F = F_0 \sin\omega t$. Найти амплитуду смешения, скорость колебаний и резонансную частоту смещения. Коэффициент сопротивления жидкости равен r. Массу системы M, нитей и пружины не учитывать. Вычисления провести для r = 0,30 кг/с, m = 10 г, k = 30 Н/м, ω = 100 рад/с, F_0 = 1,0 Н.

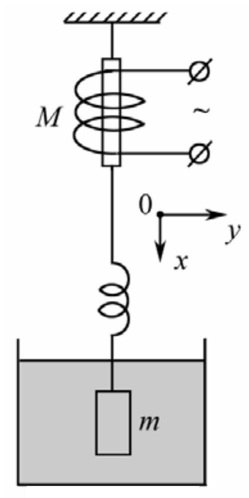


Рис. 23.4

Решение: На тело m действуют вынуждающая сила $F = F_0\sin\omega t$, архимедова сила $F_A = \rho_ж gV$, сила сопротивления $F_r = -r\dfrac{dx}{dt}$, сила упругости пружины $F_k = -kx$, сила тяжести mg. По II закону Ньютона (рис. 23.4)

$$m\frac{dv}{dt} = F_0 \sin \omega t - rv - kx + mg + F_{\text{А}}.$$

Если продифференцировать это уравнение, то можно «убрать» многие «мешающие» величины. Тогда физическая система на рисунке будет описана дифференциальным уравнением второго порядка относительно скорости тела

$$m\ddot{v} + r\dot{v} + kv = F_0 \omega \cos \omega t$$

или

$$\ddot{v} + 2\beta\dot{v} + \omega_0^2 v = \left(F_0 \omega / m\right)\cos \omega t, \tag{1}$$

где $\beta = r/(2m)$; $\omega_0^2 = k/m$.

Решение уравнения (1) хорошо известно и можно воспользоваться «готовыми» формулами:

где $v_0 = \dfrac{\omega F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 + 4\omega^2\beta^2}} = \dfrac{F_0}{\sqrt{r^2+\left(m\omega - k/\omega\right)^2}}$ – амплитуда скорости;

φ – разность фаз между вынуждающей силой и скоростью.

Чтобы найти смещение, проинтегрируем (2)

$$x = \int_0^t v dt = \frac{v_0}{\omega}\int_0^t \cos\left(\omega t - \varphi\right) d\omega t = x_0 \sin\left(\omega t - \varphi\right),$$

$$x_0 = \frac{v_0}{\omega} = \frac{F_0}{\sqrt{r^2\omega^2 + \left(k - m\omega^2\right)^2}}.$$

Резонансная частота

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{2m^2}}.$$

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{2m^2}} = \sqrt{\frac{30}{1\cdot 10^{-2}} - \frac{0,3^2}{2\cdot 10^{-4}}} = 50,5 \text{ рад/с};$$

$$v_0 = \frac{F_0}{\sqrt{r^2 + \left(m\omega - k/\omega\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0,3^2 + \left(0,01\cdot 100 - 30/100\right)^2}} = 1,31 \text{ м/с};$$

$$x_0 = v_0/\omega = 1,31/100 = 1,31\cdot 10^{-2} \text{ м} = 1,31 \text{ см}.$$

Ответ: x_0 = 1,31 см; v_0 = 1,31 м/с; $\omega_{\text{рез}}$ = 50,5 рад/с.

Задача 10. Цепь переменного тока (ν = 50 Гц) состоит из катушки индуктивности L и сопротивления R. Определить напряжение на зажимах катушки в момент, когда напряжение на сопротивлении в два раза меньше его максимального значения $U_{R\max} = 6$ В, $R = 10$ Ом, $L = 0{,}01$ Гц.

Дано:	**Решение:** Ясно, что для получения решения нужно записать общие формулы:
$\nu = 50$ Гц	$U_R = RI_0\sin(\omega t - \varphi)$. (1)
$U_{R\max} = 6$ В	Из (1) следует, что $U_{R\max} = RI_0$, но $U_R = RI_0/2$, тогда
$R = 10$ Ом	$RI_0/2 = RI_0\sin(\omega t - \varphi)$;
$L = 0{,}01$ Гц	$\sin(\omega t - \varphi) = 1/2$; $(\omega t - \varphi) = 30°$.
$U_L - ?$	

Следовательно, $$I = \frac{U_{R\max}}{R}\cdot\sin\left(\omega t - \varphi\right).$$

Напряжение на индуктивности равно
$$U_L = L\frac{dI}{dt} = L\frac{U_{R\max}}{R}\cdot\omega\cos\left(\omega t-\varphi\right) = \frac{2\pi\nu L U_{R\max}}{R}\cdot\cos\left(\omega t - \varphi\right).$$

Проведем вычисления:
$$U_L = \frac{2\pi\cdot 50\cdot 10^{-2}\cdot 6}{10}\cdot\cos 30^\circ = 1{,}63 \text{ В}.$$

Ответ: $U_L = 1{,}63$ В.

Задача 11. Вольтметр, подключенный параллельно (рис. 23.5.1) индуктивности и емкости, показывает нуль при значении $C = 20$ мкФ. Найти значения индуктивности, если частота в цепи $\nu = 50$ Гц.

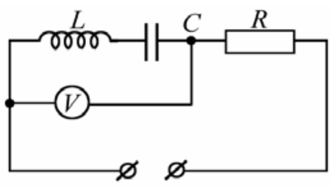


Рис. 23.5.1

Дано:	**Решение:** Очевидно, что вольтметр показывает нуль при резонансе напряжений (рис. 23.5.2), когда
$\nu = 50$ Гц	$U_{Cm} = U_{Lm}$,
$C = 2\cdot10^{-5}$ Ф	где $U_{Cm} = \dfrac{I_m}{\omega C} = \dfrac{I_m}{2\pi\nu C}$; $U_{Lm} = \omega L I_m = 2\pi\nu L I_m$.
$L - ?$	

Емкость и индуктивность включены последовательно, следовательно, в цепи течет один и тот же ток. Ясно, что
$$\frac{1}{2\pi\nu C} = 2\pi\nu L.$$

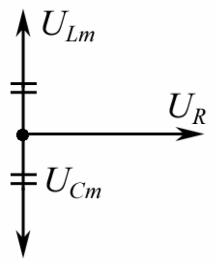


Рис. 23.5.2

Отсюда
$$L = \frac{1}{\left(2\pi\nu\right)^2 C} = \frac{1}{\left(2\pi\cdot 50\right)^2\cdot 2\cdot 10^{-5}} = 0{,}5 \text{ Гн}.$$

Ответ: $L = 0{,}5$ Гн.

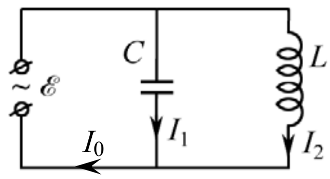


Рис. 23.6

Задача 12. Какой конденсатор нужно включить в цепь, чтобы во внешней неразветвленной цепи (рис. 23.6) амплитуда тока I_0 была равна 0, если L = 0,6 Гн; ν = 100 Гц; $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin\omega t$.

Дано:
ν = 100 Гц
L = 0,6 Гн
C – ?

Решение: По 1-му правилу Кирхгофа $I_0 = I_{01} + I_{02}$.

Следовательно, чтобы амплитуда тока I_0 в общей сети была равна нулю, необходимо, чтобы токи в ветвях I_{01} и I_{02} были противоположны и равны по величине.

Амплитуды токов I_{01} и I_{02} в ветвях равны:

$$I_{01} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R_1^2 + (1/\omega C)^2}} = \mathcal{E}_0 \omega C \text{, т.к. } R_1 = 0;$$

$$I_{02} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \text{, т.к. } R_2 = 0.$$

Так как при резонансе токов $I_{01} = I_{02}$, то

$$\mathcal{E}_0 \omega C = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L}.$$

Отсюда

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{(2\pi\nu)^2 L} = \frac{1}{(2\pi \cdot 100)^2 \cdot 0{,}6} = 4{,}2 \cdot 10^{-6}\ \Phi = 4{,}2\ \text{мкФ}.$$

Ответ: C = 4,2 мкФ.

Задачи для самостоятельного решения

23.1. Активное сопротивление колебательного контура R = 0,33 Ом. Какую мощность P потребляет контур при поддержании в нем незатухающих колебаний с амплитудой тока I_m = 30 мА? Дать развернутый ответ.

Ответ: $P = RI_m^2/2 = 0{,}15$ мВт.

23.2. Переменное напряжение, действующее значение которого U = = 220 В, а частота ν = 50 Гц, подано на катушку без сердечника с индуктивностью L = 31,8 мГн и активным сопротивлением R = 10,0 Ом. Найти количество теплоты, выделяющееся в катушке за секунду.

Ответ: $Q = \frac{U^2 R}{R^2 + (2\pi\nu L)^2} = 2{,}4$ кВт.

23.3. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C = = 10 мкФ, катушки с индуктивностью L = 0,01 Гн и омического сопротивления R = 4 Ом. Какую мощность P должен потреблять контур, чтобы в нем поддерживались незатухающие колебания с амплитудой напряжения U_m = 1 В?

Ответ: $P = \dfrac{U_m^2}{2} \cdot \dfrac{R}{R^2 + L/C} = 2$ мВт.

23.4. Емкость колебательного контура C = 1 мкФ, индуктивность L = = 10 мГн. Какое омическое сопротивление R нужно включить в цепь, чтобы уменьшить резонансную частоту незатухающих колебаний на η = = $1 \cdot 10^{-4}$.

Ответ: $R = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}\left[1-(1-\eta)^2\right]} = 2{,}8$ Ом.

23.5. Индуктивность, емкость и сопротивление колебательного контура равны соответственно L = 1,0 Гн, C = 20 мкФ и R = 10 Ом. При какой частоте внешней ЭДС $\mathcal{E}$ будет достигнут максимум резонанса?

Ответ: $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{2L^2}} = 223{,}5$ рад/с.

23.6. Индуктивность дросселя, включенного последовательно с емкостью C, равна L = 0,05 Гн, его активное сопротивление R = 100 Ом. В контуре возникает резонанс при частоте $\nu_{\text{рез}}$ = 5000 Гц. Найти полное сопротивление Z цепи на частоте ν_1 = 4 кГц.

Ответ: $Z_1 = \sqrt{R^2 + \left[2\pi\nu_1 L\left(\nu_{\text{рез}}^2/\nu_1^2 - 1\right)\right]^2} = 714$ Ом.

23.7. Конденсатор емкостью C = 1 мкФ с зарядом $q = 8 \cdot 10^{-5}$ Кл разряжается на катушку с индуктивностью L = 1,6 Гн и сопротивлением R = = 40 Ом. Определите закон изменения напряжения на конденсаторе.

Ответ: $U_C = \dfrac{q}{C} \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{LC}}\right) = 80 \cdot e^{-12{,}5t}\cos(791t)$, т.к. $R^2C/(4L) < 1$.

23.8. Вычислить амплитуду на конденсаторе приемной антенны телевизора на частоте ν = 194 МГц, если входное переменное напряжение $\mathcal{E}_0$ = 100 мкВ. Емкость конденсатора антенны C = 0,567 пФ, индуктивность L = 1,26 мкГн, ее сопротивление R = 20 Ом. Резонансная частота $\nu_{\text{рез}}$ = 188 МГц.

Ответ: $U_a = \dfrac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{(2\pi\nu RC)^2 + \left(\nu^2/\nu_{\text{рез}}^2 - 1\right)^2}} = 1{,}54$ мВ.

23.9. Найти добротность Q колебательного контура приемной антенны типичного современного домашнего телевизора (резонансная частота контура $\nu_{\text{рез}}$ = 188 МГц). Сравните эту величину со значением $V_{a0}/\mathcal{E}_0$, где V_{a0} – амплитудное значение напряжения на конденсаторе при резонансе. Параметры контура: C = 0,567 пФ; R = 20 Ом; L = 1,26 мкГн.

Ответ: $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} = 74{,}6$; $\dfrac{V_{a0}}{\mathcal{E}_0} = \dfrac{1}{2\pi\nu_{\text{рез}}RC} = 74{,}6$.

23.10. Емкость и индуктивность колебательного контура равны C = = 20 мкФ и L = 1 Гн. Каково активное сопротивление R контура, если максимум резонанса наблюдается при $\nu_{\text{рез}}$ = 35,57 Гц?

Ответ: $R = \sqrt{2L^2\left(\dfrac{1}{LC} - 4\pi^2\nu_{\text{рез}}^2\right)} = 10$ Ом.

23.11. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности L = = 2 мГн, активного сопротивления R = 10 Ом и конденсатора C = 4 мкФ. Найти отношение энергии электрического поля конденсатора в момент максимума тока к энергии магнитного поля катушки.

Ответ: $\dfrac{W_C}{W_L} = \dfrac{CR^2}{L} = 0{,}2$

23.12. Найти время τ, за которое амплитуда колебаний тока в контуре с добротностью Q = 5000 уменьшится в γ = 2 раза, если частота колебаний ν = 2,0 МГц.

Ответ: $\tau = \dfrac{Q}{\pi\nu}\ln\gamma = 0{,}55$ с.

23.13. Дроссель и конденсатор включены последовательно. В контуре возникает резонанс при частоте $\nu_{\text{рез}}$ = 6 кГц. Найти полное сопротивление Z цепи на частоте ν = 6000 Гц, если L = 5 мГн, R = 100 Ом.

Ответ: $Z = \sqrt{R^2 + \left[2\pi\nu L\left(\nu_{\text{рез}}^2/\nu^2 - 1\right)\right]^2} = 100$ Ом.

23.15. Найти полное сопротивление Z участка цепи, состоящей из параллельно включенного конденсатора емкости C = 73 мкФ и активного сопротивления R = 100 Ом, если частота тока в цепи ω = 314 рад/с.

Ответ: $Z = R\big/\sqrt{1 + (\omega RC)^2} = 40$ Ом.

23.16. Какая нужна вынуждающая сила F, чтобы осциллятор массы m с коэффициентом затухания β начал совершать гармонические колебания с собственной частотой ω_0 по закону $x = A\cos(\omega_0 t - \varphi)$?

Ответ: $F = -2\beta Am\omega_0\sin(\omega_0 t - \varphi)$.

23.17. Амплитуда вынуждающей силы равна F_0, ее частота $\omega = \omega_0$. Определите амплитуду A вынужденных колебаний осциллятора массы m. Во сколько раз она больше отклонения осциллятора при действии постоянной силы F_0, если коэффициентом затухания β?

Ответ: $A = F_0/(2\beta m\omega_0)$; $\omega_0/(2\beta)$ раз.

23.18. Осциллятор движется под действием внешней периодической силы, изменяющейся по закону $F = F_0\cos\omega t$. Каков коэффициент β затухания у осциллятора? Масса осциллятора m, амплитуда вынужденных колебаний равна A, а частота ω действия внешней вынужденной силы равна резонансной частоте ω_0 осциллятора.

Ответ: $\beta = F_0/(2A\omega_0 m)$.

23.19. Игла звукоснимателя движется по синусоидальной бороздке грампластинки. Частота собственных колебаний иглы ω_0. При какой скорости υ иглы относительно пластинки она начнет выскакивать из бороздки? Изгибы бороздки повторяются через расстояние λ.

Ответ: $\upsilon = \omega_0\lambda/(2\pi)$.

23.20. Найти зависимость координаты осциллятора от времени, если $\omega \to \omega_0$.

Ответ: $x(t) \approx \dfrac{F_0 t}{2m\omega_0}\sin\omega_0 t.$

23.21. С момента времени $t = 0$ на частицу массы m начинает в направлении оси x действовать сила $F_x = F_0\sin\omega_0 t$, а в направлении y – сила $F_y = F_x\cos\omega_0 t$. Найти траекторию частицы, если в начальный момент она покоится. Чему равна средняя скорость частицы за большое время?

Ответ: циклоида; $\upsilon_{ср} = F_0/(m\omega_0)$.

23.22. Груз массой $m = 50$ г, подвешенный на нити длиной $l = 20$ см, совершает колебания в жидкости. Коэффициент сопротивления жидкости равен $r = 0{,}02$ кг/с. На груз действует вынуждающая сила $F = F_0\cos\omega t$, где $F_0 = 0{,}1$ Н. Определить: а) частоту вынуждающей силы, при которой амплитуда вынужденных колебаний максимальна; б) резонансную амплитуду.

Ответ: а) $\omega_{рез} = \sqrt{\dfrac{g}{l} - \dfrac{r^2}{2m^2}} = 7$ рад/с; б) $A_{рез} = F_0 \Big/ \sqrt{\dfrac{g}{l} - \dfrac{r^2}{4m^2}} = 1{,}4$ см.

23.23. Тело совершает вынужденные колебания в среде с коэффициентом сопротивления $r = 1$ г/с. Считая затухание малым, определить амплитудное значение F_0 вынуждающей силы, если резонансная амплитуда $A_{рез} = 0{,}5$ см и частота ν_0 собственных колебаний равна 10 Гц.

Ответ: $F_0 = 2\pi\nu A_{рез} r = 0{,}314$ мН.

23.24. В момент времени t_0 на покоящийся в положении равновесия осциллятор начинает действовать вынуждающая сила $F = F_0\cos\omega_0 t$. Масса осциллятора m, его собственная частота ω_0. Найдите зависимость координаты осциллятора от времени и постройте ее график для $|\omega - \omega_0|$. При построении графика воспользуйтесь тождеством $\cos\alpha - \cos\beta =$ $= 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

Ответ: $x(t) = \dfrac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\sin\left(\dfrac{\omega-\omega_0}{2}t\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\omega+\omega_0}{2}t\right)$.

23.25. Частицы массой m каждая вылетают из источника в момент времени $t = 0$ с почти нулевой скоростью. Сразу после вылета на них начинает действовать сила $F = F_0\sin\omega_0 t$. Определите скорость частиц спустя время t после вылета. Какова средняя скорость этих частиц? На каком расстоянии l от источника достигается наибольшая скорость?

Ответ: $\upsilon = \dfrac{F_0}{m\omega}(1 - \cos\omega t)$; $\upsilon_{\text{ср}} = \dfrac{F_0}{m\omega}$; $l = \dfrac{F}{m\omega^2}\pi(2n+1)$,

где n – целое число.

24. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Основные формулы и обозначения

Фазовая скорость электромагнитной волны

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

где $c = 1\big/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ = 2,998·10^8 м/с – скорость распространения электромагнитных волн в вакууме; ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемость среды; ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные.

В бегущей электромагнитной волне мгновенные и амплитудные значения напряженностей электрического и магнитного полей связаны соотношением

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H.$$

Уравнения плоской электромагнитной волны, распространяющейся в произвольном направлении,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m\cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha); \ \mathbf{H} = \mathbf{H}_m\cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha),$$

где $\mathbf{E}_m$ и $\mathbf{H}_m$ – амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей соответственно; ω – циклическая частота; $k = \omega/v$ – волновое число; α – начальные фазы колебаний в точке $\mathbf{r} = 0$.

Объемная плотность энергии электромагнитного поля

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}.$$

Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Пойнтинга

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}].$$

Интенсивность I (средняя плотность потока энергии) электромагнитного излучения точечного источника прямо пропорциональна четвертой степени частоты и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника

$$I \sim \frac{\omega^4}{r^2}.$$

Мощность излучения заряда q, движущегося с ускорением $\mathbf{a}$,

$$P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2\mathbf{a}^2}{3c^3}.$$

Средняя мощность излучения электрона, совершающего гармонические колебания с циклической частотой ω и амплитудой a,

$$\langle P\rangle = \frac{\mu_0}{12\pi c}\omega^4 e^2 a^2,$$

где ω – циклическая частота излучения; a – амплитуда гармонических колебаний электрона, μ_0 – магнитная постоянная.

Частота ν_n собственных колебаний в двухпроводной линии:

а) разомкнутой (или замкнутой) с обоих концов,

$$\nu_n = \frac{\upsilon}{2l} n \;\; (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

б) замкнутой на одном из концов,

$$\nu_n = \frac{\upsilon}{4l}(2n-1) \;\; (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где υ – скорость распространения электромагнитных волн, l – длина линии.

Давление, производимое электромагнитной волной при нормальном падении,

$$P = \langle w \rangle (1+\rho),$$

где $\langle w \rangle$ – среднее значение объемной плотности энергии электромагнитной волны, ρ – коэффициент отражения.

Эффект Доплера в релятивистском случае

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos\vartheta},$$

где ν_0 – собственная частота электромагнитного излучения, испускаемого неподвижным источником; ν – частота электромагнитного излучения, регистрируемого приемником; $\beta = \upsilon/c$; υ – скорость источника электромагнитного излучения относительно приемника; c – скорость распространения электромагнитного излучения в вакууме, ϑ – угол между вектором скорости $\boldsymbol{\upsilon}$ и направлением наблюдения, измеренный в системе отсчета, связанной с наблюдателем. При $\vartheta = 0$ или π эффект Доплера называется продольным, а при $\vartheta = \pi/2$ – поперечным.

Задачи с решениями

Задача 1. Используя уравнения Максвелла, показать, что процесс распространения переменного электромагнитного поля описывается волновым уравнением.

Решение: Из уравнений Максвелла следует, что электромагнитное поле может существовать самостоятельно – без электрических зарядов и токов. Для однородной нейтральной ($\rho = 0$) непроводящей ($\mathbf{j}_{пр} = 0$) среды с постоянными диэлектрической ε и магнитной μ проницаемостями уравнения Максвелла можно представить в виде

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \tag{1}$$

$$\text{div}\,\mathbf{B} = 0; \tag{2}$$

$$\text{rot}\,\mathbf{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \tag{3}$$

$$\text{div}\,\mathbf{D} = 0. \tag{4}$$

Для электромагнитного поля в однородной, изотропной и непроводящей среде, не обладающей сегнетоэлектрическими или ферромагнитными свойствами,

$$\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E},\ \mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H},$$

где ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянная.

Покажем, что существование электромагнитных волн вытекает из уравнений Максвелла.

В теории поля показано, что

$$\text{rot rot}\,\mathbf{A} = \text{grad div}\,\mathbf{A} - \nabla^2\,\mathbf{A}. \tag{5}$$

Выполнив аналогичную операцию для вектора **E**, получим

$$\text{rot rot}\,\mathbf{E} = \text{grad div}\,\mathbf{E} - \nabla^2\,\mathbf{E}. \tag{6}$$

Поскольку, согласно (4), div **E** = 0, представим уравнение (6) в виде

$$\text{rot rot}\,\mathbf{E} = -\,\nabla^2\,\mathbf{E}. \tag{7}$$

Используя уравнение (1), получим для левой части уравнения (7)

$$\text{rot rot}\,\mathbf{E} = \text{rot}\left(-\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right). \tag{8}$$

Сопоставив уравнения (7) и (8), приходим к уравнению

$$\nabla^2\mathbf{E} = \mu\mu_0\text{rot}\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{dt}\right). \tag{9}$$

Изменим в уравнении (9) последовательность дифференцирования по координатам и времени:

$$\nabla^2\mathbf{E} = \mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\text{rot}\,\mathbf{H}\right). \tag{10}$$

Используя (3), приведем уравнение (10) к следующему виду

$$\nabla^2\mathbf{E} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \tag{11}$$

Взяв ротор от обеих частей уравнения (3) и производя аналогичные преобразования, получим

$$\nabla^2\mathbf{H} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \tag{12}$$

Уравнения (11) и (12) являются волновыми уравнениями и, следовательно, $\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 = 1/\upsilon^2$, а $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$, где υ и c – фазовые скорости электромагнитной волны в среде и вакууме. Уравнения (11) и (12) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}; \qquad (13)$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}. \qquad (14)$$

Решения уравнений (13) – (14) представляют собой уравнения волны, то есть переменное электромагнитное поле распространяется в пространстве в виде электромагнитных волн:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m\cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha); \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}_m\cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha).$$

Задача 2. На примере плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси Ox, доказать поперечность электромагнитных волн.

Решение: Для однородной нейтральной ($\rho = 0$) непроводящей ($\mathbf{j}_{\text{пр}} = 0$) среды с постоянными диэлектрической ε и магнитной μ проницаемостями уравнения Максвелла можно представить в виде

$$\text{rot}\,\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}; \qquad (1)$$

$$\text{rot}\,\mathbf{H}=\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}; \qquad (2)$$

$$\text{div}\,\mathbf{D} = 0; \qquad (3)$$

$$\text{div}\,\mathbf{B} = 0. \qquad (4)$$

Здесь: $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$.

Представим систему уравнений Максвелла (1 – 4) в скалярном виде

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\mu\mu_0\frac{\partial H_x}{\partial t};\quad \frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\mu\mu_0\frac{\partial H_y}{\partial t};\quad \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\mu\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial t};\ (1')$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t};\ \frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}=\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t};\ \frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial t};\ (2')$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0;\ (3')\quad \frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0.\ (4')$$

В случае плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси Ox, векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ и их проекции на оси координат зависят только от координаты x и времени t, т.е.

$$\frac{\partial E_x}{\partial y}=\frac{\partial E_x}{\partial z}=\frac{\partial E_y}{\partial y}=\frac{\partial E_y}{\partial z}=\frac{\partial E_z}{\partial y}=\frac{\partial E_z}{\partial z}=0;$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial y}=\frac{\partial H_x}{\partial z}=\frac{\partial H_y}{\partial y}=\frac{\partial H_y}{\partial z}=\frac{\partial H_z}{\partial y}=\frac{\partial H_z}{\partial z}=0.$$

Из системы уравнений (1') – (4') следует

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=0 \text{ и } \frac{\partial H_x}{\partial x}=0; \ \frac{\partial E_x}{\partial t}=0 \text{ и } \frac{\partial H_x}{\partial t}=0.$$

Отсюда E_x и H_x не зависят от координат и времени и представляют собой однородное стационарное поле, которое не может характеризовать электромагнитную волну. Поэтому для поля плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси Ox, $E_x = 0$ и $H_x = 0$, то есть

$$\mathbf{E} = E_y\mathbf{j} + E_z\mathbf{k} \text{ и } \mathbf{H} = H_y\mathbf{j} + H_z\mathbf{k}.$$

Следовательно, векторы **E** и **H** совершают колебания в направлениях осей Oy и Oz перпендикулярных направлению распространения – оси Ox, то есть электромагнитная волна является поперечной волной.

Задача 3. Плоская электромагнитная волна с частотой $\nu = 10$ МГц распространяется в слабо проводящей среде с удельной проводимостью $\sigma = 10$ мСм/м. Найти диэлектрическую проницаемость ε среды, если отношение амплитуд тока проводимости и тока смещения $j_{m_{\text{пр}}}/j_{m_{\text{см}}} = 2$.

Дано:
$\nu = 1\cdot10^7$ Гц
$\sigma = 1\cdot10^{-2}$ См/м
$j_{m_{\text{пр}}}/j_{m_{\text{см}}} = 2$
ε – ?

Решение: Примем, что напряженность электрического поля изменяется по закону

$$E(t) = E_0\sin\omega t. \tag{1}$$

Тогда по закону Ома в дифференциальной форме

$$j_{\text{пр}}(t) = \sigma E_0\sin\omega t. \tag{2}$$

Плотность тока смещения, с учетом (1), найдем по формуле

$$j_{\text{см}}(t)=\frac{\partial D}{\partial t}=\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}=\varepsilon\varepsilon_0E_0\omega\cos\omega t, \text{ где } D=\varepsilon\varepsilon_0E.$$

Поскольку $\omega = 2\pi\nu$, то

$$j_{\text{см}}(t)=2\pi\nu\varepsilon\varepsilon_0E_0\cos\omega t. \tag{3}$$

Из уравнений (2) и (3) выразим амплитудные значения токов проводимости и смещения

$$j_{m_{\text{пр}}} = \sigma E_0;\ j_{m_{\text{см}}} = 2\pi\nu\varepsilon\varepsilon_0E_0. \tag{4}$$

Решая систему уравнений (4) относительно ε, найдем

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{2\pi\nu\varepsilon_0}\cdot\frac{j_{m_{\text{см}}}}{j_{m_{\text{пр}}}}=\frac{1\cdot10^{-2}}{2\pi\cdot1\cdot10^{7}\cdot8{,}85\cdot10^{-12}}\cdot0{,}5=9.$$

Ответ: $\varepsilon = 9$.

Задача 4. Плоская электромагнитная волна падает нормально на поверхность плоскопараллельного слоя толщиной l из немагнитного материала, диэлектрическая проницаемость которого падает экспоненциально от значения ε_1 на передней поверхности слоя до ε_2 на задней. Найти время распространения данной фазы волны через этот слой.

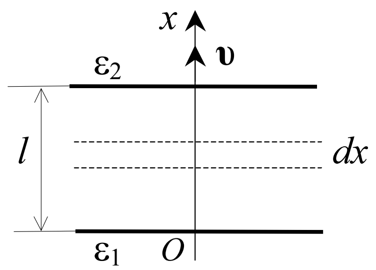


Рис. 24.1

Решение: Направим ось Ox вверх, а начало координат совместим с нижней поверхностью слоя (рис. 24.1). Скорость распространения электромагнитной волны в среде определяется формулой $\upsilon = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. В среде из немагнитного материала $\mu = 1$ и, следовательно, $\upsilon = c/\sqrt{\varepsilon}$. Поэтому скорость распространения электромагнитной волны изменяется вдоль направления распространения волны. Для решения задачи выделим бесконечно тонкий слой dx, в пределах которого скорость распространения электромагнитной волны можно считать постоянной и равной

$$\upsilon = \frac{dx}{dt};\ dt = \frac{dx}{\upsilon}. \qquad (1)$$

Диэлектрическая проницаемость изменяется по экспоненциальному закону

$$\varepsilon = \varepsilon_1 e^{-kx}. \qquad (2)$$

Прологарифмируем и продифференцируем (2)

$$\ln\varepsilon - \ln\varepsilon_1 = -kx;\ \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = -kdx;\ dx = -\frac{1}{\varepsilon k}d\varepsilon. \qquad (3)$$

Подставив dx из уравнения (3) в (1) и учитывая, что $\upsilon = c/\sqrt{\varepsilon}$, преобразуем уравнение (1) к виду

$$dt = -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon kc}d\varepsilon = -\frac{\varepsilon^{-1/2}}{kc}d\varepsilon. \qquad (4)$$

Для нахождения времени распространения данной фазы волны через слой диэлектрика проинтегрируем (4) по t в пределах от 0 до t и по ε в пределах от ε_1 до ε_2:

$$t = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} -\frac{\varepsilon^{-1/2}}{kc}d\varepsilon = -\frac{1}{kc}\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\varepsilon^{-1/2}d\varepsilon = -\frac{2}{kc}\sqrt{\varepsilon}\Big|_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} = \frac{2}{kc}\left(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}\right). \qquad (5)$$

Значение k найдем из условия $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 e^{-kl}$.

$$k = \frac{1}{l}\ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \qquad (6)$$

Подставив (6) в (5), получим

$$t = \frac{2l}{c\ln\left(\varepsilon_1/\varepsilon_2\right)}\left(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}\right).$$

Задача 5. В изотропной среде с показателем преломления n = 1,5 распространяется плоская электромагнитная волна (векторы **E** и **H** известны) частотой $\omega = 10^5$ с$^{-1}$. Получить выражение для волнового вектора **k** и найти его модуль.

Дано:	
$n = 1{,}5$	
$\omega = 1\cdot10^5$ с$^{-1}$	
$\mathbf{k}$ – ? k – ?	

Решение: Волновой вектор **k** направлен так же, как и вектор $\boldsymbol{\upsilon}$ фазовой скорости электромагнитной волны. Волновое число k определяется формулой

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\upsilon T} = \frac{\omega}{\upsilon}.$$

Поскольку фазовая скорость распространения волны

$\upsilon = c/n$, то $k = \omega n/c$.

Векторы **E**, **H**, $\boldsymbol{\upsilon}$ образуют правовинтовую тройку векторов, так что

$$\boldsymbol{\upsilon} = \frac{[\mathbf{E}\mathbf{H}]}{EH}\upsilon,$$

где $\frac{[\mathbf{E}\mathbf{H}]}{EH}$ – одиночный орт, определяющий направление вектора фазовой скорости $\boldsymbol{\upsilon}$ и волнового вектора **k**.

Так как волновой вектор **k** совпадает по направлению с вектором фазовой скорости $\boldsymbol{\upsilon}$ электромагнитной волны, то

$$\mathbf{k} = \frac{\omega n}{c}\cdot\frac{[\mathbf{E}\mathbf{H}]}{EH}.$$

Подставив численные значения в выражение для модуля волнового вектора и проведя вычисления, получим

$$k = \omega n/c = 1\cdot10^5\cdot1{,}5/3\cdot10^8 = 5\cdot10^{-4}\ \text{с}^{-1}.$$

Ответ: $k = 5\cdot10^{-4}$ с$^{-1}$.

Задача 6. Нерелятивистские протоны, ускоренные разностью потенциалов U = 1 кВ, образуют пучок круглого сечения с током I = = 10 мА. Найти модуль и направление вектора Пойнтинга вне пучка на расстоянии r = 0,2 м от его оси.

Дано:	
$U = 1\cdot10^3$ В	
$I = 1\cdot10^{-2}$ А	
$r = 0{,}2$ м	
$\mathbf{S}$ – ? S – ?	

Решение: Направление вектора **E** перпендикулярно скорости $\boldsymbol{\upsilon}$ протонов. Векторы **E**, **H** и $\boldsymbol{\upsilon}$ образуют правовинтовую тройку векторов (рис. 24.2). Следовательно, вектор Пойнтинга $\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$ параллелен скорости $\boldsymbol{\upsilon}$ протонов.

Поскольку векторы **E** и **H** взаимно перпендикулярны, модуль вектора Пойнтинга

$$S = EH. \qquad (1)$$

По теореме Гаусса

$$2\pi rE = \lambda/\varepsilon_0,$$

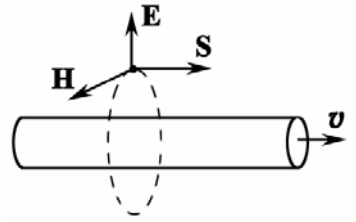


Рис. 24.2

где λ – заряд, приходящийся на единицу длины пучка. Отсюда

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}. \qquad (2)$$

Если принять, что пучок протонов обладает поперечным сечением S и имеет длину l, то

$$\lambda = \frac{enV}{l} = \frac{enSl}{l} = enS,$$

где e – элементарный заряд; n – концентрация протонов в пучке; V – объем кольцевого пучка.

По определению $I = jS = envS = \lambda v$. Следовательно,

$$\lambda = I/v. \qquad (3)$$

При ускорении электрическим полем протон приобретает кинетическую энергию

$$m_p v^2/2 = eU, \text{ отсюда } v = \sqrt{2eU/m_p}. \qquad (4)$$

Подставив (3) и (4) в (2), получим

$$E = \frac{I}{2\pi r\varepsilon_0} \cdot \sqrt{\frac{m_p}{2eU}}. \qquad (5)$$

По закону полного тока для вектора **H**

$$2\pi rH = I, \; H = \frac{I}{2\pi r}. \qquad (6)$$

Подставив (5) и (6) в (1), найдем искомую величину

$$S = \frac{I^2}{4\pi^2 r^2 \varepsilon_0}\sqrt{\frac{m_p}{2eU}};$$

$$S = \frac{1\cdot 10^{-4}}{4\pi^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} \cdot \sqrt{\frac{1{,}67\cdot 10^{-27}}{2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 1\cdot 10^3}} = 16{,}3 \text{ Вт/м}^2.$$

Ответ: S = 16,3 Вт/м^2.

Задача 7. Плоский воздушный конденсатор, обкладки которого имеют форму дисков радиусом a = 10 см, подключен к переменному синусоидальному напряжению частоты $\omega = 1\cdot 10^4$ рад/с. Найти отношение амплитудных значений магнитной и электрической энергии внутри конденсатора.

Дано:	**Решение:** Пусть напряжение на конденсаторе изменяется по закону $U = U_m\cos\omega t$ и расстояние между пластинами конденсатора равно h. Следовательно, для напряженности электрического поля можно записать
$a = 0{,}1$ м	
$\omega = 1\cdot 10^4$ рад/с	
$W_{\text{м.max}}/W_{\text{э.max}}$ – ?	

$$E = E_m\cos\omega t.$$

Тогда электрическая энергия конденсатора

$$W_{\text{э}} = w_{\text{э}}V = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\cdot\pi a^2 h = \frac{\varepsilon_0\pi a^2 h}{2}\cdot E_m^2\cos^2\omega t, \qquad (1)$$

где $w_{\text{э}}$ – объемная плотность электрической энергии; $V = \pi a^2 h$ – объем конденсатора.

По теореме о циркуляции вектора **H**:

$$2\pi r H = \pi r^2\frac{\partial D}{\partial t} = \pi r^2\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t} = \pi r^2\varepsilon_0 E_m\omega|\sin\omega t|.$$

Здесь учтено, что $B = \mu_0 H$, $D = \varepsilon_0 E$, а площадь контура равна πr^2.

Тогда

$$H = \frac{r\varepsilon_0 E_m\omega|\sin\omega t|}{2}. \qquad (2)$$

Так как поле внутри конденсатора неоднородно, то магнитная энергия может быть найдена по формуле

$$W_{\text{м}} = \int_V\frac{B^2}{2\mu_0}dV = \int_V\frac{\mu_0 H^2}{2}dV. \qquad (3)$$

Элементарный объем dV возьмем в виде трубки радиусами r и $r + dr$ и высотой h (рис. 24.3). Тогда

$$dV = 2\pi r\,dr\,h. \qquad (4)$$

Подставив (2) и (4) в (3), получим

$$W_{\text{м}} = \frac{\mu_0}{2}\int_0^a H^2 dV = \frac{\mu_0\pi h}{4}\left(\varepsilon_0 E_m\omega\sin\omega t\right)^2\int_0^a r^3 dr;$$

$$W_{\text{м}} = \frac{\mu_0\pi h a^4\varepsilon_0^2 E_m^2\omega^2\sin^2\omega t}{16}. \qquad (5)$$

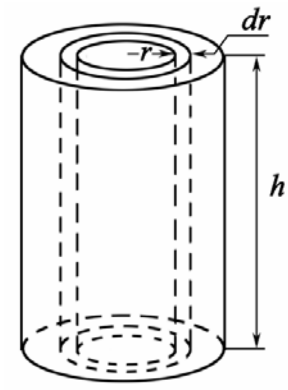


Рис. 24.3

Согласно (1) и (5) максимальные значения магнитной и электрической энергии равны

$$W_{\text{э.max}} = \frac{\varepsilon_0\pi a^2 h E_m^2}{2};\quad W_{\text{м.max}} = \frac{\mu_0\pi a^4 h\varepsilon_0^2 E_m^2\omega^2}{16}.$$

Отсюда $\dfrac{W_{\text{м.max}}}{W_{\text{э.max}}} = \dfrac{\mu_0\varepsilon_0 a^2\omega^2}{8} = \dfrac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}1^2\cdot 10^8}{8} = 1{,}4\cdot 10^{-12}.$

Ответ: $W_{\text{м.max}}/W_{\text{э.max}} = 1{,}4\cdot 10^{-12}$.

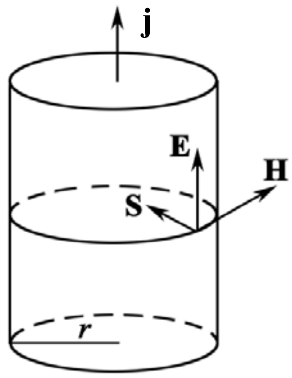


Рис. 24.4

Задача 8. Вычислить поток вектора Пойнтинга **S** через поверхность цилиндрического проводника (рис. 24.4), сопротивление которого R, и сравнить этот результат с омическими потерями.

Решение: Пусть по проводнику радиусом r протекает ток I вдоль поля **E**. Протекающий ток создает в окружающем пространстве магнитное поле. По закону полного тока

$$\oint_L \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \sum I_i .$$

Отсюда

$$H \cdot 2\pi r = I; \; H = I/(2\pi r). \tag{1}$$

Укажем направление векторов **E** и **H** (рис. 24.4). Из рис. 24.4 видно, что вектор Пойнтинга **S** = [**E H**] направлен перпендикулярно боковой поверхности проводника, то есть электромагнитная энергия входит в провод из окружающего пространства. Найдем поток энергии за 1 с через боковую поверхность $2\pi rL$ участка проводника длиной L

$$W = EH \cdot 2\pi rL. \tag{2}$$

По закону Ома в дифференциальной форме $j = \sigma E$, где σ – удельная проводимость материала проводника. Поскольку $j = I/S$, то по закону Ома в дифференциальной форме

$$E = \rho \frac{I}{S}. \tag{3}$$

Подставив (1) и (3) в (2), получим

$$W = \rho \frac{I}{S} \frac{I}{2\pi r} 2\pi rL = I^2 \rho \frac{L}{S} = I^2 R.$$

Следовательно, поток вектора Пойнтинга через поверхность прямолинейного провода равен джоулевой теплоте (омическим потерям), выделившейся в проводнике, что соответствует закону сохранения энергии, то есть электромагнитная энергия поступает в проводник через его боковую поверхность, а не вдоль его оси, как это может казаться.

Задача 9. При передаче видеосигналов в системе телевидения за 1 с передается 25 различных кадров, каждый из которых разбивается на 625 строк по 833 элемента в каждой строке. Какой должна быть несущая частота, на которой передаются видеосигналы? Объяснить, почему надежный прием телевизионных передач возможен только в пределах прямой видимости между приемной и передающей антеннами.

Решение: При передаче видеосигналов каждый кадр передается последовательно – элементами кадра, в связи с чем модулирующая частота равна $\nu = 625 \cdot 833 \cdot 25 = 1{,}3 \cdot 10^7$ Гц.

Несущая частота для высококачественного воспроизведения в приемнике сигналов должна быть в 5 – 10 раз больше частоты модуляции, то есть $\nu_{\text{нес}} \approx 10^8$ Гц, что соответствует длине волны $\lambda \approx 2{,}5$ м (диапазон ультракоротких волн). Ультракороткие волны сильно поглощаются поверхностью Земли и практически не отражаются от ионосферы. Поэтому надежный прием телевизионных передач возможен только в пределах прямой видимости между приемной и передающей антеннами.

Задача 10. С какой скоростью υ должна была бы двигаться автомашина, чтобы красный свет светофора ($\lambda_0 \approx 0{,}70$ мкм) превратился в зеленый ($\lambda_1 \approx 0{,}55$ мкм)?

Дано:
$\lambda_0 = 0{,}70$ мкм
$\lambda_1 = 0{,}55$ мкм
$c = 3 \cdot 10^8$ м/с
$\upsilon - ?$

Решение: В случае эффекта Доплера в общем случае

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos\vartheta}, \tag{1}$$

где ν_0 – собственная частота электромагнитного излучения, испускаемого неподвижным источником; ν – частота электромагнитного излучения, регистрируемого приемником; $\beta = \upsilon/c$; ϑ – угол между вектором скорости $\boldsymbol{\upsilon}$ и направлением наблюдения, измеренный в системе отсчета, связанной с приемником.

При продольном эффекте Доплера $\vartheta = 0$ или $\vartheta = \pi$. В данном случае $\vartheta = \pi$ (приемник приближается к светофору). Тогда (1) примет вид

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta}. \tag{2}$$

Длина волны связана с частотой излучения и скоростью распространения волны соотношением

$$\lambda = c/\nu. \tag{3}$$

Подставив (3) в (2), получим

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0}\frac{\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{1-\beta}}. \tag{4}$$

После несложных преобразований из (4) найдем

$$\beta = \frac{\upsilon}{c} = \frac{(\lambda_0/\lambda)^2 - 1}{(\lambda_0/\lambda)^2 + 1}.$$

Следовательно,

$$v=\left[\frac{(\lambda_0/\lambda)^2-1}{(\lambda_0/\lambda)^2+1}\right]c=\left[\frac{(0,7/0,55)^2-1}{(0,7/0,55)^2+1}\right]c=0,237c=7,1\cdot10^7\ \text{м/с}.$$

Полученный результат не имеет физического смысла, то есть красный свет светофора при технически возможных скоростях автомобиля не может превратиться в зеленый.

Ответ: v = 7,1·10^7 м/с.

Задача 11. Найти среднее время τ жизни атома, излучающего электромагнитные волны с длиной волны λ в вакууме, равной 480 нм.

Решение: В классической теории излучения атомов излучение обусловлено свободными затухающими колебаниями электронов относительно положения равновесия в атомах.

Средним временем «жизни» колебаний называют время τ, спустя которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз. Время τ связано с коэффициентом затухания β соотношением $\beta = 1/\tau$.

Средняя мощность излучения электрона, совершающего гармонические колебания с амплитудой a и циклической частотой ω, определяется формулой

$$\langle P\rangle=\frac{\mu_0}{12\pi c}\omega^4e^2a^2, \tag{1}$$

где ω – циклическая частота излучения; a – амплитуда колебаний электрона, μ_0 – магнитная постоянная.

Поскольку свободные колебания электрона в атоме являются не гармоническими, а затухающими, энергия колебаний электрона уменьшается. Уменьшение энергии электрона за время dt

$$dW=-\langle P\rangle dt=-\frac{\mu_0}{12\pi c}\omega^4e^2a^2dt. \tag{2}$$

Начальная энергия осциллятора

$$W=\frac{1}{2}m\omega^2a_0^2, \tag{3}$$

где m – масса электрона, a_0 – начальная амплитуда колебаний.

Так как амплитуда затухающих колебаний электрона изменяется по закону $a = a_0e^{-\beta t}$, то полная механическая энергия колебаний электрона в момент времени t

$$W=\frac{1}{2}m\omega^2a_0^2e^{-2\beta t}. \tag{4}$$

Продифференцировав уравнение (4), получим

$$dW=-2\beta Wdt=-\beta m\omega^2a_0^2e^{-2\beta t}dt. \tag{5}$$

Сопоставляя (2) и (5), учитывая, что $a = a_0 e^{-\beta t}$, имеем

$$\frac{\mu_0}{12\pi c}\omega^4 e^2 a_0^2 e^{-2\beta t} = \beta m\omega^2 a_0^2 e^{-2\beta t}; \qquad \frac{\mu_0}{12\pi c}\omega^2 e^2 = \beta m;$$

Отсюда

$$\beta = \frac{\mu_0\omega^2 e^2}{12\pi mc}. \tag{6}$$

Поскольку $\lambda = c/\nu = 2\pi c/\omega$, то

$$\omega = 2\pi c/\lambda. \tag{7}$$

Подставив (7) в (6), получим $\beta = \dfrac{\pi\mu_0 ce^2}{3m\lambda^2}$ или $\tau = \dfrac{3m\lambda^2}{\pi\mu_0 ce^2}$.

Выполнив вычисления, получим

$$\tau = \frac{3\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot\left(4{,}8\cdot 10^{-7}\right)^2}{\pi\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 3\cdot 10^{8}\cdot\left(1{,}6\cdot 10^{-19}\right)^2} \approx 2\cdot 10^{-8}\ \text{с}.$$

Ответ: τ = 20 нс.

Задачи для самостоятельного решения

24.1. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна $\mathbf{E} = \mathbf{E}_m\cos(\omega t - \mathbf{kr})\mathbf{j}$, где $\mathbf{j}$ – орт оси y; E_m = 100 В/м, k = 0,5 м$^{-1}$. Найти вектор $\mathbf{H}$ в точке с координатой x = 5 м в моменты времени t = 0, t = 50 нс.

Ответ: $\mathbf{H} = c\varepsilon_0 E_m\mathbf{k}\cos kx = -0{,}21\mathbf{k}$; $\mathbf{H} = c\varepsilon_0 E_m\mathbf{k}\cos k(ct - x) = 0{,}08\mathbf{k}$, где $\mathbf{k}$ – орт оси z.

24.2. При переходе электромагнитной волны из немагнитной среды с диэлектрической проницаемостью ε = 2 в вакуум приращение длины волны $\Delta\lambda$ = – 17,6 м. Найти частоту ν электромагнитной волны.

Ответ: $\nu = c(1-\sqrt{\varepsilon})\big/\left(\Delta\lambda\sqrt{\varepsilon}\right) = 4{,}96$ МГц.

24.3. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности E_m электрического поля волны равна 10 В/м. Определить амплитуду напряженности магнитного поля волны.

Ответ: $H_m = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}\,E_m = 0{,}0265$ А/м.

24.4. При изменении тока в катушке индуктивности на величину ΔI = 1 А за время Δt = 0,6 с в ней индуцируется ЭДС $\mathcal{E}_{si}$ самоиндукции, равная 0,2 мВ. Какую длину λ будет иметь радиоволна, излучаемая генератором, колебательный контур которого состоит из этой катушки и конденсатора емкостью C = 14,1 нФ?

Ответ: $\lambda = 2\pi c\sqrt{C\mathcal{E}_{si}\Delta t/\Delta I} = 2451$ м.

24.5. Катушка, индуктивность L которой 30 мкГн, присоединена к плоскому конденсатору. Площадь S каждой пластины 100 см^2, расстояние d между ними 0,1 мм. Определить диэлектрическую проницаемость ε среды, заполняющей пространство между пластинами, если контур резонирует на электромагнитную волну длиной λ = 750 м.

Ответ: $\varepsilon = \lambda^2 d \big/ \left(4\pi^2 \varepsilon_0 c^2 LS\right) = 6$.

24.6. Длина λ электромагнитной волны, на которую настроен колебательный контур, равна 6 м. Пренебрегая активным сопротивлением контура, определите максимальный заряд q_m на обкладках конденсатора, если максимальная сила тока I_m = 2 А.

Ответ: $q_m = I_m \lambda \big/ (2\pi c) = 6{,}37$ нКл.

24.7. Тонкая катушка, имеющая вид кольца радиусом R = 25 см, состоит из N = 51 витков провода. Катушка находится в поле электромагнитной волны частотой ν = 5,0 МГц, направление распространения которой и ее электрический вектор перпендикулярны оси катушки. Чему равно амплитудное значение электрического вектора волны E_m, если амплитудное значение ЭДС индукции в катушке равно $\mathcal{E}_{im}$ = 0,2 мВ?

Ответ: $E_m = c\mathcal{E}_{im} \big/ \left(2\pi^2 \nu N R^2\right) = 191$ мкВ/м.

24.8. В некоторой области инерциальной системы отсчета имеется вращающееся с угловой скоростью ω магнитное поле, модуль которого $|\mathbf{B}|$ = const. Найти $\mathrm{rot}\,\mathbf{E}$ в этой области как функцию векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{B}$.

Ответ: $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = [\mathbf{B}\ \boldsymbol{\omega}]$.

24.9. Плоская гармоническая линейно поляризованная электромагнитная волна частоты ν = 1 МГц распространяется в вакууме. Найти амплитуду напряженности электрической составляющей, если интенсивность I электромагнитной волны равна 3 мкВт/м^2.

Ответ: $E_m = \sqrt{2I \big/ (c\varepsilon_0)} = 47{,}5$ мВ/м.

24.10. Найти модуль напряженности магнитного поля плоской электромагнитной волны, выразив его через модуль вектора Пойнтинга S = 3 мкВт/м^2 и диэлектрическую проницаемость ε среды. Принять $\mu = 1$, $\varepsilon = 4$.

Ответ: $H_m = \left(S\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0/\mu_0}\right)^{1/2} = 0{,}126$ мА/м.

24.11. Найти интенсивность плоской электромагнитной волны, электрическая составляющая которой $\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos(\omega t - \mathbf{kr})$, если волна распространяется в вакууме. Ответ выразить через k и ω.

Ответ: $I = \omega\varepsilon_0 E_m^2 \big/ (2k)$.

24.12. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна частоты ω, для которой среднее значение плотности потока энергии равно $\langle S \rangle$. Найти амплитудное значение тока смещения j_m. в этой волне.

Ответ: $j_m = \omega\sqrt{2\langle S \rangle \varepsilon_0 / c}$.

24.13. В вакууме распространяются две плоские электромагнитные волны, одна – вдоль оси x, другая – вдоль оси y: $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_m\cos(\omega t - kx)$, $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_m\cos(\omega t - ky)$, где модуль вектора $E_m = 200$ В/м параллелен оси z. Найти среднее значение $\langle S \rangle$ плотности потока энергии в точках плоскости $x = y$.

Ответ: $\langle S \rangle = \sqrt{2} c\varepsilon_0 E_m^2 = 149{,}7$ Вт/м^2.

24.14. Плоская гармоническая электромагнитная волна распространяется вдоль оси x. Определить, какая энергия W будет перенесена ею через площадку $S = 30$ см^2, расположенную перпендикулярно оси x, за время $t = 5$ мин. Амплитуда напряженности электрического поля волны $E_m = 10$ мВ/м, амплитуда напряженности магнитного поля волны $H_m = 1$ мА/м. Период волны $T \ll t$.

Ответ: $W = E_m H_m St/2 = 4{,}5$ мкДж.

24.15. Ток, протекающий по обмотке длинного прямого соленоида, достаточно медленно увеличивают. Показать, что скорость возрастания энергии магнитного поля в соленоиде равна потоку вектора Пойнтинга через его боковую поверхность.

24.16. Энергия от источника постоянного напряжения $U = 100$ В передается к потребителю по длинному коаксиальному кабелю с пренебрежимо малым сопротивлением. Ток в кабеле $I = 10$ А. Найти поток энергии Ф через поперечное сечение кабеля. Считать внешнюю проводящую оболочку кабеля тонкостенной.

Ответ: $\Phi = IU = 1$ кДж/с.

24.17. Плотность $\mathbf{G}$ импульса электромагнитной волны (величина, численно равная импульсу волны в единице объема), распространяющейся в вакууме, связана с вектором Пойнтинга $\mathbf{S}$ соотношением $\mathbf{G} = \mathbf{S}/c^2$, где c – скорость распространения электромагнитных волн в вакууме. Используя это соотношение, выразите модуль плотности импульса электромагнитной волны через объемную плотность w энергии электромагнитного поля и скорость распространения электромагнитных волн в вакууме.

Ответ: $G = w/c$.

24.18. Известно, что в волновой зоне вибратора Герца (дипольный излучатель), то есть на расстояниях, много больших длины его волны, амплитуды колебаний E_m и H_m прямо пропорциональны синусу угла ϑ между направлением распространения волны и осью вибратора и обратно пропорциональны расстоянию r от вибратора. Найти отношение мощностей P_1/P_2, излучаемых диполем в направлениях $(30° \le \vartheta \le 35°)$ и $(60° \le \vartheta \le 65°)$.

Ответ: $P_1/P_2 = 0{,}23$.

24.19. Найти мощность P излучения нерелятивистской частицы с зарядом e и массой m, движущейся по круговой орбите радиусом R в поле неподвижного точечного заряда q.

Ответ: $P = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\right)^3 \left(\frac{qe^2}{mR^2}\right)^2$.

24.20. Найти длину L воздушной двухпроводной линии, концы которой замкнуты с обеих сторон, если резонанс в линии наступает при двух последовательных частотах $\nu_1 = 3{,}0$ МГц и $\nu_2 = 4{,}5$ МГц.

Ответ: $L = c/[2(\nu_2 - \nu_1)] = 100$ м.

24.21. Найти наименьшую частоту собственных колебаний в двухпроводной линии, замкнутой проводящим мостиком на одном из концов, если длина проводов $L = 1$ м и они погружены в керосин.

Ответ: $\nu = c/\left(4L\sqrt{\varepsilon}\right) = 5{,}3$ МГц.

24.22. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна и падает по нормали на поверхность тела, полностью ее поглощающего. Амплитуда напряженности электрического поля волны E_m равна 2 В/м. Определить давление P, оказываемое волной на тело.

Ответ: $P = \varepsilon_0 E_m^2/2 = 17{,}7$ пПа.

24.23. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна и падает по нормали на поверхность тела, полностью ее поглощающего. Амплитуда напряженности магнитного поля волны H_m равна 0,2 А/м. Определить давление P, оказываемое волной на тело.

Ответ: $P = \mu_0 H_m^2/2 = 25$ нПа.

24.24. Плоская электромагнитная волна падает нормально на поверхность зеркала, движущегося навстречу с релятивистской скоростью v. Частота отраженной волны ω. Найти с помощью формулы Доплера частоту ω_0 падающей на зеркало волны. Рассмотреть случай $v \ll c$.

Ответ: $\omega_0 = \omega(c - v)/(c + v) \approx \omega c/(c + 2v)$.

24.25. Во сколько раз следует увеличить мощность передатчика при увеличении дальности радиосвязи с космическими кораблями в 4 раза; для увеличения в 3 раза дальности радиолокации? Считать, что при начальных расстояниях принимаемый сигнал был равен пороговой чувствительности приемника.

Ответ: 16; 81.

25. ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Основные формулы и обозначения

Зависимость изменения напряжения в сети от времени:

$$U(t) = U_m \cos\omega t,$$

где U_m – амплитудное значение напряжения; $\omega = 2\pi\nu$, где ν – частота переменного напряжения; t – время.

Полное сопротивление в цепи при последовательном соединении R, L и C

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

где R – активное сопротивление; $X_L = \omega L$ – индуктивное сопротивление; L – индуктивность цепи; $X_C = 1/\omega C$ – емкостное сопротивление, C – емкость цепи.

Зависимость изменения тока в сети от времени

$$J(t) = J_m \cos(\omega t - \varphi),$$

где J_m – амплитудное значение тока; t – время; φ – сдвиг фаз между напряжением и силой тока.

Связь амплитудного значения тока и амплитудного значения напряжения

$$J_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}.$$

Сдвиг фаз между напряжением и током

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}.$$

Эффективное значение тока и напряжения

$$J_{эф} = \frac{J_m}{\sqrt{2}}; \quad U_{эф} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \quad J_{эф} = \frac{U_{эф}}{Z}.$$

Падение напряжений на активном сопротивлении, емкости и индуктивности находятся из соотношений

$$U_{эфR} = J_{эф}R; \quad U_{эфC} = J_{эф}/(\omega C); \quad U_{эфL} = J_{эф}\omega L.$$

Резонанс напряжений достигается тогда, когда $U_L = U_C$ или

$$\omega_{рез}L = \frac{1}{\omega_{рез}C}; \qquad \omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}};$$

$$U_{\text{рез}L} = U_{\text{рез}C} = \sqrt{\frac{L}{C}} J_m = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\ U_m.$$

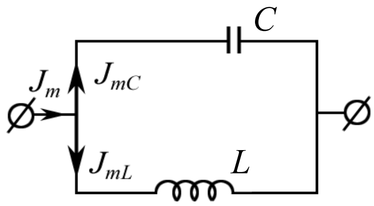


Рис. 25.1

Резонанс токов (рис. 25.1)

$$J_m = \left|J_{mL} - J_{mC}\right| = U_m \left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right|;$$

если $\omega = \omega_{\text{рез}} = 1/\sqrt{LC}$, то при $R = 0$ ток J_m в подводящих проводах равен 0.

Активная мощность в цепи переменного тока

$$\langle P \rangle = J_{\text{эф}} U_{\text{эф}} \cos\varphi = J^2_{\text{эф}} R.$$

Задачи с решениями

Задача 1. Мгновенное значение ЭДС переменного тока дано выражением $\mathcal{E} = 100\sin(800\pi t)$, где t выражено в секундах, $\mathcal{E}$ – в вольтах. Чему равно значение ЭДС в момент времени $T/3$, где T – период колебаний.

Решение: Коэффициент при аргументе синуса есть круговая частота $\omega = 2\pi/T$. Значит $800\pi = 2\pi/T$, $T = 1/400$ с.

В момент $t = T/3 = 1/1200$ с. Следовательно,

$$\mathcal{E} = 100\sin\left(\frac{800\pi}{1200}\right) = 100 \cdot \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 86{,}6 \text{ В}.$$

Ответ: $\mathcal{E} = 86{,}6$ В.

Задача 2. Вывести формулу и найти значение мгновенной мощности $P(t)$ переменного тока частоты $\nu = 50$ Гц в электрической цепи с резистором $R = 800$ Ом, индуктивностью $L = 1{,}27$ Гн и емкостью $C = 1{,}59$ мкФ, включенных последовательно, в момент времени $t = T/4$ (одна четверть периода). Эффективное значение напряжения $U_{\text{эф}} = 127$ В.

Дано:
$\nu = 50$ Гц
$R = 800$ Ом
$L = 1{,}27$ Гн
$C = 1{,}59 \cdot 10^{-6}$ Ф
$t = T/4$
$U_{\text{эф}} = 127$ В

$P(t = T/4)$ – ?

Решение: Значение мгновенной мощности равно произведению мгновенного напряжения $U(t)$ на мгновенное значение силы тока $J(t)$

$$P(t) = U(t)\,J(t); \qquad (1)$$

$$U(t) = U_{\max}\cos(\omega t),\ J(t) = J_{\max}\cos(\omega t - \varphi),$$

где $U_{\max} = \sqrt{2}\,U_{\text{эфф}}$ – амплитудное значение напряжения;

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L - 1/\omega C}{R};\ \omega = 2\pi\nu.$$

$$J_{\max} = \frac{U_{\max}}{Z} = \frac{\sqrt{2}\,U_{эф}}{\sqrt{R^2 + \left[\omega L - 1/(\omega C)\right]^2}}.$$

Подставляя значения величин в (1), получим

$$P(t) = \frac{2U_{эф}^2}{\sqrt{R^2 + \left[2\pi\nu L - 1/(2\pi\nu C)\right]^2}} \cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right)\times$$

$$\times\cos\left[\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4} - \operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi\nu L - 1/(2\pi\nu C)}{R}\right)\right] = 0.$$

Для $t = T/4$, где T – период колебаний, для любых значений $U_{\max}$, R, L, C, ν значение мгновенной мощности равно нулю.

Ответ: $P(t = T/4) = 0$.

Задача 3. Катушка индуктивностью L = 1,25 Гн и активным сопротивлением R = 500 Ом подключена сначала к источнику постоянного тока, а затем к источнику переменного тока, частота которого ν = 50 Гц. На сколько сопротивление катушки постоянному току меньше, чем переменному?

Дано:
ν = 50 Гц
R = 500 Ом
L = 1,25 Гн

$(Z - R)$ – ?

Решение: Для постоянного тока сопротивление равно R = 500 Ом. Для переменного тока

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{R^2 + (2\pi\nu L)^2} =$$

$$= \sqrt{500^2 + (2\pi\cdot 50\cdot 1{,}25)^2} = 636 \text{ Ом}.$$

Тогда $Z - R$ = 136 Ом.

Для катушки индуктивности 1,25 Гн сопротивление переменному току на 136 Ом больше, чем постоянному.

Ответ: $(Z - R)$ = 136 Ом.

Задача 4. Последовательно соединенные резистор с сопротивлением R = 110 Ом и конденсатор подключены к внешнему переменному напряжению с амплитудным значением U_m = 110 В. Оказалось, что значение установившегося тока в цепи $J_{эф}$ = 0,5 А. Определить сдвиг фаз φ между током и внешним напряжением.

Дано:
R = 110 Ом
U_m = 110 В
$J_{эф}$ = 0,5 А

φ – ?

Решение: Согласно формуле $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$ при $L \to 0$ имеем сдвиг фаз между напряжением и током

$$\operatorname{tg}\varphi = -1/(\omega RC),$$

где ω – круговая частота напряжения в сети.

Из векторной диаграммы (см. рис. 25.2) видно, что внешнее напряжение $\mathbf{U}_m$ отстаёт по фазе от тока $\mathbf{J}_m$ в RC – цепи. Однако по условию задачи необходимо определить сдвиг фаз наоборот между $\mathbf{J}_m$ и $\mathbf{U}_m$, поэтому

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\omega RC}. \qquad (1)$$

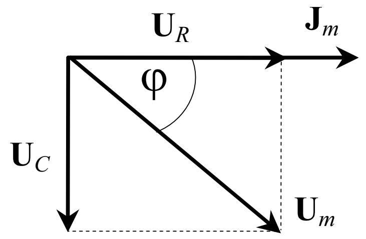


Рис. 25.2

Полное сопротивление такой цепи

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \frac{U_m}{J_m}.$$

Учитывая, что $J_m = \sqrt{2}\,J_{эф}$, получим

$$\frac{1}{\omega C} = \sqrt{\frac{U_m^2}{2J_{эф}^2} - R^2}. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), имеем

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{U_m^2\Big/\left(\sqrt{2}J_{эф}\right)^2 - R^2}}{R} = \operatorname{arctg}\sqrt{U_m^2\Big/\left(\sqrt{2}J_{эф}R\right)^2 - 1}.$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{110^2\Big/\left(\sqrt{2}\cdot 0{,}5\cdot 110\right)^2 - 1} = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1}{0{,}5} - 1}\right) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4};\ \varphi = 45°.$$

Ответ: $\varphi = 45°$.

Задача 5. В цепь переменного тока, частотой $\nu = 50$ Гц включена катушка длиной $l = 0{,}5$ м и площадью поперечного сечения $S = 10$ см^2, содержащая $N = 3000$ витков. Определить активное сопротивление катушки, если сдвиг фаз φ между напряжением и током составляет 60°.

Дано:	**Решение:**
$l = 0{,}5$ м $S = 10^{-3}$ м^2 $N = 3000$ $\varphi = 60°$	Индуктивность соленоида (катушки) рассчитывается по формуле $L = \dfrac{\mu_0 N^2 S}{l}$; сдвиг фаз в цепи без емкости определяется по формуле $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\omega L}{R}$, где $\omega = 2\pi\nu$, откуда
R – ?	

$$R = \frac{2\pi\nu\mu_0 N^2 S}{l\,\operatorname{tg}\varphi} = \frac{2\pi\cdot 50\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 3000^2\cdot 10^{-3}}{0{,}5\cdot\sqrt{3}} = 4{,}1 \text{ Ом}.$$

Ответ: $R = 4{,}1$ Ом.

Задача 6. Переменное напряжение, действующее значение которого $U_{эф} = 220$ В, а частота $\nu = 50$ Гц, подано на катушку без сердечника с индуктивностью L = 31,8 мГн и активным сопротивлением R = 10,0 Ом. Как изменится количество теплоты ΔQ, выделяющееся в катушке в секунду, если последовательно с катушкой включить конденсатор емкости C = 319 мкФ?

Дано:
$U_{эф} = 220$ В
$\nu = 50$ Гц
$R = 10$ Ом
$L = 3{,}18\cdot10^{-2}$ Гн
$C = 3{,}19\cdot10^{-4}$ Ф
$t = 1$ с
$\Delta Q - ?$

Решение: Количество джоулевой теплоты рассчитаем по формуле

$$Q = J_{эф}^2 R\cdot t, \text{ где } J_{эф} = \frac{U_{эф}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - 1/\omega C\right)^2}}.$$

Тогда $Q_1 = \dfrac{U_{эф}^2 R\ t}{R^2 + \left(\omega L\right)^2}$ – цепь без конденсатора;

$$Q_2 = \frac{U_{эф}^2 R\ t}{R^2 + \left(\omega L - 1/\omega C\right)^2} \text{ – цепь с конденсатором.}$$

$$Q_1 = \frac{220^2\cdot10\cdot1}{10^2 + \left(2\pi\cdot50\cdot3{,}18\cdot10^{-2}\right)^2} = 2{,}4\cdot10^3 \text{ Дж} = 2{,}4 \text{ кДж};$$

$$Q_2 = \frac{220^2\cdot10\cdot1}{100 + \left(2\pi\cdot50\cdot3{,}18\cdot10^{-2} - \dfrac{1}{2\pi\cdot50\cdot3{,}19\cdot10^{-4}}\right)^2} = 4{,}8\cdot10^3 \text{ Дж} = 4{,}8 \text{ кДж}.$$

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = 4{,}8 - 2{,}4 = 2{,}4 \text{ кДж}.$$

Ответ: увеличится на ΔQ = 2,4 кДж.

Задача 7. Цепь переменного тока образована последовательно включенными активным сопротивлением R = 800 Ом, индуктивностью L = 1,27 Гн и емкостью C = 1,59 мкФ. На зажимы цепи подано 50-периодное действующее напряжение $U_{эф}$ = 127 В. Найти действующее значение силы тока в цепи.

Дано:
$U_{эф} = 127$ В
$\nu = 50$ Гц
$R = 800$ Ом
$L = 1{,}27$ Гн
$C = 1{,}59\cdot10^{-6}$ Ф
$J_{эф} - ?$

Решение: Согласно основным формулам, где $\omega = 2\pi\nu$, имеем $J_{эф} = \dfrac{U_{эф}}{Z} = \dfrac{U_{эф}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - 1/\omega C\right)^2}} =$

$$= \frac{127}{\sqrt{800^2 + \left(2\pi\cdot50\cdot1{,}27 - \dfrac{1}{2\pi\cdot50\cdot1{,}59\cdot10^{-6}}\right)^2}} = 71 \text{ мА}.$$

Ответ: $J_{эф}$ = 71 мА.

Задача 8. Цепь переменного тока образована последовательно включенными активным сопротивлением R = 800 Ом, индуктивностью L = 1,27 Гн и емкостью C = 1,59 мкФ. На зажимы цепи подано 50-периодное действующее напряжение $U_{эф}$ = 127 В. Найти активную мощность, выделяющуюся в цепи.

Дано:	**Решение:** Согласно основным формулам:
$U_{эф}$ = 127 В ν = 50 Гц R = 800 Ом L = 1,27 Гн $C = 1{,}59\cdot10^{-6}$ Ф	$P = J_{эф}U_{эф}\cos\varphi = J^2_{эф}R;$ $J_{эф} = \dfrac{U_{эф}}{\sqrt{R^2+\left(\omega L - 1/\omega C\right)^2}},$
P – ?	где $\omega = 2\pi\nu$.

Подставляя численные значения, находим

$$P = J^2_{эф}R = \frac{U^2_{эф}R}{R^2+\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{127^2\cdot 800}{800^2+\left(2\pi\cdot 50\cdot 1{,}27 - \dfrac{1}{2\pi\cdot 50\cdot 1{,}59\cdot 10^{-6}}\right)^2} = 4 \text{ Вт}.$$

Ответ: P = 4 Вт.

Задача 9. Цепь переменного тока образована последовательно включенными активным сопротивлением R = 800 Ом, индуктивностью L = 1,27 Гн и емкостью C = 1,59 мкФ. На зажимы цепи подано ν = 50-периодное действующее напряжение U = 127 В. Найти сдвиг фаз φ между током и напряжением.

Решение: Согласно основным формулам

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = \mathrm{arctg}\frac{2\pi\cdot 50\cdot 1{,}27 - 1\big/\left(2\pi\cdot 50\cdot 1{,}59\cdot 10^{-6}\right)}{800} =$$

$$= \mathrm{arctg}\left(-2\right) = -1{,}11 \text{ рад} = -63^\circ.$$

Это сдвиг фаз между напряжением и током. В задаче нужно определить сдвиг фаз между током и напряжением, поэтому φ = 63°.

Ответ: φ = 63°.

Задача 10. Цепь переменного тока образована последовательно включенными активным сопротивлением R = 800 Ом, индуктивностью L = 1,27 Гн и емкостью C = 1,59 мкФ. На зажимы цепи подано ν = 50-периодное действующее напряжение U = 127 В. Найти действующие значения напряжений на активном сопротивлении U_R, на индуктивном сопротивлении U_L и на емкостном сопротивлении U_C.

Дано:	Решение: Согласно основным формулам
$U = 127$ В $\nu = 50$ Гц $R = 800$ Ом $L = 1{,}27$ Гн $C = 1{,}59\cdot10^{-6}$ Ф	$U_R = JR;$ $U_C = JX_C = J\dfrac{1}{\omega C};$ $U_L = JX_L = J\omega L;$
U_R – ? U_C – ? U_L – ?	$J = U/Z.$

Учитывая, что $\omega = 2\pi\nu$, проведем расчет полного сопротивления Z цепи и тока J:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{800^2 + \left(2\pi\cdot 50\cdot 1{,}27 - \frac{1}{2\pi\cdot 50\cdot 1{,}59\cdot 10^{-6}}\right)^2} = 1791{,}5 \text{ Ом};$$

$$J = \frac{U}{Z} = \frac{127}{1791{,}5} = 7{,}09\cdot 10^{-2} \text{ А}.$$

Тогда

$$U_R = JR = 7{,}09\cdot10^{-2}\cdot800 = 56{,}7 \text{ В};$$

$$U_C = J/(2\pi\nu C) = 7{,}09\cdot10^{-2}/(2\pi\cdot50\cdot1{,}59\cdot10^{-6}) = 141{,}7 \text{ В};$$

$$U_L = J\cdot2\pi\nu L = 7{,}09\cdot10^{-2}\cdot2\pi\cdot50\cdot1{,}27 = 28{,}2 \text{ В}.$$

Ответ: $U_R = 56{,}7$ В; $U_C = 141{,}7$ В; $U_L = 28{,}2$ В.

Задача 11. Конденсатор емкостью $C = 300$ пФ подключается через сопротивление $R = 500$ Ом к источнику постоянного напряжения U_0. Определить время t, по истечении которого напряжение на конденсаторе U составит $0{,}99U_0$.

Дано:	Решение: Во время зарядки конденсатора напряжение источника равно падению напряжения на резисторе $U_R(t) = JR$ плюс напряжение на емкости
$C = 3\cdot10^{-10}$ Ф $R = 500$ Ом $U = 0{,}99U_0$	$U_C(t) = \dfrac{q(t)}{C}:$
t – ?	

$$U_0 = \frac{dq(t)}{dt}R + \frac{q(t)}{C}, \tag{1}$$

где по определению $J = dq/dt$.

Подставляя $q(t) = U_C(t)C$ в (1), имеем

$$U_0 = \frac{dU_C(t)}{dt}CR + U_C(t).$$

Решаем дифференциальное уравнение путем разделения переменных

$$RC\frac{dU(t)}{U_0 - U(t)} = dt,$$

определим искомое время

$$t=-RC\int_0^{0{,}99U_0}\frac{d\left(U_0-U(t)\right)}{U_0-U(t)}=-RC\ln\left(U_0-U\right)\Big|_0^{0{,}99U_0}=$$

$$=-RC\left[\ln\left(U_0-0{,}99U_0\right)-\ln U_0\right]=-RC\ln 0{,}01.$$

$$t=-500\cdot 3\cdot 10^{-10}\cdot\ln 0{,}01=6{,}9\cdot 10^{-7}\text{ с}=0{,}69\text{ мкс}.$$

Ответ: t = 0,69 мкс.

Задача 12. Две квадратные пластины со стороной a = 300 мм, закрепленные на расстоянии d = 2,0 мм друг от друга, образуют плоский конденсатор, подключенный к источнику постоянного напряжения U = 250 В. Расположенные вертикально пластины погружают в сосуд с керосином со скоростью υ = 5 мм/с. Найти силу тока J, текущего при этом по подводящим проводам.

Дано:
$a = 0{,}3$ м
$d = 2\cdot 10^{-3}$ м
$U = 250$ В
$\varepsilon = 2$
$\upsilon = 5\cdot 10^{-3}$ м/с
J – ?

Решение: По определению емкости $C=q/U$, откуда

$$q = CU.$$

Цепь представляет собой два плоских конденсатора, подключенных к источнику параллельно $C = C_1 + C_2$.

У конденсаторов переменной во времени t оказывается ширина пластин: $C_1=\dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S_1(t)}{d}$; $C_2=\dfrac{\varepsilon_0 S_2(t)}{d}$;

$S_1(t) = a\times(\upsilon t)$ –площадь пластин в керосине (ε = 2);

$S_2(t) = a\times(a - \upsilon t)$ –площадь пластин в воздухе (ε = 1).

$$q=U\left(\frac{\varepsilon\varepsilon_0 a\upsilon t}{d}+\frac{\varepsilon_0 a(a-\upsilon t)}{d}\right)=\frac{U\varepsilon_0 a}{d}\left(\varepsilon\upsilon t+a-\upsilon t\right)=\frac{a\varepsilon_0 U}{d}\left[\upsilon t(\varepsilon-1)+a\right].$$

По определению $J = dq/dt$. Следовательно,

$$J=\frac{U\varepsilon_0 a}{d}\upsilon\left(\varepsilon-1\right)=1{,}7\cdot 10^{-9}\text{ А}=1{,}7\text{ нА}.$$

Ответ: J = 1,7 нА.

Задачи для самостоятельного решения

25.1. Вывести формулу и построить график зависимости величины мгновенной мощности переменного тока $J(t)$, частоты ν от времени в электрической цепи с резистором ($L \to 0$, $C \to 0$).

25.2. Мгновенное значение ЭДС $\mathcal{E}$ в момент $T/6$ равно 110 В. Найти действующее значение $\mathcal{E}_{эфф}$ ЭДС в сети, если $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_{max}\cos\omega t$.

Ответ: $\mathcal{E}_{эфф}=\dfrac{\mathcal{E}}{\sqrt{2}\cos\left(\pi/3\right)}=156\text{ В}.$

25.3. Мгновенное значение силы синусоидального тока $J = J_0\sin\omega t$ через 1/3 периода по модулю равно J_1 = 2,6 А. Какой будет модуль силы тока при фазе 1,5π?

Ответ: $J = \left|\dfrac{J_1\sin(1{,}5\pi)}{\sin(2\pi/3)}\right| = 3$ А.

25.4. Определить мощность, выделяемую на сопротивлении величиной R = 30 Ом в цепи переменного тока с амплитудой силы тока J_{m} = 0,1 А.

Ответ: $P = J_{\mathrm{m}}^2 R/2$ = 0,15 Вт.

25.5. Генератор, частота которого составляет ν = 32 кГц и амплитудное значение напряжения равно U_m = 120 В, включен в резисторную цепь, емкость которой C = 1 мкФ. Определить амплитудное значение U_{mC} напряжения на конденсаторе, если активное сопротивление цепи равно R = 5 Ом.

Ответ: $U_{mC} = \dfrac{U_m}{\sqrt{(2\pi\nu CR)^2 + 1}} = 84{,}6$ В.

25.6. В трех сосудах находятся вода, керосин и спирт. Плоский воздушный конденсатор с квадратными пластинами со стороной a = 900 мм и расстоянием между пластинами d = 12,0 мм подключен к источнику постоянного напряжения U = 250 В. Конденсатор располагают вертикально и опускают в один из сосудов со скоростью v = 10 мм/с, при этом в цепи возникает ток силой J = 1,7 нА. Какая жидкость находится в сосуде?

Ответ: $\varepsilon = 1 + Jd/(U\varepsilon_0 a v) = 2$; керосин.

25.7. Конденсатор емкости $C = 1{,}5\cdot10^{-10}$ Ф подключается через резистор R = 1 кОм к источнику постоянного тока U_0. Определить отношение напряжения на конденсаторе U_C к напряжению источника через t = 0,69 мкс после начала зарядки.

Ответ: $\dfrac{U}{U_0} = 1 - \exp\left(-\dfrac{t}{RC}\right) = 0{,}99.$

25.8. Цепь переменного тока образована последовательно включенными активным сопротивлением R = 800 Ом, индуктивностью L = 1,27 Гн и емкостью C = 1,59 мкФ. На зажимы цепи подано 50-периодное (ν = = 50 Гц) действующее напряжение $U_{эф}$ = 127 В. Найти: а) действующее значение силы тока $J_{эф}$ в цепи; б) сдвиг по фазе φ между током и напряжением; в) действующие значения напряжений U_R, U_L и U_C на зажимах каждого из элементов цепи; г) мощность P, выделяющуюся в цепи. Указание. Смотрите задачи из примеров.

Ответ: $J_{эф}$ = 71 мА; φ = 63°; U_R = 57 В; U_L = 28 В; U_C = 142 В; P = 4 Вт.

25.9. Переменное напряжение, частота которого ν = 50 Гц, подано на катушку без сердечника с индуктивностью L = 31,8 мГн и активным сопротивлением R = 10 Ом. Какую емкость C надо подсоединить последовательно с катушкой, чтобы количество теплоты Q, выделяющееся в катушке за t = 1 с, увеличилось в η = 2 раза?

Ответ: $\eta = \dfrac{Q_2}{Q_1} = \dfrac{R^2 + (2\pi\nu L)^2}{R^2 + \left[2\pi\nu L - 1/(2\pi\nu C)\right]^2}$. Отсюда C = 319 мкФ.

25.10. На зажимы цепи (рис. 25.3) подается переменное напряжение с действующим значением U = 220 В и частотой ν = 50 Гц. Активное сопротивление цепи R = 22 Ом, индуктивность L = 318 мГн. Емкость цепи подбирается так, чтобы показание вольтметра, включенного параллельно индуктивности, стало максимальным. Найти показания вольтметра U_L и ток J в этих условиях. Полным сопротивлением амперметра и ответвлением тока в цепь вольтметра можно пренебречь.

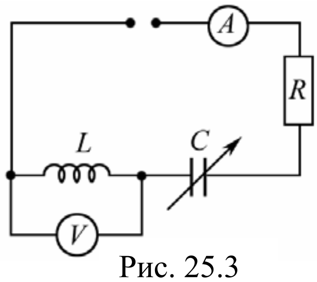


Рис. 25.3

Ответ: $U_L = 2\pi\nu UL/R$ = 1,0 кВ; $J = U/R$ = 10 А.

25.11. Катушка индуктивностью L = 0,7 Гн и активным сопротивлением R = 1000 Ом подключена сначала к источнику переменного тока, частота которого ν = 400 Гц, а затем к источнику постоянного тока. Во сколько сопротивление катушки переменному току больше, чем постоянному?

Ответ: $Z/R = \sqrt{1 + (2\pi\nu L/R)^2} = 2{,}0$.

25.12. Цепь переменного тока образована последовательно включенными активным сопротивлением R = 800 Ом, индуктивностью L и емкостью C. Частота переменного тока равна ν = 50 Гц, действующие напряжения на активном сопротивлении U_R = 57 В, на емкости U_C = 142 В и на индуктивности U_L = 28 В. Найти значение емкости и индуктивности.

Ответ: $C = \dfrac{U_R}{2\pi\nu U_C R} = 1{,}6$ мкФ; $L = \dfrac{U_L R}{2\pi\nu U_R} = 1{,}25$ Гн.

25.13. Цепь переменного тока образована последовательно включенными активным сопротивлением R, индуктивностью L и емкостью C. Найти эффективное напряжение на зажимах цепи, если действующие напряжения на активном сопротивлении U_R = 57 В, на емкости U_C = 142 В и на индуктивности U_L = 28 В.

Ответ: $U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = 127$ В.

25.14. Переменное напряжение, действующее значение которого $U = 220$ В и частота $\nu = 50$ Гц, подано на катушку с индуктивностью $L =$ $= 31{,}8$ мГн и активным сопротивлением $R = 10{,}0$ Ом. Найти количество тепла, выделяющееся в катушке за $t = 1$ с.

Ответ: $Q = \dfrac{U^2 Rt}{R^2 + (2\pi\nu L)^2} = 2{,}4$ кДж.

25.15. Катушка длиной $l = 50$ см и площадью поперечного сечения $S = 10$ см^2 включена в цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц. Число витков катушки $N = 3000$. Найти сопротивление R катушки, если сдвиг фаз между напряжением и током $\varphi = 60°$.

Ответ: $R = \dfrac{\omega L}{\operatorname{tg}\varphi} = \dfrac{2\pi\nu\mu_0 N^2 S}{l \cdot \operatorname{tg}\varphi} = 4{,}1$ Ом.

25.16. Обмотка катушки состоит из $N = 500$ витков медной проволоки, площадь поперечного сечения которой $S = 1$ мм^2. Длина катушки $l =$ $= 50$ см, ее диаметр $D = 5$ см. При какой частоте ν переменного тока полное сопротивление Z катушки вдвое больше ее активного сопротивления R ($\eta = Z/R = 2$)?

Ответ: $\nu = \dfrac{\sqrt{\eta^2 - 1} \cdot 2\rho_{\text{Cu}} l}{\pi\mu_0 NDS} \approx 298$ Гц

25.17. Катушка длиной $l = 25$ см и радиусом $r = 2$ см имеет обмотку из $N = 1000$ витков медной проволоки, площадь поперечного сечения которой $S = 1$ мм^2. Катушка включена в цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц. Какую часть полного сопротивления Z катушки составляет активное сопротивление R и индуктивное сопротивление X_L?

Ответ: $\dfrac{R}{Z} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (\pi\nu\mu_0 NrS)^2 / (\rho_{\text{Cu}} l)^2}} = 0{,}73$;

$$\frac{X_L}{Z} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\rho_{\text{Cu}} l)^2 / (\pi\nu\mu_0 NrS)^2}} = 0{,}68.$$

25.18. Конденсатор емкостью $C = 20$ мкФ и резистор, сопротивление которого $R = 150$ Ом, включены последовательно в цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц. Какую часть напряжения U, приложенного к этой цепи, составляют падения напряжения на конденсаторе U_C и на резисторе U_R?

Ответ: $\dfrac{U_C}{U} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (2\pi\nu CR)^2}} = 0{,}728$; $\dfrac{U_R}{U} = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + 1/(2\pi\nu C)^2}} = 0{,}686$.

25.19. Два конденсатора с емкостями C_1 = 0,2 мкФ и C_2 = 0,1 мкФ включены последовательно в цепь переменного тока напряжением U = 220 В и частотой ν = 50 Гц. Найти ток J в цепи и падение потенциала U_{C1} и U_{C2} на первом и втором конденсаторах.

Ответ: $J = 2\pi\nu U \dfrac{C_1C_2}{C_1 + C_2} = 4{,}6$ мА;

$U_{C1} = UC_2/(C_1 + C_2) = 73{,}4$ В; $U_{C2} = UC_1/(C_1 + C_2) = 146{,}6$ В.

25.20. Конденсатор и электрическая лампочка соединены последовательно и включены в цепь переменного тока напряжением U = 440 В и частотой ν = 50 Гц. Какую емкость C должен иметь конденсатор для того, чтобы через лампочку протекал ток J = 0,5 А и падение потенциала на ней было равным $U_Л$ = 110 В?

Ответ: $C = \dfrac{J}{2\pi\nu\sqrt{U^2 - U_Л^2}} = 3{,}74$ мкФ.

25.21. Найти формулы для полного сопротивления Z и сдвига фаз φ между напряжением и током при различных способах включения сопротивления R, емкости C и индуктивности L. Рассмотреть случаи: а) R и C включены последовательно; б) R и C включены параллельно; в) R и L включены последовательно; г) R и L включены параллельно; д) R, C и L включены последовательно.

Ответ: а) $Z = \sqrt{R^2 + \dfrac{1}{\omega^2C^2}}$; $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{1}{\omega CR}$; б) $Z = \dfrac{R}{\sqrt{1 + R^2\omega^2C^2}}$; $\operatorname{tg}\varphi = -\omega CR$;

в) $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$; $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\omega L}{R}$; г) $Z = \dfrac{R\omega L}{\sqrt{R + (\omega L)^2}}$; $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{R}{\omega L}$;

д) $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$; $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\omega L - 1/\omega C}{R}$.

25.22. Конденсатор емкостью C = 1 мкФ и резистор сопротивлением R = 3 кОм включены в цепь переменного тока частотой ν = 50 Гц. Найти полное сопротивление Z цепи, если конденсатор и резистор включены: а) последовательно; б) параллельно.

Ответ: а) $Z_{посл} = \sqrt{R^2 + 1/(2\pi\nu C)^2} = 4{,}38$ кОм;

б) $Z_{парал} = R/\sqrt{1 + (2\pi\nu CR)^2} = 2{,}18$ кОм.

25.23. Индуктивность L = 22,6 мГн и сопротивление R включены параллельно в цепь переменного тока частотой ν = 50 Гц. Найти сопротивление R, если известно, что сдвиг фаз между напряжением и током φ = 60°.

Ответ: $R = 2\pi\nu L\cdot\operatorname{tg}\varphi$ = 12,3 Ом.

25.24. Активное сопротивление R и индуктивность L соединены параллельно и включены в цепь переменного тока напряжением U = 127 В и частотой ν = 50 Гц. Найти сопротивление R и индуктивность L, если известно, что цепь поглощает мощность P = 404 Вт и сдвиг фаз между напряжением и током φ = 60°.

Ответ: $R = \dfrac{U^2}{P} = 39{,}9\ \text{Ом}$; $L = R\big/\left(2\pi\nu \cdot \operatorname{tg}\varphi\right) = 73\ \text{мГн}$.

25.25. В цепь переменного тока напряжением U = 220 В включены последовательно емкость C, сопротивление R и индуктивность L. Найти падение напряжения U_R на сопротивлении, если известно, что падение напряжения на конденсаторе $U_C = 2U_R$, на индуктивности $U_L = 3U_R$.

Ответ: $U_R = U\big/\sqrt{2} = 155{,}6\ \text{В}$.

26. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ

Основные формулы и обозначения

Плотность потока энергии, переносимой электромагнитной волной, определяется вектором Пойнтинга

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E},\mathbf{H}] = w\boldsymbol{\upsilon},$$

где $w = (\varepsilon\varepsilon_0 E^2/2 + \mu\mu_0 H^2/2) = \mu\mu_0 H^2 = \varepsilon\varepsilon_0 E^2$ – объемная плотность энергии электромагнитного поля; $\upsilon = c/n$.

В вакууме $S = wc$.

Импульс единицы объема электромагнитного поля (плотность импульса), связанной с движением энергии излучения:

$$\mathbf{g}_\text{м} = \frac{w\boldsymbol{\upsilon}}{c^2} = \frac{\mathbf{S}}{c^2}.$$

В вакууме $g_\text{м} = w/c$.

Величина полного давления электромагнитного излучения, оказываемого на поверхность тела

$$P = (1 + \rho)g_\text{м}c = (1 + \rho)w,$$

где ρ – коэффициент отражения излучения.

Средняя мощность $\langle P\rangle$ излучения электрона, совершающего гармонические колебания с циклической частотой ω и амплитудой a_0,

$$\langle P\rangle = \frac{\mu_0}{12\pi c}\omega^4 e^2 a_0^2.$$

Поле излучения диполя, колеблющегося по закону $p = p_0\cos\omega t$, на больших расстояниях r от него

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_0\omega^2}{c^2 r}\sin\theta\cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Средняя мощность $\langle P\rangle$ излучения колеблющегося диполя, обладающего дипольным моментом $\mathbf{p}_0 = q\mathbf{l}$,

$$\langle P\rangle = \frac{p_0^2\omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{4p_0^2\pi^3\nu^4}{3\varepsilon_0 c^3}.$$

Излучение точечного заряда q, двигающегося с ускорением a при условии, что его скорость $\upsilon << c$ (вектор $\mathbf{E}$ направлен по нормали к радиус-вектору $\mathbf{r}$)

$$E = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}a\left(t - \frac{r}{c}\right)\sin\theta,$$

где θ – угол, который составляет вектор ускорения **a** и радиус-вектор **r**, проведенный в точку наблюдения; $a(t - r/c)$ – ускорение в момент времени $(t - r/c)$.

Зависимость показателя преломления n среды от частоты ω падающего излучения, согласно электронной теории дисперсии,

$$n(\omega) = 1 + \frac{N_e e^2}{2m\varepsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)}, \text{ при } |n - 1| \ll 1.$$

где N_e – концентрация колеблющихся атомных электронов с собственной частотой ω_0; e и m – элементарный заряд и масса электрона. Для свободных электронов $\omega_0 = 0$.

Ослабление монохроматической волны при её распространении через рассеивающую (поглощающую) среду

$$I(x) = I_0 e^{-N\sigma x},$$

где I_0, I – интенсивность волны соответственно на входе и выходе слоя вещества толщиной x; N – концентрация рассеивающих (поглощающих) частиц; $\sigma(\omega)$ – сечение рассеяния (поглощения) одной частицы.

Для газов ($n \approx 1$) сечение рассеяния $\sigma(\omega) = \frac{2}{3\pi}\left(\frac{n-1}{N}\right)^2\left(\frac{\omega}{c}\right)^4$.

Задачи с решениями

Задача 1. Космический корабль массой m = 1 т приводится в движение с помощью пучка света. Насколько увеличится скорость корабля после работы двигателя в течение суток, если мощность P пучка 10 кВт (влиянием гравитационных сил можно пренебречь)?

Дано:
$m = 1\cdot10^3$ кг
$P = 1\cdot10^4$ Вт
$\Delta t = 8{,}64\cdot10^4$ с
$\Delta \upsilon$ – ?

Решение: Космический корабль такой малой массы не может иметь мощный и долго работающий двигатель. Следовательно, источник излучения находится вне корабля (например, на космической платформе), а корабль имеет только зеркальный отражатель с коэффициент отражения ρ.

Импульс единицы объема электромагнитного поля: $g_м = S/c^2$, где S – модуль вектора Пойнтинга. Элементарный импульс пучка света сечением $S_п$ равен $dp = g_м dV = \frac{S}{c^2} S_п c dt = \frac{P}{c} dt$, где $P = SS_п$ – мощность источника света.

Нормально падающее на зеркальный отражатель излучение за время Δt передает поверхности импульс

$$\Delta p = m\Delta \upsilon = (1+\rho)\frac{P}{c}\Delta t \text{. Отсюда } \Delta \upsilon = (1+\rho)\frac{P\Delta t}{mc}.$$

Учитывая, что коэффициент отражения $\rho \approx 1$, получаем

$$\Delta \upsilon = \frac{2P\Delta t}{mc} = \frac{2\cdot 10^4 \cdot 8,64\cdot 10^4}{1\cdot 10^3 \cdot 3\cdot 10^8} = 5,76\cdot 10^{-3} \text{ м/с} = 5,76 \text{ мм/с.}$$

Ответ: 5,76 мм/с.

Альтернативное решение. Решим задачу на основе квантовых представлений. Квант света обладает энергией $\varepsilon = h\nu$ и импульсом $p_\nu = h/\lambda = \varepsilon/c$. Источник излучения мощностью P за время Δt испускает число фотонов $N_ф = P\Delta t/\varepsilon$. Нормально падающий на зеркальный отражатель фотон передает поверхности импульс $p = (1 + \rho)p_\nu = (1 + \rho)\varepsilon/c$. Полный импульс, полученный кораблем за время Δt равен $m\Delta\upsilon = N_ф p$.

Следовательно, скорость корабля увеличится на $\Delta \upsilon = (1+\rho)\dfrac{P\Delta t}{mc}$.

Задача 2. Солнечная постоянная S (полное количество лучистой энергии Солнца, падающее вне атмосферы Земли на площадку единичной площади, расположенную перпендикулярно солнечным лучам) равна 1369 Вт/м^2. Чему равны соответствующие среднеквадратичные значения $\langle E\rangle$ и $\langle B\rangle$ электромагнитной волны?

Дано:
$\langle S\rangle = 1369$ Вт/м^2
$\langle E\rangle$ – ? $\langle B\rangle$ – ?

Решение: Средняя мощность, переносимая излучением и приходящаяся на единицу поверхности, равна

$$\langle S\rangle = wc = (\varepsilon\varepsilon_0 E^2/2 + \mu\mu_0 H^2/2)c.$$

В ЭМ волне выполняется соотношение $\sqrt{\mu\mu_0}H = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E$. Следовательно, при $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$, имеем

$$\langle S\rangle = \varepsilon_0 c\langle E^2\rangle.$$

Отсюда $\langle E\rangle = \sqrt{\langle E^2\rangle} = \sqrt{\dfrac{\langle S\rangle}{\varepsilon_0 c}} = \sqrt{\dfrac{1369}{8,85\cdot 10^{-12}\cdot 3\cdot 10^8}} = 718$ В/м.

Из соотношения $\sqrt{\mu_0}H = \sqrt{\varepsilon_0}E$ имеем $\varepsilon_0\langle E^2\rangle = \mu_0\langle H^2\rangle$ или $\mu_0\varepsilon_0\langle E^2\rangle = \mu_0^2\langle H^2\rangle = \langle B^2\rangle$. Так как $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$, то $\langle E^2\rangle = c^2\langle B^2\rangle$. Отсюда

$$\langle B\rangle = \sqrt{\langle E^2\rangle/c^2} = \langle E\rangle/c = 718/3\cdot 10^8 = 2,4\cdot 10^{-6} \text{ Тл} = 2,4 \text{ мТл.}$$

Ответ: $\langle E\rangle = 718$ В/м; $\langle B\rangle = 2,4$ мкТл.

Задача 3. Свободный электрон находится в переменном электрическом поле, амплитуда E_0 которого равна 0,1 В/м. Чему равна амплитуда колебаний электрона а) при $\nu_1 = 1$ кГц? б) при $\nu_2 = 100$ МГц?

Дано:	Решение: Запишем второй закон Ньютона для свободного электрона в переменном электрическом поле
$E_0 = 0{,}1$ В/м $\nu_1 = 1\cdot10^3$ Гц $\nu_2 = 1\cdot10^8$ Гц	$m\ddot{x} = -eE_0 \sin\omega t$ или $\ddot{x} = -\dfrac{eE_0}{m}\sin\omega t,$
A_{01} – ? A_{02} – ?	где e – элементарный заряд; m – масса электрона.

Решение уравнения имеет вид $x = A_0\sin\omega t$, где $A_0 = eE_0/(m\omega^2)$ – амплитуда колебаний свободного электрона; $\omega = 2\pi\nu$.

Производя вычисления, получаем

а) $$A_{01} = \frac{eE_0}{m(2\pi\nu_1)^2} = \frac{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot0{,}1}{9{,}1\cdot10^{-31}\cdot\left(2\pi\cdot10^3\right)^2} = 445{,}5\ \text{м}.$$

б) $$A_{02} = \frac{eE_0}{m(2\pi\nu_2)^2} = \frac{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot0{,}1}{9{,}1\cdot10^{-31}\cdot\left(2\pi\cdot10^8\right)^2} = 4{,}5\cdot10^{-8}\ \text{м} = 45\ \text{нм}.$$

Ответ: $A_{01} = 445{,}5$ м; $A_{02} = 45$ нм.

Задача 4. Предположим, что молекулы воздуха при действии на них света с частотами ν_1 и ν_2 начинают колебаться, причем молекулы приобретают дипольный момент $p = p_0(\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t)$. Если ν_1 соответствует голубому свету ($\lambda_1 = 400$ нм), а ν_2 – красному ($\lambda_2 = 700$ нм), то каково отношение соответствующих энергий излучаемого света? Приведите численный ответ.

Дано:	Решение: Средняя мощность излучения колеблющейся молекулы, обладающей дипольным моментом p_0,
$\lambda_1 = 400$ нм $\lambda_2 = 700$ нм	равна $\langle P\rangle = \dfrac{p_0^2\omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3} = \dfrac{4p_0^2\pi^3\nu^4}{3\varepsilon_0 c^3}$.
$\langle P_1\rangle/\langle P_2\rangle$ – ?	

Излучаемые мощности пропорциональны четвертым степеням частот ν колебаний электрических зарядов. Поскольку амплитуды дипольных моментов равны, получаем

$$\frac{\langle P_1\rangle}{\langle P_2\rangle} = \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^4 = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^4 = \left(\frac{700}{400}\right)^4 = 9{,}4\,.$$

Преимущественно излучается голубой свет.

Ответ: $\langle P_1\rangle/\langle P_2\rangle = 9{,}4$.

Задача 5. Найдите показатель преломления алюминия для рентгеновских лучей с длиной волны $\lambda = 1{,}56\cdot10^{-8}$ см, предполагая, что электроны в алюминии имеют собственную частоту, много меньшую, чем частота рентгеновских лучей.

Дано:	**Решение:** Воспользуемся формулой для зависимости показателя преломления n от частоты ω падающего излучения. При $\lvert n-1\rvert \ll 1$
$\lambda = 1{,}56\cdot 10^{-10}$ м	
$\rho_{Al} = 2{,}7\cdot 10^{3}$ кг/м^3	
$n_e = 13$	
$(1-n)$ – ?	

$$n(\omega) = 1 + \frac{N_e e^2}{2m\varepsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)},$$

где $N_e = Nn_e$ – концентрация колеблющихся атомных электронов с собственной частотой ω_0; N – число атомов ${}^{27}_{13}\mathrm{Al}$ в единице объема; n_e – число электронов в одном атоме.

По условию задачи $\omega_0 \ll \omega$, следовательно, $1 - n = \dfrac{Nn_e e^2}{2m\varepsilon_0\omega^2}$.

Концентрация атомов $N = \rho_{Al}N_A/\mu_{Al}$, где $N_A = 6\cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – число Авогадро; $\mu_{Al} = 27\cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса Al. Учитывая, что $\omega = 2\pi\nu = 2\pi c/\lambda$, получим

$$1 - n = \frac{\rho N_A n_e e^2 \lambda^2}{2m\varepsilon_0\mu_{Al}(2\pi c)^2} = \frac{\rho N_A n_e}{2m\varepsilon_0\mu_{Al}}\left(\frac{e\lambda}{2\pi c}\right)^2.$$

Подставляя числовые значения, найдем искомую величину

$$1 - n = \frac{2{,}7\cdot 10^{3}\cdot 6\cdot 10^{23}\cdot 13}{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 27\cdot 10^{-3}}\cdot\left(\frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 1{,}56\cdot 10^{-10}}{2\pi\cdot 3\cdot 10^{8}}\right)^2 = 8{,}5\cdot 10^{-6}.$$

Экспериментально найденное значение составляет $(1-n) = 8{,}4\cdot 10^{-6}$.

Ответ: $(1-n) = 8{,}5\cdot 10^{-6}$.

Задача 6. Допустим, что плохо проводящая пластинка имеет удельное сопротивление ρ. При какой толщине пластинки поле падающей волны $E_{пад}$ уменьшится вдвое? Запишите ответ через ρ, ε_0 и c (плохая проводимость означает, что эта толщина эквивалентна большому числу волн).

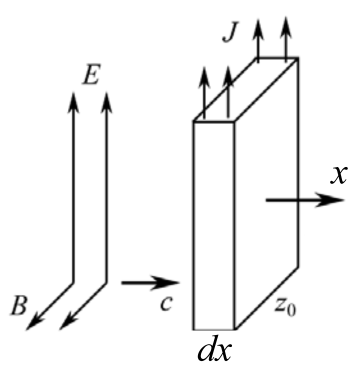


Рис. 26.1

Решение: На глубине dx (рис. 26.1) электрическое поле за счет излучения индуцированным током J убывает на величину

$$dE = -\frac{2\pi k_0}{c}J\cdot dx,\ \text{где}\ k_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Согласно закону Ома в дифференциальной форме $J = E/\rho$, имеем $dE = -\dfrac{2\pi k_0}{c\rho}E\cdot dx$, откуда

$$\frac{dE}{E} = -\frac{2\pi k_0}{c\rho}dx.$$

Интегрируя, $\int\limits_{E_{\text{пад}}}^{E} \frac{dE}{E} = -\frac{2\pi k_0}{c\rho}\int\limits_0^x dx$; $\ln\frac{E}{E_{\text{пад}}} = -\frac{2\pi k_0}{c\rho}x$,

находим $$E = E_{\text{пад}}\exp\left(-\frac{2\pi k_0}{c\rho}x\right) = E_{\text{пад}}\exp\left(-\frac{x}{2c\rho\varepsilon_0}\right).$$

По условию задачи $E = E_{\text{пад}}/2$, откуда $x(0{,}5) = 2c\rho\varepsilon_0\ln 2$.

Ответ: $x(0{,}5) = 2c\rho\varepsilon_0\ln 2$.

Задача 7. Предположим, что электрон проводимости находится в электрическом поле $E = E_0\cos\omega t$, где $E_0 = 100$ В/м и $\nu = 100$ Гц. Какова амплитуда A_0 колебаний?

Дано:	**Решение:** Так как электроны проводимости свободны, т.е. $\omega_0 = 0$, поэтому $F = -eE$. Отсюда (см. задачу 3)
$E_0 = 100$ В/м	
$\nu = 100$ Гц	
A_0 – ?	$A_0 = \frac{eE_0}{\omega^2 m} = \frac{eE_0}{(2\pi)^2\nu^2 m} = \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 100}{(2\pi)^2\cdot 10^4\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}} = 4{,}5\cdot 10^7$ м.

Столь большая амплитуда колебаний электрона в металлах, естественно, не достижима. Реально амплитуда ограничивается длиной свободного пробега электрона.

Ответ: $A_0 = 4{,}5\cdot 10^7$ м.

Задача 8. Заряд Q движется с ускорением **a** вдоль оси z. В нештрихованной системе заряд q находится в точке, показанной на рисунке для $t = 0$. Какова величина и направление действующей на заряд q силы, обусловленной полем излучения заряда Q?

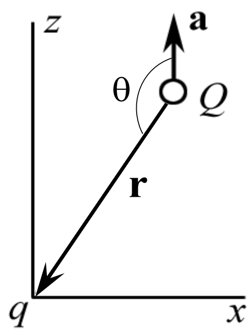


Рис. 26.2

Решение: Поле излучения заряда, двигающегося с ускорением a, равно

$$E = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}a\left(t - \frac{r}{c}\right)\sin\theta,$$

где θ – угол между вектором ускорения **a** и радиусом-вектором **r** (рис. 26.2); $a(t - r/c)$ – ускорение в момент времени $(t - r/c)$.

Сила, действующая на заряд, направлена по нормали к радиусу-вектору **r** и равна

$$F = qE = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}a\left(t - \frac{r}{c}\right)\sin\theta.$$

Задача 9. Покажите, что если уравнение движения заряженного осциллятора имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+m\omega_0^2x-\frac{2e^2}{12\pi\varepsilon_0c^3}\frac{d^3x}{dt^3}=F(x),$$

то член, содержащий третью производную, правильно описывает скорость уменьшения энергии при излучении (сопротивление излучения) для любой частоты.

Примечание. Пусть $F(t) = A\cos\omega t$. Найдите количество энергии, излучаемой осциллятором.

Решение: Запишем вынуждающую силу в виде $F(t) = eE_0e^{i\omega t}$, где e – элементарный заряд. Решение уравнения движения заряженного осциллятора имеет вид

$$x=\frac{eE_0e^{i\omega t}}{m(\omega_0^2-\omega^2+i\gamma_R\omega)}.$$

Отсюда $\gamma_R=\dfrac{2e^2\omega^2}{12\pi c^2\varepsilon_0}$.

Задача 10. Пучок света проходит через область, содержащую N рассеивающих центров в единице объема. Сечение рассеяния света на каждом из них равно σ. Покажите, что интенсивность света в зависимости от пройденного расстояния x описывается формулой $I = I_0e^{-N\sigma x}$.

Решение: Рассмотрим слой единичной площади и бесконечно малой толщины dx, расположенный перпендикулярно падающему свету. Изменение интенсивности dI света в этом слое равно произведению самой интенсивности на вероятность рассеяться в этом объеме. В этом слое будет Ndx центров. Суммарная эффективная площадь рассеяния равна сумме эффективных сечений рассеяния всех центров в слое (поскольку dx бесконечно малая величина, элементарные площадки не перекрывают друг с друга), т.е. равна $N\sigma dx$. Вероятность рассеяния в выделенном слое будет равна отношению площади $N\sigma dx$ к единичной площади поверхности слоя, т.е. численно равна $N\sigma dx$. Отсюда

$$dI = -IN\sigma dx,$$

или

$$\frac{dI}{I}=-N\sigma dx. \qquad (1)$$

Интегрируя уравнение (1), находим

$$\int_{I_0}^{I}\frac{dI}{I} = -N\sigma\int_0^x dx\,;\ \ln(I/I_0) = -N\sigma x,\ I = I_0 e^{-N\sigma x}.$$

Задача 11. Используя выражение для сечения рассеяния

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2}\right)\frac{\omega^4}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2}$$

и выведенную формулу для показателя преломления газа n, покажите, что величина $N\sigma$ может быть записана в виде $N\sigma = \dfrac{2}{3\pi}\dfrac{(n-1)^2}{N}\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\right)^4$.

(Таким способом впервые было вычислено число Авогадро при излучении рассеяния света, $N = \rho N_A/\mu$ – число рассеивающих центров в единице объема).

Решение: Выражение для показателя преломления света имеет следующий вид:

$$n-1 = \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)} = Nc^2\left(\frac{e^2}{2\varepsilon_0 m_e c^2}\right)\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}$$

Возводя обе части этой формулы в квадрат и поделив левую и правую части получившегося выражения на соответственно левую и правую части выражения для σ, получаем соотношение, из которого требуемый результат вытекает совсем просто.

Задача 12. Сколько голубого света (λ = 4500 Å), испускаемого Солнцем, проходит через атмосферу Земли, когда Солнце находится а) в зените; б) по углом 10° к горизонту? Толщину атмосферы h, приведенную к постоянному давлению в 1 атм, принять равной 10 км, показатель преломления воздуха n = 1,000292.

Дано:
$\lambda = 4{,}5\cdot10^{-7}$ м
$h = 10^4$ м
$n = 1{,}000292$
$\theta_1 = 90°$
$\theta_2 = 10°$

$I(\theta_1)/I_0$ – ?
$I(\theta_2)/I_0$ – ?

Решение: Концентрация N молекул при нормальных условиях ($p_0 = 1\cdot10^5$ Па, T = 273 К) наиболее просто определяется из уравнения состояния идеального газа $p_0 = NkT$, где $k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К– постоянная Больцмана. Тогда

$$N = p_0/(kT) = 1\cdot10^5/(1{,}38\cdot10^{-23}\cdot273) = 2{,}65\cdot10^{25}\ \text{м}^{-1}.$$

Интенсивность солнечного излучения, прошедшего в атмосфере

$$I(x) = I_0 e^{-N\sigma x} = I_0 e^{-\frac{2(n-1)^2}{3\pi N}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 x} \quad (1)$$

Проведем расчет коэффициента перед x в экспоненте

$$N\sigma = \frac{2(n-1)^2}{3\pi N}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 = \frac{2\cdot(0{,}000292)^2}{3\pi\cdot 2{,}65\cdot 10^{25}}\cdot\left(\frac{2\pi}{4{,}5\cdot 10^{-7}}\right)^4 = 2{,}6\cdot 10^{-5}\ \text{м}^{-1}.$$

Тогда
$$I(x) = I_0 \exp\left(-2{,}6\cdot 10^{-5} x\right) \quad (2)$$

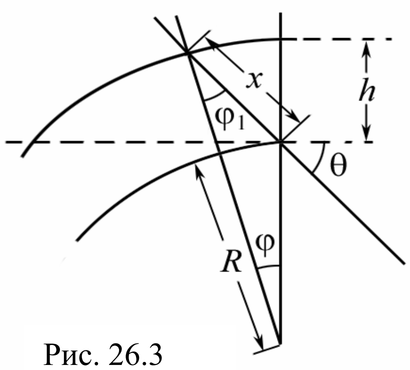


Рис. 26.3

Зависимость x от угла θ, под которым Солнце стоит над горизонтом, можно определить геометрически (рис. 26.3):

$$\frac{R+h}{\sin\theta} = \frac{x}{\sin\varphi} = \frac{R}{\sin\varphi'},\ \varphi + \varphi' = \theta,$$

где R – радиус Земли. Исключая из этих соотношений φ и φ′, получаем

$$x = \sqrt{(R+h)^2 - R^2\cos^2\theta} - R\sin\theta.$$

Принимая $R = 6{,}4\cdot 10^6$ м, имеем

$$x_2\left(10^\circ\right) = \left[\sqrt{6{,}41^2 - \left(6{,}40\cdot\cos 10^\circ\right)^2} - 6{,}40\cdot\sin 10^\circ\right]\cdot 10^6 = 5{,}6\cdot 10^4\ \text{м},$$

очевидно, что $x_1(90^\circ) = h = 1\cdot 10^4$ м.

Подставляя $x_1(90^\circ)$ и $x_2(10^\circ)$ в формулу (2), получаем

$$I(\theta_1)/I_0 = \exp(-2{,}6\cdot 10^{-5}\cdot 1\cdot 10^4) = \exp(-0{,}26) \approx 0{,}77 = 77\ \%.$$

$$I(\theta_2)/I_0 = \exp(-2{,}6\cdot 10^{-5}\cdot 5{,}6\cdot 10^4) = \exp(-1{,}456) \approx 0{,}23 = 23\ \%.$$

Ответ: $I(\theta_1)/I_0 = 77\ \%$; $I(\theta_2)/I_0 = 23\ \%$.

Примечание. Расчет $x_2(10^\circ)$ в данной задаче можно существенно упростить, если учесть, что $h \ll R$, т.е. пренебречь кривизной. Тогда $x_2(10^\circ) = h/\sin 10^\circ = 1\cdot 10^4/0{,}174 = 5{,}7\cdot 10^4$ м, т.е. погрешность менее 2 %.

Задача 13. Внутренняя корона Солнца (называемая K-короной) представляет собственно солнечный свет, рассеянный свободными электронами. Кажущаяся яркость K-короны на расстоянии одного солнечного радиуса от солнечного диска составляет около 10^{-8} от яркости самого диска (на единицу площади). Вычислите число свободных электронов в 1 см^3 пространства вблизи Солнца.

Решение: Для проведения расчетов необходимо сделать конкретизирующие предположения о распределении электронов в околосолнечном пространстве. Для требуемой оценки можно предположить, что они равномерно заполняют сферу с радиусом вдвое больше солнечного.

Свет, рассеянный в K-короне свободными электронами, будет равномерно излучаться во все стороны, и определять яркость свечения короны. Если считать, что каждый квант света рассеивается не больше чем один раз, то на расстоянии, равном солнечному радиусу, будет рассеяна доля полного солнечного излучения, равная

$$r' = 1 - \exp\left(-N_e \sigma R\right),$$

где N_e – искомая плотность электронов; σ – сечение классического (томсоновского) рассеяния фотона на свободном электроне; $\sigma = (8/3)\cdot\pi a_0^2$, где $a_0 = e^2/(4\pi\varepsilon_0\cdot mc^2) = 2{,}8\cdot10^{-15}$ м – классический радиус электрона.

Подставляя числовые значения, получим $\sigma = 6{,}66\cdot10^{-29}$ м^2.

Этот рассеянный свет излучается сферой, радиус которой вдвое, а поверхность – вчетверо больше поверхности Солнца. Поэтому отношение ее яркости к яркости солнечного диска (яркость в данном случае есть количество квантов, испускаемых единицей площади поверхности в единицу времени) есть $r = r'/4$. Поскольку для рассеянного излучения $N_e\sigma R$ и, следовательно, показатель экспоненты малы, то можно воспользоваться приближенной формулой $e^{-x} \approx 1 - x$. Тогда, приравнивая r численному значению, из условия задачи получаем $r = 10^{-8} = N_e\sigma R/4$; подставляя $R = 7\cdot10^8$ м, вычисляем

$$N_e = \frac{4r}{\sigma R} = \frac{4\cdot10^{-8}}{6{,}66\cdot10^{-29}\cdot7\cdot10^{8}} \approx 8{,}6\cdot10^{11}\ \text{м}^{-3} = 8{,}6\cdot10^{5}\ \text{см}^{-3}.$$

Ответ: $N_e = 8{,}6\cdot10^5$ см$^{-3}$.

Задача 14. Покажите, что величина $(\varepsilon_0 c)^{-1}$ имеет размерность сопротивления, и оцените ее численно.

Решение: Количество энергии излучения, проходящей в 1 с через 1 м^2 поверхности, связано со средней напряженностью поля излучения в этой точке, $S = \varepsilon_0 c\langle E^2\rangle$ (S имеет размерность Вт/м^2, E – В/м). Следовательно, размерность $(\varepsilon_0 c)^{-1} = \langle E^2\rangle/S$ [В^2·с/Дж].

Согласно формуле для джоулевой теплоты $Q = (U^2/R)t$ убеждаемся, что $R = U^2t/Q$ [В^2·с/Дж], т.е. величина $(\varepsilon_0 c)^{-1}$ имеет размерность R. Численное значение $R = (\varepsilon_0 c)^{-1} = 377$ Ом.

Ответ: $R = (\varepsilon_0 c)^{-1} = 377$ Ом.

Задача 15. Межзвездное пространство заполнено облаками из крошечных пылинок, состоящих из углерода, льда и очень малого количества других элементов. Какова должна быть минимальная масса таких пылинок, отнесенная к единице площади (1 г/см^2), способная ухудшить наши наблюдения за звездами, скажем, в 100 раз (т.е. на 0,5 звездной величины). Не забудьте, что свет от звезд может не только рассеиваться на пылинках, но и просто поглощаться ими.

Решение: Пока размер частицы R меньше длины волны λ, все рассеивающие атомы излучают с близкими фазами, и интенсивность рассеянного света, и сечение рассеяния частицы примерно пропорциональны N^2 (N – число атомов в частице), т.е. $\sigma \sim N^2 \sim R^6$.

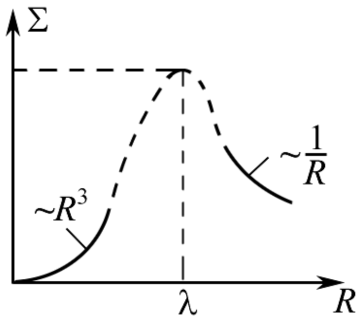


Рис. 26.4

Тогда сечение рассеяния единицей массы $\Sigma = \sigma \cdot n \sim R^3$ ($n \sim 1/R^3$ – число частиц в единице массы). При $R > \lambda$ ситуация меняется, свет рассеивается и поглощается лишь атомами, расположенными на поверхности, и суммарное сечение поглощения и рассеяния примерно равно поперечному сечению частицы: $\sigma = \pi R^2$, а $\Sigma \sim 1/R$. Эта ситуация схематически изображена на рис. 26.4. Значит, эффективность рассеяния единицей массы достигает максимума примерно при $R = \lambda$, и в этом случае $\sigma \approx \pi\lambda^2$. Для оценки можно воспользоваться этим приближенным соотношением.

Ослабление монохроматической волны при её распространении через рассеивающую (поглощающую) среду описывается законом

$$I(x) = I_0 e^{-N\sigma x},$$

где I_0, I – интенсивность волны соответственно на входе и выходе из слоя вещества толщиной x; N – концентрация рассеивающих (поглощающих) частиц; $\sigma(\omega)$ – сечение рассеяния (поглощения) одной частицы.

По условиям задачи $I/I_0 = 10^{-2}$. Поэтому $N\sigma x = \ln 100$. Искомая масса на единицу площади равна

$$M = Nxm = \frac{m}{\sigma} \cdot \ln 100,$$

где m – масса одной частицы; $m = (4/3)\pi\lambda^3\rho$, $\rho = 10^3$ кг/м^3 (плотность льда) и $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м (видимый свет).

Подставляя, получаем

$$M = \frac{4}{3}\lambda\rho \cdot \ln 100 = \frac{4}{3} \cdot 5 \cdot 10^{-7} \cdot 10^3 \cdot 4{,}61 = 3{,}1 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^2 \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ г/см}^2.$$

Ответ: $M = 3 \cdot 10^{-4}$ г/см^2.

Задача 16. Короткий прямой кусок медной проволоки, помещенный в поток электромагнитных волн, действует как радарная система, рассеивающая волны. Электрическое поле падающей волны взаимодействует с движущимися электронами в проволоке, в результате чего происходит рассеяние. Если рассматривать достаточно короткий кусок проволоки, длина которого много меньше λ, то можно предположить, что среднее смещение электронов в нем вдоль оси пропорционально компоненте $E_{||}$ электрического поля волны, параллельной проволоке. Таким образом, если в проволоке имеется N электронов, а d – их среднее смещение, то $d = \chi E_{||}$. Нам нужно знать (в зависимости от χ и N): 1) Чему равно максимальное сечение рассеяния проволоки? 2) Как зависит сечение рассеяния от ориентации проволоки?

Решение: 1) Сечение рассеяния определяется как отношение полной энергии, излучаемой рассеивающей системой в секунду, к энергии радарного луча, падающей на 1 м^2 в 1 с. Все электроны проволоки из-за малой ее длины можно считать колеблющимися в одной фазе.

Выражение для поля излучения на больших расстояниях r от проволоки (диполя) под углом θ к ее оси

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_0\omega^2}{c^2 r}\sin\theta\cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{qN\chi E_{||}\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\sin\theta\cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

где $p_0 = Qd = qN\chi E_{||}$ – амплитуда дипольного момента.

Интенсивность излучения $S = \varepsilon_0 c\langle E^2\rangle$. Интегрируя ее по сфере радиусом r и подставляя среднее по времени значение квадрата косинуса, равное $1/2$, получаем среднюю мощность $\langle P\rangle$, излучаемую по всем направлениям:

$$\langle P\rangle = \frac{N^2\chi^2\omega^4 q^2 E_{\text{II}}^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}.$$

Относя ее к среднему потоку в радарном луче $\langle S\rangle = \varepsilon_0 c E_0^2/2$, получаем выражение для сечения

$$\sigma = \frac{\langle P\rangle}{\langle S\rangle} = \frac{N^2\chi^2\omega^4 q^2}{6\pi\varepsilon_0^2 c^4}\left(\frac{E_{||}}{E_0}\right)^2.$$

2) Поскольку $E_{||} = E_0\cos\theta$, где θ – угол между проволокой и направлением падающей волны, $\sigma = \dfrac{N^2\chi^2\omega^4 q^2}{6\pi\varepsilon_0^2 c^4}\cos^2\theta$

Задача 17. К металлу в течение долгого времени приложено постоянное электрическое поле, а затем оно мгновенно выключается. Используя модель свободных электронов, покажите, что время релаксации (т.е. время, в течение которого дрейфовая скорость электронов падает в e раз) равно τ, где τ – среднее время между столкновениями.

Решение: Так как электрическое поле, действующее на электроны проводимости, равно среднему полю **E**, то, полагая $\omega_0 = 0$, $v_{\text{дрейф}} = dx/dt$, можно записать уравнение для дрейфовой скорости электронов:

$$\frac{dv_{\text{дрейф}}}{dt} = \frac{q_e E}{m} - \frac{v_{\text{дрейф}}}{\tau}.$$

Так как поле **E** постоянно действует на электроны проводимости, $dv_{\text{дрейф}}/dt = 0$, для дрейфовой скорости получаем

$$v_{\text{дрейф}}^{(0)} = \frac{q_e E}{m}\tau.$$

Если же в момент времени $t = 0$ электрическое поле мгновенно выключается, дрейфовая скорость электронов будет меняться согласно однородному дифференциальному уравнению

$$\frac{dv_{\text{дрейф}}}{dt} = -\frac{v_{\text{дрейф}}}{\tau}$$

или

$$\frac{dv_{\text{дрейф}}}{v_{\text{дрейф}}} = -\frac{dt}{\tau}.$$

Решая это уравнение, находим

$$v_{\text{дрейф}} = v_{\text{дрейф}}^{(0)} \cdot e^{-t/\tau} = \frac{q_e E}{m}\tau \cdot e^{-t/\tau}.$$

Это решение отвечает начальному условию задачи, согласно которому $v_{\text{дрейф}} = v_{\text{дрейф}}^{(0)}$ при $t = 0$. Из него видно, что время, за которое величина дрейфовой скорости уменьшается в e раз, в точности равно τ – среднему времени между соударениями.

Задачи для самостоятельного решения

26.1. Космический корабль можно заставить двигаться с помощью давления солнечных лучей. Предположим, что для этого на корабле имеется парус, изготовленный из алюминированного майлара плотностью ρ = = 2 г/см^3 и $\rho_{\text{отр}} \approx 1$. Если поток солнечного излучения, падающего на парус, составляет C = 1,35 кВт/м^2, то какую толщину d должен иметь парус, чтобы сила светового давления уравновесила силу гравитационного притяжения Солнца? Принять массу Солнца M_C = 1,989·10^{30} кг; расстояние до Солнца r = 1,49·10^{11} м.

Ответ: $d = \dfrac{(1+\rho_{\text{отр}})Cr^2}{cG\rho M_C} = 0{,}76$ мкм. При меньшей толщине паруса результирующая сила со стороны Солнца будет силой отталкивания.

26.2. Максимальное значение магнитного поля B_m, создаваемое колеблющимся диполем на расстоянии r_m = 1 км, равно 10^{-15} Тл. Найдите: 1) максимальное значение электрического поля; 2) максимальное значение вектора Пойнтинга; 3) среднюю мощность $\langle P \rangle$, излучаемую диполем.

Ответ: $E_m = B_m \big/ \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 3 \cdot 10^{-7}$ В/м; $S_m = E_m B_m / \mu_0 = 2{,}39 \cdot 10^{-16}$ Вт/м^2;

$$\langle P \rangle = \frac{\pi^2 S_m r_m^2}{2} = 1{,}18 \text{ нВт}.$$

26.3. Свободный электрон находится в переменном электрическом поле, амплитуда которого равна E_0 = 0,1 В/м. Чему равна максимальная скорость электрона при: а) ν_1 = 1 кГц; б) ν_2 = 100 кГц?

Ответ: а) $\upsilon_1 = eE_0/(2\pi\nu_1 m) = 2{,}8 \cdot 10^6$ м/с;

б) $\upsilon_2 = eE_0/(2\pi\nu_2 m) = 2{,}8 \cdot 10^4$ м/с.

26.4. Чему равен показатель преломления воздуха при нормальных условиях для инфракрасного излучения с λ_1 = 2 мкм?

Пояснения. Нужно воспользоваться данными таблицы 6 для определения ω, а также учесть, что для воздуха $\omega_0 = 7{,}5 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$.

$$\text{Ответ: } n_1 = 1 + (n-1)\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega_1^2}\right) = 1{,}00025.$$

26.5. Показатель преломления ионосферы для радиоволн с частотой $\nu = 10^8$ Гц равен n = 0,90. Определить плотность N электронов в 1 см^3 ионосферы.

Пояснения. Учесть, что для свободных электронов в плазме $\omega_0 = 0$.

$$\text{Ответ: } N = \frac{2(2\pi\nu)^2 \varepsilon_0 m_e (1-n)}{e^2} = 2{,}48 \cdot 10^7 \text{ см}^{-3}.$$

26.6. На космическом корабле массой m = 1 т установлен парус из алюминированного майлара ($\rho_{отр} \approx 1$) площадью $S_п = 100 \times 100$ м^2. Парус может ориентироваться в любом направлении. Космический корабль первоначально движется вокруг Земли по круговой орбите радиусом $R = 10^5$ км. Поток мощности C солнечного излучения равен 1,35 кВт/м^2. а) Какой примерно выигрыш в энергии W за один оборот космического корабля можно было бы получить за счет светового давления? б) Сколько приблизительно времени t понадобится космическому кораблю, чтобы добраться до Луны за счет светового давления, создаваемого Солнцем? Влияние гравитационных сил в случае б) не учитывать.

Пояснения. Учесть, что половину круговой орбиты парус ориентирован так, что угол α между нормалью к парусу и направлением потока светового излучения должен быть равен $\pi/2$.

Ответ: а) $W = \dfrac{4CRS_{\text{п}}}{c} \approx 1,8 \cdot 10^7$ Дж; б) $t = \sqrt{\dfrac{2r_{\text{л}}mc}{(1+\rho_{\text{отр}})CS_{\text{п}}}} \approx 0,1$ года.

26.7. Все излучение от дуговой лампы мощностью P = 1 кВт собирается в пучок кругового сечения радиусом R = 10 см. а) Если пучок направить на зеркало, то с какой силой F он будет давить на зеркало? б) Чему равен индуцированный поверхностный ток I_S (в А/м)? в) Какова объемная плотность w энергии в пучке?

Ответ: а) $F = (1+\rho_{\text{отр}})\dfrac{P}{c} = 6,67$ мкН; б) $I_S = \sqrt{\dfrac{4P}{\mu_0 c\pi R^2}} = 18,4$ А;

в) $w = \dfrac{P}{c\pi R^2} = 1,06 \cdot 10^{-4}$ Дж/м^3.

26.8. На частицу массой m действует результирующая сила вида $F_{\text{рез}} = -ky + F_{\text{внеш}}$. Определите:

а) Зависимость y от t, если $F_{\text{внеш}} = F_0 \sin\omega t$.

б) Зависимость y от t, если $F_{\text{внеш}} = F_0 \cos\omega t$.

в) Какова частота собственных колебаний ω_0 в отсутствие внешней силы $F_{\text{внеш}}$?

г) Если частота вынуждающей силы ω больше ω_0, будет ли внешняя сила в фазе или противофазе относительно смещения?

Ответ: а) $y = \dfrac{F_0}{k - m\omega^2}\sin\omega t$; б) $y = \dfrac{F_0}{k - m\omega^2}\cos\omega t$;

в) $\omega_0 = \sqrt{k/m}$; г) в противофазе.

26.9. Преломление радиоволн в ионосфере (в результате чего они снова возвращаются на Землю) упрощенно можно рассматривать как полное внутреннее отражение от резкой границы ионосферы. Исходя из этого упрощенного представления, определить наиболее короткую длину электромагнитной волны $\lambda_{\min}$, которая еще возвращается к Земле, если угол ее падения на границу ионосферы φ = 45°, а концентрация свободных электронов в ионосфере $N = 1 \cdot 10^6$ см$^{-3}$.

П о я с н е н и я. Предварительно определить показатель преломления ионосферы в рамках модели свободных электронов и принять для воздуха $n \approx 1$.

Ответ: $\lambda_{\min} < 2\pi c\sqrt{\dfrac{2\varepsilon_0 m_e(1-\sin\varphi)}{Ne^2}} = 25,6$ м.

26.10. Рассмотрим классическую модель атома водорода, согласно которой электрон движется по круговой орбите радиусом $R = 5,3 \cdot 10^{-11}$ м. Сумма кинетической и потенциальной энергий электрона $E = \langle K\rangle + \langle U\rangle = -k_0\dfrac{e^2}{2R} = -13,6$ эВ, где $k_0 = 1/(4\pi\varepsilon_0)$.

а) Какая энергия излучается за один оборот? Дайте численный ответ в электронвольтах.

Получите следующие равенства:

б) $\dfrac{dE}{dt} = -\dfrac{2}{3}\dfrac{k_0^3 e^6}{m^2 c^3 R^4}$; в) $\dfrac{dE}{dR} = \dfrac{k_0^3 e^2}{2R^2}$; г) $\dfrac{dR}{dt} = -\dfrac{4}{3}\dfrac{k_0^2 e^4}{m^2 c^3 R^2}$.

д) Когда электрон достигает $R = 10^{-15}$ м, он падает на протон. Сколько ему для этого понадобится времени, иными словами, каково «время жизни» классического атома водорода?

Пояснения. Воспользуйтесь соотношением $t = \int\limits_{R_1}^{R_2} \left(\dfrac{dt}{dR}\right) dR$.

Ответ: а) $\Delta U = \left(\dfrac{dE}{dt}\right)\cdot T = 4{,}4\cdot 10^{-5}$ эВ, где $\dfrac{dE}{dt} = \dfrac{2}{3}\dfrac{k_0^3 e^6}{c^3 m^2 R^4}$; $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{mR^3}{k_0 e^2}}$

д) $t = \dfrac{m^2 c^3 R^3}{4k_0^2 e^4} = 1{,}57\cdot 10^{-11}$ с.

26.11. Заряд q движется с ускорением a вдоль оси z. В нештрихованной системе заряд q находится в точке, показанной на рисунке 26.6 для $t = 0$. Каковы величина и направление силы, действующей на заряд q, для случая, когда по кольцу распределен заряд Q, радиус кольца $R = r\cdot\sin\theta$.

Ответ: $F = \dfrac{Qqa}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}$.

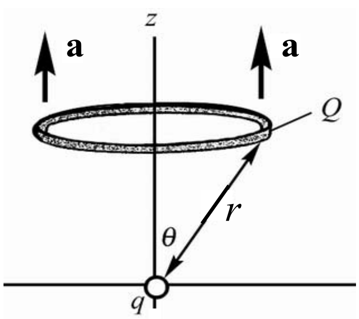


Рис. 26.6

26.12. Повторите решение задачи 26.12 для случая равномерного распределения заряда Q внутри шара радиусом R (рис. 26.7).

Ответ: $F = \dfrac{Qqa}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}$.

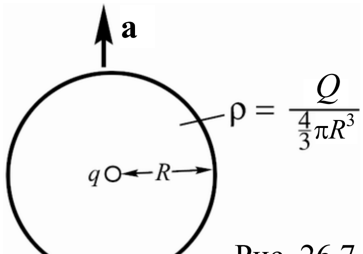


Рис. 26.7

26.13. Повторите решение задачи 26.12 для случая малой массы m и однородного шара массой M (рис. 26.8). Предположим, что гравитационная сила пропорциональна a/r по тем же соображениям, что и электрическая сила. Покажите, что результирующая сила, действующая на m, записывается в виде

Ответ: $F = ma\cdot(4\pi/3)G\langle\rho\rangle(R/c)^2$.

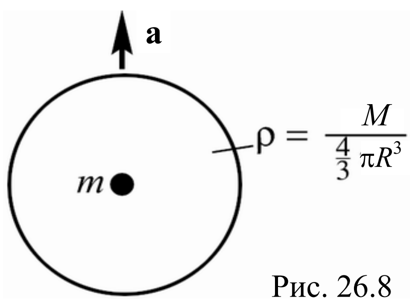


Рис. 26.8

(Замечание: Для нашей Вселенной множитель $(4\pi/3)G\langle\rho\rangle(R/c)^2$ может оказаться близким единице (в этом случае R – радиус, а $\langle\rho\rangle$ – средняя плотность Вселенной). При этом мы получим $F = ma$! Это объяснение инертной массы носит название принципа Маха.)

26.14. Покажите, что для электромагнитного излучения, распространяющегося в ионизованной среде, $uv_g = c^2\left[1-\left(\dfrac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m\omega^2}\right)^2\right]^{-1} \approx c^2$.

26.15. Пульсары представляют вращающиеся нейтронные звезды с магнитным полем на их поверхности $\approx 10^8$ Тл. Рассмотрим пульсар, который каждые 3,6 с излучает импульс радиоволн. Этот импульс регистрируется радиотелескопом на частоте $\nu_1 = 150$ МГц. Если радиоприемник быстро перестроить с частоты $\nu_1 = 150$ МГц на частоту $\nu_2 =$ $= 200$ МГц, то импульс появиться на $\Delta t = 0{,}94$ с раньше, поскольку, благодаря наличию в межзвездном пространстве свободных электронов, групповая скорость света v_g зависит от частоты. Оценить расстояние D до этого пульсара, если в межзвездном пространстве плотность электронов $N_e = 3\cdot10^4$ м$^{-3}$.

Ответ: $D = \dfrac{8\pi^2 m\varepsilon_0 c\Delta t}{N_e e^2}\cdot\dfrac{\nu_1^2\nu_2^2}{\nu_2^2-\nu_1^2} \approx 1{,}2\cdot10^{19}\ \text{м} = 1260\ \text{световых лет}$.

26.16. Открыты новые лучи (названные X-лучами, ибо они обладают неизвестными, но удивительными свойствами), и высказано предположение, что это, подобно свету, поперечные волны. Затем было замечено, что электроны вещества рассеивают эти лучи. Как можно доказать, что они действительно поперечны? Можно ли их поляризовать?

Примечание. Проверить поперечность излучения и поляризованность его можно при рассеянии на свободных электронах.

26.17. При выводе выражения $n^2 = 1-\left(\omega_p/\omega\right)$ предполагалось, что в металле переход от вещественных значений n^2 к мнимым в ультрафиолетовой области очень резкий. На опыте же столь резкого перехода не наблюдается. Покажите, что с помощью более удачной аппроксимации n^2 теорию можно согласовать с экспериментом.

Примечание. Более реалистическое выражение для n^2 получится, если воспользоваться выражением для показателя преломления $n^2 = 1+\dfrac{\sigma/\varepsilon_0}{i\omega(1+i\omega\tau)}$. Видно, что даже для частот $\omega > \sigma/(\varepsilon_0\tau)$ n^2 имеет мнимую часть.

26.18. Внутри металла существуют решения уравнений Максвелла, имеющие вид плоских волн $E_x = E_0e^{i(\omega t - kz)}$, где k – комплексное число. Для низких частот $k = (1-i)\sqrt{\dfrac{\sigma\omega}{2\varepsilon_0 c^2}}$.

а) Напишите выражение для магнитного поля такой волны.
б) Какой угол образуют векторы **E** и **B** для произвольного z?
в) Какова разность фаз векторов **E** и **B**?
[Если момент времени t_1 соответствует максимальной величине **E**, а t_2 максимальной величине **B**, то разность фаз определяется как $\omega(t_1 - t_2)$.]

Примечание. Из уравнения Максвелла $\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\,\mathbf{E}$ находим $\dfrac{\partial B_x}{\partial t} = 0$, $\dfrac{\partial B_y}{\partial t} = ikE_0 \exp[i(\omega t - kz)]$, $\dfrac{\partial B_z}{\partial t} = 0$. Отсюда: а) $B_x = 0$, $B_y = \dfrac{k}{\omega}E_0e^{i(\omega t - kz)}$, $B_z = 0$; б) $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$; в) так как волновой вектор можно записать в виде $k = (1-i)\sqrt{\dfrac{\sigma\omega}{2\varepsilon_0 c^2}} = \sqrt{\dfrac{\sigma\omega}{\varepsilon_0 c^2}} \cdot e^{-i\pi/4}$, то разность фаз, очевидно, равна $-\pi/4$.

26.19. Покажите, что в веществе, состоящем из неполярных частиц, квадрат показателя преломления при низких частотах равен диэлектрической проницаемости.

26.20. На частоте примерно $\nu = 6$ МГц ($\lambda \approx 50$ м) ионосфера становится прозрачной. В рамках модели свободных электронов оцените плотность N электронов в ионосфере.

Примечание. Использовать условие $\omega >> \omega_p$, т.е. условия прозрачности (слабое поглощение при частотах много выше плазменной частоты).

Ответ: $N < \dfrac{(2\pi\nu)^2 \varepsilon_0 m}{e^2} \approx 4 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$.

27. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Основные формулы и преобразования

Формулы Лоренца для преобразования электрического и магнитного полей при изменении системы отсчета:

$$E'_x = E_x; \qquad B'_x = B_x;$$

$$E'_y = \frac{E_y - \upsilon B_z}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}; \quad B'_y = \frac{B_y + \upsilon E_z/c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}};$$

$$E'_z = \frac{E_z + \upsilon B_y}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}; \quad B'_z = \frac{B_z - \upsilon E_y/c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}.$$

Формулы Лоренца можно записать в форме, более легкой для запоминания:

$$\mathbf{E}'_{\text{II}} = \mathbf{E}_{\text{II}}; \qquad \mathbf{B}'_{\text{II}} = \mathbf{B}_{\text{II}};$$

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + [\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{B}]}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}; \qquad \mathbf{B}'_{\perp} = \frac{\mathbf{B}_{\perp} - [\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{E}]/c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}},$$

где символами II и $\perp$ отмечены составляющие полей, параллельные и перпендикулярные к вектору $\boldsymbol{\upsilon}$.

При $(\upsilon/c)^2 << 1$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\boldsymbol{\upsilon}\,\mathbf{B}], \qquad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - [\boldsymbol{\upsilon}\,\mathbf{E}]/c^2.$$

Штрихованные величины измерены в системе координат *K′*, которая движется в положительном направлении оси *Ox* со скоростью $\boldsymbol{\upsilon}$, наблюдаемой в системе координат *K*. Нештрихованные величины представляют собой результаты измерений в системе координат *K*.

Уравнения преобразования Лоренца симметричны в отношении **E** и **B**. Электрические и магнитные поля являются различными компонентами единого физического объекта – электромагнитного поля, а E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z – шесть компонент этого поля.

Задачи с решениями

Задача 1. Измерениями в системе *K* установлено, что в данной области пространства электрическое поле **E** = 0 и имеется однородное чисто магнитное поле с индукцией **B**. Найти напряженность электрического поля в K' системе, которая движется с нерелятивистской скоростью $\boldsymbol{\upsilon}$ относительно K-системы, причем $\boldsymbol{\upsilon} \perp \mathbf{B}$.

Решение: Для простоты предположим, что в рассматриваемой области пространства V находится вакуум: $\varepsilon = \mu = 1$. Это означает, что если помещенный в рассматриваемую область V положительный заряд e покоится относительно системы K, то на него никакие силы не действуют. Если же заряд e движется относительно K со скоростью $\mathbf{u}$, то на него действует сила

$$\mathbf{F} = e[\mathbf{u}\ \mathbf{B}].$$

Так как скорость заряда $\mathbf{u}'$ относительно системы K' равна $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \boldsymbol{\upsilon}$, то

$$\mathbf{F} = \mathrm{e}[(\mathbf{u}'+\mathbf{v})\cdot\mathbf{B}]=\mathrm{e}[\mathbf{v}\ \mathbf{B}] + \mathrm{e}[\mathbf{u}'\ \mathbf{B}] \qquad (1)$$

Следовательно, на заряд, покоящийся относительно системы K' (т.е. при $\mathbf{u}' = 0$), действует сила

$$\mathbf{F}' = e[\boldsymbol{\upsilon}\ \mathbf{B}].$$

Так как по определению напряженность электрического поля $\mathbf{E}'$ равна силе, испытываемой покоящимся единичным положительным зарядом, то из наблюдений, произведенных относительно системы K', следует, что в рассматриваемой области пространства V существует электрическое поле напряженности

$$\mathbf{E}' = [\boldsymbol{\upsilon}\ \mathbf{B}].$$

Вместе с тем из (1) следует, что в системе K' имеется также и магнитное поле с индукцией

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B},$$

так как сила $\mathbf{F}$ должна выражаться в системе K', вполне равноправной системе K, формулой Лоренца $\mathbf{F}' = e(\mathbf{E}' + [\mathbf{u}'\ \mathbf{B}'])$.

Ответ: $\mathbf{E}' = [\boldsymbol{\upsilon}\ \mathbf{B}]$.

Примечание. Предполагается, что с точностью до $(v/c)^2$ сила не зависит от системы отсчета. Действительно, в этом приближении сила пропорциональна вызываемому ею ускорению $\mathbf{a}$, а ускорение не зависит от системы отсчета (см. уравнения преобразования Лоренца).

Таким образом, из решения данной задачи можно сделать заключение, что деление электромагнитного поля на электрическое и на поле магнитное имеет относительный характер: поле, которое в системе K является только магнитным ($\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} \neq 0$), оказывается с точки зрения равноправной системы K' полем электромагнитным в узком смысле этого слова ($\mathbf{E}' \neq 0$, $\mathbf{B}' \neq 0$).

Задача 2. В инерциальной K-системе в вакууме находятся два плоских листа с поверхностным зарядом σ. Листы параллельны плоскости xOz и движутся в положительном направлении оси Ox со скоростью $\boldsymbol{\upsilon}_0$

(рис.27.1). Электрическое поле $\mathbf{E}$ направлено вдоль положительного направления оси Oy. Какие поля измерит наблюдатель, находящийся в K'-системе, если K'-система движется в положительном направлении оси Ox со скоростью $\mathbf{v}$ относительно K-системы?

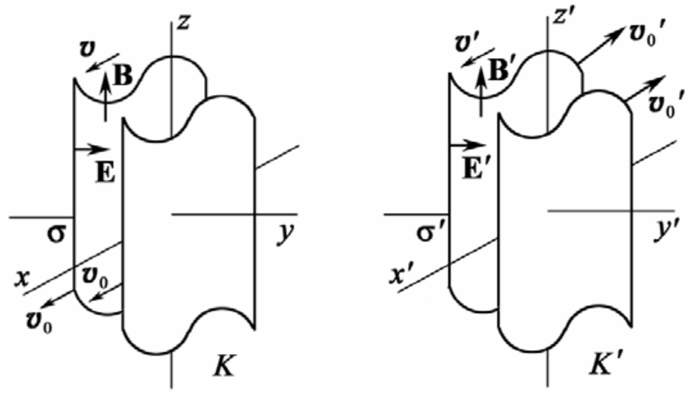


Рис. 27.1. Направление векторов $\mathbf{v}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{E}'$, $\mathbf{B}'$, в K- и K'-системах координат

Решение: На рис. 27.1 изображены два плоских листа с поверхностным зарядом σ ($+\sigma$ на одном листе, $-\sigma$ – на другом), параллельные плоскости xOz и движущихся со скоростью v_0 в K-системе. Следует отметить, что на рисунке изображена только часть поверхностей, сами поверхности бесконечно велики. В этой системе координат постоянное электрическое поле $\mathbf{E}$ направлено вдоль положительной оси Oy и равно

$$E_y = \sigma/\varepsilon_0.$$

В K-системе оба листа движутся в положительном направлении оси Ox со скоростью $\mathbf{v}_0$. Таким образом, мы имеем два листа с током. Поверхностная плотность тока равна $I_x = \sigma v_0$ (в А/м) на одном листе и имеет ту же величину с обратным знаком на другом листе.

Магнитное поле от каждого листа определим, воспользовавшись законом полного тока: $B_{1z} \cdot 2a = \mu_0 I_x a$, где a – сторона квадратного контура в плоскости yOz. Отсюда $B_{1z} = \mu_0 \sigma v_0/2$. Результирующее магнитное поле между листами направленно по оси Oz и равно

$$B_z = 2B_{1z} = \mu_0 \sigma v_0.$$

Чтобы ответить на вопрос: «Какие поля измерит наблюдатель, находящийся в K'-системе, которая движется в положительном направлении оси Ox со скоростью v'», необходимо узнать, как выглядят источники этих полей в K'-системе.

В K'-системе скорость заряженных листов в направлении Ox' равна v_0' и определяется формулой сложения скоростей

$$v_0' = \frac{v_0 - v}{1 - v_0 v/c^2} = c\frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0 \beta},$$

где $\beta_0 = v_0/c$, $\beta = v/c$.

Так как полный электрический заряд не изменяется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, то при $v_0' < v_0$, в K'-

системе происходит лоренцевское сокращение плотности заряда. Плотность в неподвижной системе координат, связанной с самими зарядами, равна $\sigma\left(1-v_0^2/c^2\right)^{1/2}$, или σ/γ_0. Следовательно, плотность зарядов в K'-системе равна

$$\sigma' = \sigma\frac{\gamma'_0}{\gamma_0}, \text{ где } \gamma'_0 = \left(1-v_0'^2/c^2\right)^{-1/2}.$$

Пользуясь формулой сложения скоростей, получаем

$$\gamma'_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\beta_0-\beta}{1-\beta_0\beta}\right)^2}} = \frac{1-\beta_0\beta}{\sqrt{(1-\beta_0^2)(1-\beta^2)}} = \gamma_0\gamma\left(1-\beta_0\beta\right).$$

В результате $\sigma' = \sigma\gamma\left(1-\beta_0\beta\right)$.

Плотность поверхностного тока в K'-системе равна

$$I'_x = \sigma' v'_0 = \sigma\gamma\left(1-\beta_0\beta\right)c\frac{(\beta_0-\beta)}{1-\beta_0\beta} = \sigma\gamma\left(v_0-v\right).$$

Таким образом, определены источники в K'-системе и, следовательно, ясно, какие поля должны быть в этой системе. Согласно принципу относительности: во всех инерциальных системах координат должны действовать одни и те же законы физики. Это относится и к формулам, связывающим электрическое поле с поверхностной плотностью заряда и магнитное поле с поверхностной плотностью тока. Отсюда следует, что

$$E'_y = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \gamma\left[\frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \left(\frac{\sigma v_0}{\varepsilon_0 c}\right)\left(\frac{v}{c}\right)\right] = \left\{\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}\right\} = \gamma\left[\frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \sigma v_0\mu_0 c\left(\frac{v}{c}\right)\right];$$

$$B'_z = \mu_0 I' = \gamma\left[\mu_0\sigma v_0 - \mu_0\sigma v\right] = \left\{\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}\right\} = \gamma\left[\mu_0\sigma v_0 - \frac{\sigma v}{\varepsilon_0 c^2}\right].$$

Если воспользоваться значениями E_y и B_z, то

$$E'_y = \gamma\left(E_y - vB_z\right),\ B'_z = \gamma\left(B_z - vE_y/c^2\right).$$

Если бы пара листов с током была ориентирована параллельно плоскости xOy, а не xOz, то мы получили бы выражения, связывающие E'_z с E_z и B_y и B'_y с B_z и E_z. Конечно, эти выражения были бы точно такими же, как и выражения, приведенные выше, но если проследить за направлениями, то обнаруживается, что существуют различия в знаках, вытекающие из правил для направления **B**.

Следует отметить, что продольная компонента вектора **E** и вектора **B** имеет одну и ту же величину в обеих системах координат. Например, предположим, что продольная компонента **B**, а именно компонента B_x, в случае, изображенном на рис. 27.1, создана соленоидом, намотанным вдоль оси Ox в K-системе. Сила поля внутри соленоида зависит только от силы тока в проводе I, которая равна заряду в единицу времени, и от n-числа витков на единицу длины оси. В K'-системе соленоид будет претерпевать лоренцевское сокращение, и число витков n на единицу длины в этой системе координат будет больше. Однако сила тока для наблюдателя в K'-системе будет меньше, так как, с его точки зрения, наблюдатель в K-системе, измеряющий силу тока по числу электронов, проходящих через данную точку провода в единицу времени, пользовался медленно идущими часами. Растяжение времени как раз компенсирует сокращение длины в произведении nI. Действительно, любые величины, имеющие размеры (продольная длина, время), не меняются при преобразовании Лоренца. Таким образом, $B'_x = B_x$. Аналогично $E'_x = E_x$.

Ответ: $B'_x = B_x$, $E'_x = E_x$, $E'_y = \gamma\left(E_y - \upsilon B_z\right)$, $B'_z = \gamma\left(B_z - \upsilon E_y / c^2\right)$.

Задача 3. Убедиться, что формулы преобразования $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{B}]$, $\mathbf{B}' = \mathbf{B} - [\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{E}]/c^2$ следуют из формул: $\mathbf{E}'_{\text{II}} = \mathbf{E}_{\text{II}}$; $\mathbf{E}'_{\perp} = \dfrac{\mathbf{E}_{\perp} + [\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{B}]}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$;

$\mathbf{B}'_{\text{II}} = \mathbf{B}_{\text{II}}$; $\mathbf{B}'_{\perp} = \dfrac{\mathbf{B}_{\perp} - [\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{E}]/c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$, при $\upsilon \ll c$.

Решение: При $\upsilon \ll c$ $(\upsilon^2/c^2 = \beta^2 \ll 1)$ формулы

$$\mathbf{E}'_{\text{II}} = \mathbf{E}_{\text{II}}; \qquad \mathbf{B}'_{\text{II}} = \mathbf{B}_{\text{II}};$$

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + [\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{B}]}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}; \qquad \mathbf{B}'_{\perp} = \frac{\mathbf{B}_{\perp} - [\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{E}]/c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}, \tag{1}$$

приобретают следующий вид:

$$\mathbf{E}'_{\text{II}} = \mathbf{E}_{\text{II}}; \; \mathbf{E}'_{\perp} = \mathbf{E}_{\perp} + [\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{B}];$$

$$\mathbf{B}'_{\text{II}} = \mathbf{B}_{\text{II}}; \; \mathbf{B}'_{\perp} = \mathbf{B}_{\perp} - [\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{E}]/c^2 .$$

Тогда полный вектор напряженности электрического поля и индукция магнитного поля K'-системы определяются выражениями

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_{\text{II}} + \mathbf{E}'_{\perp} = \mathbf{E}_{\text{II}} + \mathbf{E}_{\perp} + [\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{B}] = \mathbf{E} + [\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{B}];$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}'_{\text{II}} + \mathbf{B}'_{\perp} = \mathbf{B}_{\text{II}} + \mathbf{B}_{\perp} - \frac{[\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{E}]}{c^2} = \mathbf{B} - \frac{[\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{E}]}{c^2}. \tag{2}$$

Таким образом, явно видно, что при условии $\upsilon << c$ формулы преобразования (2) следуют из формул преобразования (1).

Задача 4. Используя формулы Лоренца преобразования полей, показать, что если в инерциальной K-системе имеется только электрическое или только магнитное поле, то в любой другой инерциальной K'-системе, движущейся со скоростью $\boldsymbol{\upsilon}$ относительно K-системы, будут существовать как электрическое, так и магнитное поле одновременно, причем эти поля будут взаимно перпендикулярны ($\mathbf{E}' \perp \mathbf{B}'$).

Решение: Для простоты рассмотрим нерелятивистский случай $\upsilon^2/c^2 = \beta^2 << 1$. При больших скоростях υ дополнительно появится только релятивистская поправка.

I. Пусть в инерциальной K-системе существует однородное чисто электрическое поле напряженности $\mathbf{E}$, а магнитное поле отсутствует: $\mathbf{B} = 0$. Тогда в K'-системе существует электрическое поле

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\boldsymbol{\upsilon}\ \mathbf{B}] = \{\mathbf{B} = 0\} = \mathbf{E},$$

т.е. $\mathbf{E}' = \mathbf{E}$ и $\mathbf{E}'$ совпадает по направлению с $\mathbf{E}$, и магнитное поле с индукцией

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{[\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{E}]}{c^2} = \{\mathbf{B} = 0,\ [\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{E}] = -[\mathbf{E}\boldsymbol{\upsilon}]\} = \frac{[\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{E}]}{c^2}.$$

Согласно определению векторного произведения, вектор $[\mathbf{E}\ \boldsymbol{\upsilon}]$ – это вектор, перпендикулярный плоскости, в которой находятся векторы $\mathbf{E}$ и $\boldsymbol{\upsilon}$. Следовательно, $\mathbf{B}' \perp \mathbf{E}'$.

II. Наоборот, предположим, что в инерциальной K-системе существует однородное чисто магнитное поле с индукцией $\mathbf{B}$, а электрическое поле отсутствует: $\mathbf{E} = 0$. Тогда в K'-системе существует электрическое поле

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\boldsymbol{\upsilon}\ \mathbf{B}] = \{\mathbf{E} = 0\} = [\boldsymbol{\upsilon}\ \mathbf{B}],$$

(это вектор, перпендикулярный плоскости, в которой находятся векторы $\mathbf{B}$ и $\boldsymbol{\upsilon}$), и магнитное поле с индукцией

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{[\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{E}]}{c^2} = \{\mathbf{E} = 0\} = \mathbf{B}.$$

Следовательно, $\mathbf{E}' \perp \mathbf{B}'$.

Ответ: Таким образом, в K'-системе существуют электрическое и магнитное поля, причем эти поля взаимно перпендикулярны $\mathbf{E}' \perp \mathbf{B}'$.

Задача 5. В инерциальной K-системе существует только однородное электрическое поле с напряженностью $E = 6$ кВ/м. Найти модуль и направление вектора напряженности **E′** и вектора магнитной индукции **B′** в инерциальной *K′*-системе, движущейся по отношению к *K*-системе с постоянной скоростью **υ** под углом α = 60° к вектору **E**. Скорость *K′*-системы составляет β = 0,60 скорости света.

Дано:	Решение:
$E = 6\cdot10^3$ В/м; $\alpha = 60°$; $\beta = 0{,}60$; $\mathbf{B} = 0$	
1) E' – ? α' – ? 2) B' – ?	

Решение: 1) В *K′*-системе вектор напряженности электрического поля может быть записан:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_{\perp} + \mathbf{E}'_{\text{II}},$$

где символами II и ⊥ отмечены составляющие полей, параллельные и перпендикулярные к вектору **υ**.

$$\mathbf{E}'_{\text{II}} = \mathbf{E}_{\text{II}} = \mathbf{E}\cos\alpha,\ \mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{E}\sin\alpha,$$

где α = ∠(**E**, **υ**) = 60°.

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + [\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{B}]}{\sqrt{1-\beta^2}} = \{\mathbf{B} = 0\} = \frac{\mathbf{E}_{\perp}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\mathbf{E}\sin\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Тогда модуль напряженности электрического поля

$$E' = \sqrt{E_{\perp}^2 + E_{\text{II}}^2} = \sqrt{\left(\frac{E\sin\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 + (E\cos\alpha)^2} = E\sqrt{\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \beta^2\cos^2\alpha}{1-\beta^2}}.$$

Из уравнения тригонометрии $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, тогда

$$E' = E\sqrt{\frac{1-\beta^2\cos^2\alpha}{1-\beta^2}} = 6\cdot10^3\cdot\sqrt{\frac{1-0{,}6^2\cdot\cos^2 60°}{1-0{,}6^2}} = 7{,}2\cdot10^3\ \text{В/м} = 7{,}2\ \text{кВ/м};$$

$$\text{tg}\alpha' = \frac{\text{tg}\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\text{tg}60°}{\sqrt{1-0{,}6^2}} = 2{,}165,\ \ \alpha' \approx 65{,}2°.$$

Таким образом, модуль вектора напряженности *E′* в *K′*-системе равен 7,2 кВ/м и направлен вектор **E′** под углом α′ = 65,2° к скорости **υ**.

2) Модуль вектора индукции в *K′*-системе может быть записан следующим образом: $\mathbf{B}' = \mathbf{B}'_{\perp} + \mathbf{B}'_{\text{II}}$.

Из условия задачи параллельная составляющая вектора магнитной индукции $\mathbf{B}'_{\text{II}} = \mathbf{B}_{\text{II}} = 0$, тогда как перпендикулярная составляющая (используя преобразования Лоренца) отлична от нуля:

$$\mathbf{B}'_{\perp} = \frac{\mathbf{B}_{\perp} - [\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{E}]/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \{\mathbf{B}_{\perp} = 0\} = -\frac{[\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{E}]}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Используя свойства векторного произведения [**υ E**] = –[**E υ**], получаем

$$\mathbf{B}'_{\perp} = \frac{[\mathbf{E}\boldsymbol{\upsilon}]}{c^2\sqrt{1-\beta^2}};\ B' = \frac{E\upsilon\sin\alpha}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\beta E\sin\alpha}{c\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$B' = \frac{0,6 \cdot 6 \cdot 10^3 \cdot \sin 60^\circ}{3 \cdot 10^8 \cdot \sqrt{1 - 0,6^2}} = 13 \cdot 10^{-6} \text{ Тл} = 13 \text{ мкТл}.$$

Ответ: $E' = 7{,}2$ кВ/м, $\alpha' \approx 65{,}2°$, $B' = 13$ мкТл.

Задача 6. В инерциальной K-системе существует только однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}8$ Тл. Найти модуль и направление вектора напряженности $\mathbf{E}'$ и вектора магнитной индукции $\mathbf{B}'$ в инерциальной K'-системе, движущейся по отношению к K-системе с постоянной скоростью $\boldsymbol{\upsilon}$ под углом $\alpha = 45°$ к вектору $\mathbf{B}$. Скорость K'-системы составляет $\beta = 0{,}60$ скорости света.

Дано:
$B = 0{,}8$ Тл
$\alpha = \angle(\mathbf{E}, \boldsymbol{\upsilon}) = 45°$
$\beta = 0{,}6$
$\mathbf{E} = 0$

1) $|\mathbf{E}'| - ?$
2) $|\mathbf{B}'| - ?$ $\alpha' - ?$

Решение: 1) В K'-системе вектор напряженности электрического поля может быть записан:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_\perp + \mathbf{E}'_{\mathrm{II}},$$

где символами II и $\perp$ отмечены составляющие полей, параллельные и перпендикулярные к вектору $\boldsymbol{\upsilon}$.

Параллельная составляющая напряженности электрического поля равна нулю в K'-системе, так как по условию задачи $\mathbf{E} = 0$, и, следовательно, $\mathbf{E}'_{\mathrm{II}} = \mathbf{E}_{\mathrm{II}} = 0$, а перпендикулярная составляющая и, соответственно, вектор напряженности электрического поля K'-системы имеют следующий вид

$$|\mathbf{E}'| = |\mathbf{E}'_\perp| = \left|\frac{\mathbf{E}_\perp + [\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{B}]}{\sqrt{1-\beta^2}}\right| = \{\mathbf{E}_\perp = 0\} = \left|\frac{[\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{B}]}{\sqrt{1-\beta^2}}\right| = \frac{\upsilon B \sin\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\beta c B \sin\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

$$|\mathbf{E}'| = \frac{0,6 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 0,8 \cdot \sin 45^\circ}{\sqrt{1-0,6^2}} = 1,27 \cdot 10^8 \text{ В/м} = 0,13 \text{ ГВ/м}.$$

2) Вектор индукции в K'-системе может быть записан следующим образом: $\mathbf{B}' = \mathbf{B}'_\perp + \mathbf{B}'_{\mathrm{II}}$.

Из условия задачи параллельная составляющая вектора магнитной индукции $\mathbf{B}'_{\mathrm{II}} = \mathbf{B}_{\mathrm{II}} = \mathbf{B}\cos\alpha$, тогда как перпендикулярная составляющая (используя преобразования Лоренца):

$$\mathbf{B}'_\perp = \frac{\mathbf{B}_\perp - \dfrac{[\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{E}]}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \left\{\begin{matrix}\mathbf{B}_\perp = \mathbf{B}\sin\alpha, \\ \mathbf{E} = 0\end{matrix}\right\} = \frac{\mathbf{B}\sin\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Модуль вектора индукции K'-системы имеет вид

$$|\mathbf{B}'| = \sqrt{\mathbf{B}'^2_\perp + \mathbf{B}'^2_{\mathrm{II}}} = \sqrt{\frac{B^2\sin^2\alpha}{1-\beta^2} + B^2\cos^2\alpha} = B\sqrt{\frac{1-\beta^2\cos^2\alpha}{1-\beta^2}};$$

$$|\mathbf{B}'| = 0{,}8 \cdot \sqrt{\frac{1-0{,}6^2 \cdot \cos^2 45^\circ}{1-0{,}6^2}} = 0{,}9 \text{ Тл}.$$

Угол между вектором магнитной индукции $\mathbf{B}'$ и вектором скорости $\boldsymbol{\upsilon}$ найдем из соотношения

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}6^2}} = 1{,}25, \quad \alpha' \approx 51{,}3^\circ.$$

Ответ: $|\mathbf{E}'| = 0{,}13$ ГВ/м; $|\mathbf{B}'| = 0{,}9$ Тл; $\alpha' \approx 51{,}3^\circ$.

Задача 7. В инерциальной K-системе имеется только электрическое поле с напряженностью $\mathbf{E} = a(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$, где a – постоянная; $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ – орты осей x и y. Найти индукцию $\mathbf{B}'$ магнитного поля в K'- системе, которая движется относительно K-системы с нерелятивистской постоянной скоростью $\boldsymbol{\upsilon} = \upsilon\mathbf{k}$, $\mathbf{k}$ – орт оси z. Считать, что ось z' совпадает с осью z. Какой вид имеет поле $\mathbf{B}'$?

Решение: По условию задачи ось Oz совпадает с осью Oz', тогда $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ и $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – это расстояние от оси Oz'.
Электрическое поле может быть записано в виде

$$\mathbf{E} = \frac{a\left(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}\right)}{\left(x^2 + y^2\right)} = \frac{a\mathbf{r}}{r^2}.$$

Рассмотрим для простоты нерелятивистский случай $\upsilon^2/c^2 = \beta^2 << 1$. Используя преобразования Лоренца, индукцию магнитного поля в K'-системе можно найти следующим образом:

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{[\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{E}]}{c^2} = \{\mathbf{B} = 0\} = -\frac{1}{c^2}[\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{E}] = -\frac{1}{c^2}\left[\boldsymbol{\upsilon}\frac{a\mathbf{r}}{r^2}\right] = -\frac{a}{c^2 r^2}[\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{r}].$$

Воспользуемся свойством векторного произведения: $[\mathbf{r}\,\boldsymbol{\upsilon}] = -[\boldsymbol{\upsilon}\,\mathbf{r}]$,

тогда
$$\mathbf{B}' = \frac{a}{c^2 r^2}[\mathbf{r}\boldsymbol{\upsilon}].$$

Ответ: $\mathbf{B}' = \dfrac{a}{c^2 r^2}[\mathbf{r}\boldsymbol{\upsilon}]$.

Задача 8. Точечный заряд q движется равномерно и прямолинейно с релятивистской скоростью, составляющей β-часть скорости света ($\beta = \upsilon/c$). Найти напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля этого заряда в точке, радиус-вектор которой относительно заряда равен $\mathbf{r}$ и составляет угол ϑ с вектором его скорости $\boldsymbol{\upsilon}$.

Решение: Допустим, что заряд q движется в положительном направлении оси x K-системы отсчета. Перейдем в K'-систему, в начале координат которой этот заряд покоится (оси x' и x обеих систем совпадают, оси y' и y параллельны). В K'-системе поле заряда имеет наиболее простой вид

$$\mathbf{E}' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}'}{r'^3};$$

$$E'_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x'}{r'^3}; \quad E'_y = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y'}{r'^3}. \qquad (1)$$

Совершим обратный переход в исходную K-систему. В момент, когда заряд q проходит через начало координат K-системы, проекции x, y вектора $\mathbf{r}$ связаны с проекциями x', y' вектора $\mathbf{r}'$ соотношениями

$$x = r\cos\vartheta = x'\sqrt{1-\beta^2}; \quad y = r\sin\vartheta = y'. \qquad (2)$$

Решим совместно уравнения (2):

$$r' = \left(x'^2 + y'^2\right)^{1/2} = \left(\frac{r^2\cos^2\vartheta}{1-\beta^2} + r^2\sin^2\vartheta\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{r}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta - \beta^2\sin^2\vartheta\right)^{1/2} = \frac{r}{\sqrt{1-\beta^2}}(1-\beta^2\sin^2\vartheta)^{1/2}. \quad (3)$$

Кроме того, согласно обратным преобразованиям Лоренца, $E_x = E'_x$, $E_y = E'_y\big/\sqrt{1-\beta^2}$. Отсюда, с учетом (1) и (2), имеем

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{E_x'^2 + \frac{E_y'^2}{1-\beta^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}\sqrt{x'^2 + \frac{y'^2}{1-\beta^2}};$$

$$E = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}\sqrt{\frac{\cos^2\vartheta}{1-\beta^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{1-\beta^2}} = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-\beta^2}\,r'^3}. \qquad (4)$$

Подставляя (3) в (4), получим $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\vartheta)^{3/2}}$.

Так как по условию задачи заряд q движется равномерно и прямолинейно ($\boldsymbol{\upsilon}$ = const), то вектор $\mathbf{E}$ коллинеарен вектору $\mathbf{r}$. Поэтому

$$\mathbf{E} = E\frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\vartheta)^{3/2}}.$$

Ответ: $\mathbf{E} = E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j} = \dfrac{q\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\dfrac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\vartheta)^{3/2}}$.

Задача 9. Нерелятивистский точечный заряд q движется с постоянной скоростью $\boldsymbol{\upsilon}$. Найти с помощью формул преобразования полей индукцию магнитного поля $\mathbf{B}'$ этого заряда в точке, положение которой относительно заряда определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}$.

Решение: Допустим, что положительный точечный заряд q покоится в начале координат системы отсчета K. Для простоты предположим, что заряд находится в вакууме: $\varepsilon = \mu = 1$. В каждой точке пространства электрическое поле равно $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ и направлено от заряда по радиусу. Магнитная индукция $\mathbf{B} = 0$ в K-системе, связанной непосредственно с зарядом.

Поместим в точку, положение которой относительно заряда определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}$, K'-систему. Пусть K'-система движется с постоянной скоростью $\boldsymbol{\upsilon}$ <u>в отрицательном направлении</u> оси x. С учетом этого индукцию магнитного поля $\mathbf{B}'$ заряда q в точке, положение которой определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}$, можем найти с помощью формулы преобразования полей.

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} + \frac{[\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{E}]}{c^2},$$

где знак «+» появляется за счет того, что вектор $\boldsymbol{\upsilon}$ совпадает <u>с отрицательным направлением</u> оси x

$$\mathbf{B}' = \frac{[\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{E}]}{c^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^3}[\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{r}].$$

Связь магнитной и электрической постоянных: $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$. Тогда индукция магнитного поля $\mathbf{B}$ заряда в точке, положение которой относительно заряда определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}$, равна

$$\mathbf{B}' = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) q \frac{[\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{r}]}{r^3}.$$

Ответ: $\mathbf{B}' = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) q \frac{[\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{r}]}{r^3}$.

Задача 10. Имеется длинный прямой проводник с током $I = 1{,}0$ А. Найти заряд λ' на единицу длины проводника и соответствующее число электронов, обеспечивающих этот заряд, в системе отсчета, движущейся поступательно с нерелятивистской скоростью $\upsilon_0 = 1{,}0$ м/с вдоль проводника в направлении тока I.

Дано:	
$I = 1{,}0$ А	
$v_0 = 1{,}0$ м/с	
$\lambda' - ?\ N' - ?$	

Решение: Из условия задачи следует, что K'-система движется поступательно с нерелятивистской скоростью вдоль проводника в направлении тока I.

Чтобы найти заряд λ' на единицу длины проводника в K'-системе, необходимо, таким образом, знать продольную компоненту вектора магнитной индукции B_x. Продольные величины не изменяются при преобразовании Лоренца. Это утверждение относится и к вектору магнитной индукции **B** (см. уравнения Лоренца): $B'_x = B_x$. Магнитная индукция на расстоянии r от оси проводника с током в K-системе равна

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{r}.$$

Поскольку K'-система движется поступательно вдоль проводника в направлении тока I, то $r' = (v_0/c)\, r$. Ток в K'-системе $I' = \lambda' c$. Магнитная индукция проводника с током в K'-системе равна, следовательно,

$$B'_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\lambda' c}{(v_0/c)\ r}.$$

Так как $B'_x = B_x$, то $$\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\lambda' c}{(v_0/c) r} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{r}.$$

Отсюда $$\lambda' = \frac{v_0 I}{c^2} = \frac{1\cdot 1}{\left(3\cdot 10^8\right)^2} = 1{,}11\cdot 10^{-17}\ \text{Кл/м} = 11{,}1\ \text{аКл/м}.$$

Число электронов, обеспечивающих этот заряд, будет равно

$$N' = \lambda'/e = (1{,}11\cdot 10^{-17}/1{,}602\cdot 10^{-19}) = 69\ \text{м}^{-1}$$

Ответ: $\lambda' = 11{,}1$ аКл/м, $N' = 69$ м$^{-1}$.

Другое (альтернативное) решение. Проводник с током I, в неподвижной K-системе электронейтрален, т.е. плотность зарядов $\lambda = \lambda_0^+ + \lambda_0^- = 0$. Поэтому на положительно заряженную частицу, движущуюся со скоростью v_0 по направлению тока действует только сила

$$F = qv_0 B = qv_0 \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{r},$$

где B – магнитная индукция на расстоянии r от оси проводника с током в K-системе.

При переходе в подвижную K'- систему, движущуюся со скоростью v_0 по направлению тока, полный электрический заряд не изменяется. Однако при этом проводник уже не является электрически нейтральным, т.к. испытывает лоренцево сокращение длины в направлении своего движения в $\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$ раз. При этом плотность положительных и отрицательных зарядов, движущихся в противоположные стороны, изменяется неодинаково. Следовательно, $\lambda' = \lambda^+ + \lambda^- \neq 0$.

Так как в K'-системе скорость υ заряженной частицы равна нулю ($q\upsilon B' = 0$), то на нее действует только сила

$$F' = qE' = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda'}{r},$$

где E' – напряженность электрического поля на расстоянии r от оси заряженного проводника с током в K'-системе.

Характер протекания физических явлений не должен зависеть от выбора инерциальной системы отсчета, т.е. притяжение заряда к проволоке не должно измениться. Поэтому учитывая, что $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$, имеем

$$F = F'; \quad q\upsilon_0 \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda'}{r}; \quad \lambda' = \upsilon_0\varepsilon_0\mu_0 I = \frac{\upsilon_0 I}{c^2} = 1{,}11\cdot 10^{-17}\ \text{Кл/м}.$$

Задача 11. Убедиться с помощью формул преобразования Лоренца в инвариантности следующих величин:

$$\mathbf{E}'\mathbf{B}' = \mathbf{EB}, \qquad \mathbf{E}'^2 - c^2\mathbf{B}'^2 = \mathbf{E}^2 - c^2\mathbf{B}^2.$$

Решение: Для доказательства инвариантности указанных величин воспользуемся преобразованиями Лоренца для электромагнитного поля:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\boldsymbol{\upsilon}\,\mathbf{B}], \qquad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - [\boldsymbol{\upsilon}\,\mathbf{E}]/c^2.$$

А) $$\mathbf{E'B'} = \left(\mathbf{E} + [\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{B}]\right)\left(\mathbf{B} - \frac{[\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{E}]}{c^2}\right) = \mathbf{EB} - \frac{\mathbf{E}[\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{E}]}{c^2} + [\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{B}]\mathbf{B} - \frac{[\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{B}][\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{E}]}{c^2}.$$

Так как $\upsilon \ll c$, то члены суммы порядка υ^2/c^2 можно отбросить в силу их малости, тогда

$$\mathbf{E'B'} = \mathbf{EB} - \frac{\boldsymbol{\upsilon}[\mathbf{EE}]}{c^2} + [\mathbf{BB}]\boldsymbol{\upsilon}.$$

По определению векторного произведения $[\mathbf{EE}] = 0$, $[\mathbf{BB}] = 0$, отсюда $$\mathbf{E}'\mathbf{B}' = \mathbf{EB} = \text{inv}.$$

Б) $$\mathbf{E}'^2 - c^2\mathbf{B}'^2 = \left(\mathbf{E} + [\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{B}]\right)^2 - c^2\left(\mathbf{B} - \frac{[\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{E}]}{c^2}\right)^2 =$$

$$= \mathbf{E}^2 + 2\mathbf{E}[\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{E}] + \left([\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{B}]\right)^2 - c^2\mathbf{B}^2 + 2\mathbf{B}[\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{E}] - \frac{\left([\boldsymbol{\upsilon}\mathbf{E}]\right)^2}{c^2}.$$

Так как $\upsilon \ll c$, то члены суммы порядка υ^2/c^2 можно отбросить в силу их малости. По свойству векторного произведения

$$\mathbf{B}[\boldsymbol{\upsilon}\,\mathbf{E}] = -\,\boldsymbol{\upsilon}\,[\mathbf{B}\,\mathbf{E}] = \boldsymbol{\upsilon}\,[\mathbf{E}\,\mathbf{B}] = -\mathbf{E}\,[\boldsymbol{\upsilon}\,\mathbf{B}],$$

тогда

$$\mathbf{E}'^2 - c^2\mathbf{B}'^2 = \mathbf{E}^2 + 2\mathbf{E}\,[\boldsymbol{\upsilon}\,\mathbf{B}] - c^2\mathbf{B}^2 - 2\mathbf{E}\,[\boldsymbol{\upsilon}\,\mathbf{B}] = \mathbf{E}^2 - c^2\mathbf{B}^2 = \mathrm{inv}.$$

Инварианты электромагнитного поля используются для решения многих задач.

Ответ: $\mathbf{E}'\mathbf{B}' = \mathbf{EB} = \mathrm{inv}$; $\mathbf{E}'^2 - c^2\mathbf{B}'^2 = \mathbf{E}^2 - c^2\mathbf{B}^2 = \mathrm{inv}$.

Задача 12. В инерциальной K-системе имеются два однородных взаимно перпендикулярных поля: электрическое поле напряженностью E = 40 кВ/м и магнитное с индукцией B = 0,20 мТл. Найти напряженность E' (или индукцию B') поля в той K'-системе отсчета, где наблюдается только одно поле (электрическое или магнитное).

Дано:	
$\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$	
$E = 4{\cdot}10^4$ В/м	
$B = 2{\cdot}10^{-4}$ Тл	
B' – ?	

Решение: Для решения задачи воспользуемся инвариантом поля $E'^2 - c^2B'^2 = E^2 - cB^2 = \mathrm{inv}$.

Допустим, что (по условию задачи) в K'-системе электрическое поле отсутствует: $E' = 0$, тогда из условия инвариантности

$$E^2 - c^2B^2 = -\,c^2B'^2 = \mathrm{inv}$$

получаем выражение для модуля индукции магнитного поля

$$B'^2 = B^2 - \left(\frac{E}{c}\right)^2,\; B' = \sqrt{B^2 - \left(\frac{E}{c}\right)^2} = B\sqrt{1 - \left(\frac{E}{Bc}\right)^2}\;;$$

$$B' = 2\cdot10^{-4}\cdot\sqrt{1 - \left(\frac{4\cdot10^4}{2\cdot10^{-4}\cdot3\cdot10^8}\right)^2} = 1{,}5\cdot10^{-4}\text{ Тл} = 0{,}15\text{ мТл}.$$

Ответ: $B' = 0{,}15$ мТл.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица 1

Основные физические константы

Скорость света в вакууме	$c = 2{,}99792458 \cdot 10^8$ м/с
Гравитационная постоянная	$G = 6{,}672 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2
Ускорение свободного падения	$g = 9{,}8$ м/с^2
Постоянная Авогадро	$N = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Универсальная газовая постоянная	$R = 8{,}314$ Дж/(моль·К)
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Стандартное атмосферное давление	$P = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па
Постоянная Планка	$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с $\hbar = h/(2\pi) = 1{,}054 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Элементарный заряд	$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м $k_0 = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ м/Ф
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Постоянная Стефана – Больцмана	$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4)
Постоянная закона смещения Вина	$b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м·К
Постоянная Ридберга для бесконечной массы	$R_\infty = 3{,}29 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$ $R'_\infty = 1{,}097 \cdot 10^7$ м$^{-1}$
Радиус первой боровской орбиты	$a_0 = 5{,}29 \cdot 10^{-11}$ м
Энергия ионизации атома водорода	$E_i = 13{,}6$ эВ
Комптоновская длина волны электрона	$\lambda_К = 2{,}426 \cdot 10^{-12}$ м
Магнетон Бора	$\mu_Б = 9{,}27 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл
Магнитный момент электрона	$\mu_e = 1{,}001145\mu_0$
Классический радиус электрона	$r_e = 2{,}82 \cdot 10^{-15}$ м
Масса покоя электрона	$m_e = 9{,}108 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	$m_p = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1{,}6749 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя α-частицы	$m_\alpha = 6{,}6444 \cdot 10^{-27}$ кг
Атомная единица массы (а.е.м.)	$m_a = 1{,}6606 \cdot 10^{-27}$ кг
1 кюри соответствует	$3{,}7 \cdot 10^{10}$ распад /с

1 рентген соответствует тому количеству рентгеновского или гамма-излучения, которое создает в 1 м^3 сухого воздуха, находящегося при нормальных условиях, $2{,}08 \cdot 10^{15}$ пар ионов.

Таблица 2

Плотность ρ и молярная масса μ некоторых веществ

Вещество	ρ, 10^3 кг/м^3	μ, 10^{-3} кг/моль	Вещество	ρ, 10^3 кг/м^3	μ, 10^{-3} кг/моль
Алюминий	2,70	27	Медь	8,93	64
Вода	1,00	18	Никель	8,80	59
Воздух *)	$1{,}29 \cdot 10^{-3}$	29	Ртуть	13,60	201
Железо	7,87	56	Свинец	11,3	207
Керосин	0,80	–	Серебро	10,49	108
Лед	0,916	18	Спирт (этил.)	0,79	46
Масло трансф.	0,8	–	Цинк	7,13	65

*) При нормальных условиях ($P = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па, $T = 273$ К)

Таблица 3

Температура плавления $t_{пл}$, удельная теплоемкость c, теплота плавления λ и парообразования r некоторых веществ

Вещество	$t_{пл}$, °C	c, Дж/(К·кг)	λ, кДж/кг	r, МДж/кг	$T_{кип}$, °C *)
Вода (лед)	– 0	4190 2090	– 333	2,26 –	100 –
Алюминий	660	920	391	10,8	2520
Вольфрам	3420	142	192	4,01	5680
Железо	1538	641	246	6,25	2872
Медь	1083	394	204	4,76	2543
Ртуть	–38,9	138	11,7	0,295	356,7
Свинец	327	130	22,6	0,86	1745
Серебро	961	234	104,6	2,47	2167
Спирт (этил.)	–113,3	2420	108	0,92	78,5
Цинк	419,5	388	110,7	1,76	906

*) При нормальном давлении $P = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па.

Таблица 4

Удельное сопротивление при температуре $t° = 0$ °C и температурный коэффициент α проводников

Вещество	ρ_0, 10^{-8} Ом·м	α, °C^{-1}
Алюминий	2,7	$3{,}6 \cdot 10^{-3}$
Вольфрам	4,9	$5{,}1 \cdot 10^{-3}$
Железо	9,7	$6{,}2 \cdot 10^{-3}$
Золото	2,0	$4{,}0 \cdot 10^{-3}$
Медь	1,7	$4{,}2 \cdot 10^{-3}$
Серебро	1,6	$4{,}1 \cdot 10^{-3}$
Нихром	100 (при $t°_{раб} = 1100$ °C)	–
Свинец	19	$4{,}2 \cdot 10^{-3}$
Цинк	5,5	$4{,}2 \cdot 10^{-3}$

Таблица 5

Показатель преломления *n* некоторых оптических веществ

($\lambda = 5{,}9 \cdot 10^{-7}$ м – желтая линия натрия)

Вещество	*n*	Вещество	*n*
Алмаз	2,42	Al_2O_3 (корунд, рубин, сапфир)	1,57
Вода	1,33	Сероуглерод	1,63
Воздух	1,0003	Стекло (обычное)	1,5
Глицерин	1,47	Стекло (цинковый крон)	1,52
Монокристалл NaCl	1,53	Стекло (легкий флинт)	1,58
Плавленый кварц	1,46	Стекло (тяжелый флинт)	1,89
Полиэтилен	1,52		

Таблица 6

Диэлектрическая проницаемость ε некоторых диэлектриков

Диэлектрик	ε	Диэлектрик	ε	Диэлектрик	ε
Вода	81	Парафин	2,0	Спирт 80 %	26
Воздух	1,00058	Парафинированная бумага	2,0	Стекло	6,0
Воск	7,8	Плексиглас	3,5	Фарфор	5,0
Керосин	2,0	Полиэтилен	2,3	Эбонит	2,7
Масло (трансф)	2,2	Слюда	7,0		

Таблица 7

Работы выхода электрона с поверхности некоторых металлов

Металл	*A*, эВ	Металл	*A*, эВ	Металл	*A*, эВ
Алюминий	3,74	Литий	2,30	Рубидий	2,13
Барий	2,29	Медь	4,50	Серебро	4,72
Вольфрам	4,50	Магний	3,64	Стронций	2,25
W + Th	2,63	Натрий	2,27	Цезий	1,90
Золото	4,76	Никель	4,84	Цинк	4,00
Кадмий	4,08	Платина	5,30		
Калий	2,26	Ртуть	4,53		

Таблица 8

Подвижность некоторых ионов в электролитах

Катионы	b_+, 10^{-8} м^2/(В·с)	Анионы	b_-, 10^{-8} м^2/(В·с)
Ag^+	5,6	NO_3^-	6,4
H^+	32,6	Cl^-	6,8
K^+	6,7		
Na^+	4,4		

Таблица 9

Некоторые астрономические величины

Радиус Земли	$R_З = 6{,}378 \cdot 10^6$ м
Масса Земли	$M_З = 5{,}976 \cdot 10^{24}$ кг
Радиус Солнца	$R_С = 6{,}96 \cdot 10^8$ м
Масса Солнца	$M_С = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ кг
Радиус Луны	$R_Л = 1{,}737 \cdot 10^6$ м
Масса Луны	$M_Л = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ кг
Среднее расстояние до Солнца (1 а.е.)	1 а.е. = $1{,}49598 \cdot 10^{11}$ м
Среднее расстояние до Луны	$r_л = 3{,}844 \cdot 10^8$ м
Период обращения Земли вокруг Солнца	$T_З$ = 365,25 сут = $3{,}156 \cdot 10^7$ с
Период обращения Луны вокруг Земли	$T_Л$ = 27 сут 7 ч 43 мин = $2{,}36 \cdot 10^6$ с

Таблица 10

Соотношение между различными единицами

Температура	0 К = –273 °С	Электронвольт	1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж
Атмосфера	1 атм = 10^5 Па	1 год	$3{,}1557 \cdot 10^7$ с

Таблица 11

Некоторые десятичные приставки

Наименование	тера	гига	мега	микро	нано	пико	фемто	атто
Приставка	Т	Г	М	мк	н	п	ф	а
Множитель	10^{12}	10^9	10^6	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

1. Закон Кулона. Взаимодействие точечных и распределенных зарядов. Принцип суперпозиции 4
2. Электрическое поле системы зарядов. Принцип суперпозиции. Поток вектора напряженности и теорема Гаусса 20
3. Электрический потенциал. Работа по перемещению заряда в поле 37
4. Диэлектрики в электрическом поле 53
5. Электроемкость. Конденсаторы 69
6. Энергия системы зарядов электрического поля 85
7. Электрический ток. Закон Ома. Электропроводность металлов и полупроводников. Законы Кирхгофа 102
8. Работа и мощность тока. Закон Джоуля – Ленца. Коэффициент полезного действия источника тока 118
9. Электрический ток в электролитах, газах и вакууме 126
10. Контактные явления 164
11. Сила Лоренца 174
12. Магнитное поле постоянного тока. Закон Био – Савара – Лапласа. Закон Ампера. Взаимодействие токов 192
13. Циркуляция вектора **B** (закон полного тока). Магнитный поток . . . 224
14. Электродинамические потенциалы (векторный и скалярный потенциал магнитного поля) 234
15. Контур с током в магнитном поле. Энергия контура. Работа в магнитном поле. Энергия магнитного поля 242
16. Магнитное поле в веществе 255
17. Эффект Холла 271
18. Электродвижущая сила индукции 279
19. Самоиндукция. Токи при замыкании и размыкании. Взаимная индукция. Трансформатор 296
20. Ускорители элементарных частиц 307
21. Уравнения Максвелла. Ток смещения 325
22. Свободные (гармонические) и затухающие колебания 332
23. Вынужденные колебания. Резонанс 350
24. Электромагнитные волны 365
25. Цепи переменного тока 381
26. Взаимодействие излучения с веществом 394
27. Преобразования Лоренца для электромагнитного поля 412

Приложение 426

Учебное издание

ТЮРИН Юрий Иванович, ЛАРИОНОВ Виталий Васильевич, ЧЕРНОВ Иван Петрович, АНТРОПОВ Николай Андреевич, БОРИСОВ Виктор Петрович, БОТАКИ Александр Анджелович, ГОРЯЧЕВ Борис Валентинович, ЕФРЕМОВА Наталья Александровна, КУПРЕКОВА Елена Ивановна, МЕЛЬНИКОВА Тамара Николаевна, ПЕТРОВА Ольга Юрьевна, ПОЗДЕЕВА Эльвира Вадимовна, РУДКОВСКАЯ Вера Федоровна, СЕМКИНА Людмила Иосифовна, СЕРИКОВ Леонид Вениаминович, СИВОВ Юрий Александрович, СКЛЯРОВА Елена Александровна, СМЕКАЛИНА Татьяна Владимировна, ТОЛМАЧЕВА Нелла Дмитриевна, ШОШИН Эдуард Борисович

ФИЗИКА

СБОРНИК ЗАДАЧ
(с решениями)

ЧАСТЬ 2
Электричество и магнетизм
Учебное пособие

Научный редактор *доктор физико-математических наук, профессор Ю.И. Тюрин*
Ответственный редактор *Н.Д. Толмачева*
Редактор *И.О. Фамилия*
Компьютерная верстка *И.О. Фамилия*
Дизайн обложки *И.О. Фамилия*

Подписано к печати 19.02.2009. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл.печ.л. 10,23. Уч.-изд.л. 9,26.
Заказ . Тираж 100 экз.

Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru