Численное дифференцирование

Производная функции

Производная функции $y = f(x)$ – предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда Δx стремится к нулю:

$$dy/dx = y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

При аналитическом задании функций производная функции может быть найдена с помощью таблиц производных – для сравнительно простых функций

Аппроксимация производной

В случаях, когда аналитически производную найти нельзя, производную в точке x можно найти следующим образом:

1. Задают некоторое конечное значение Δx
2. Вычисляют $f(x)$ и $f(x+\Delta x)$
3. Находят $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$
4. Значение производной полагают равным

$$y' \approx \Delta y / \Delta x$$

Это соотношение называют аппроксимацией производной функции с помощью отношения *конечных разностей* (Δy и Δx – конечные, в отличие от бесконечно малых в определении производной)

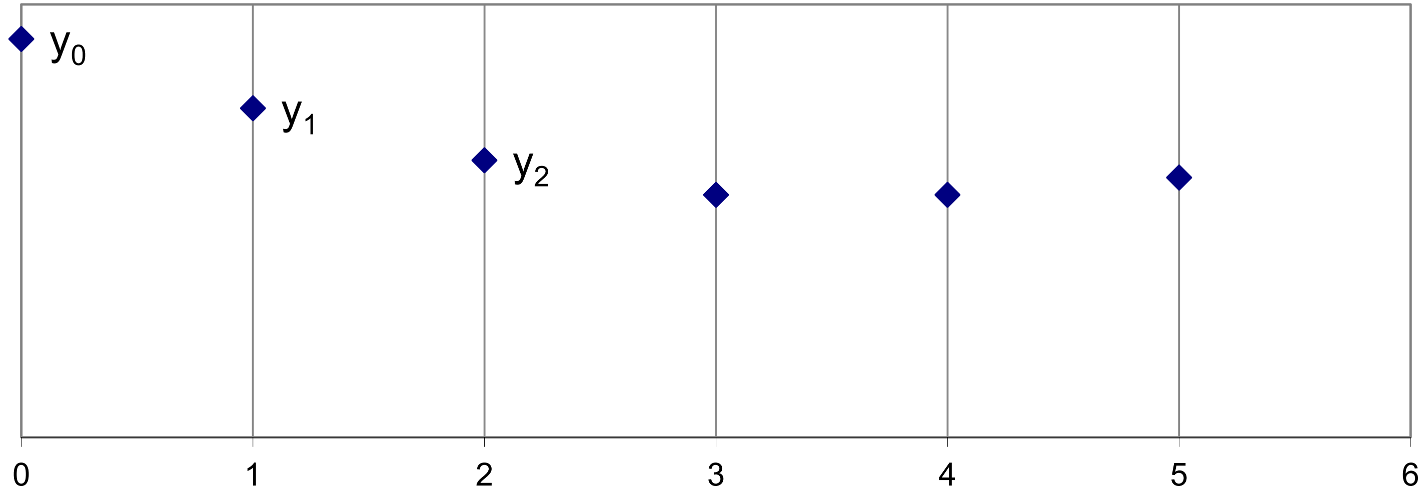
Производная функции, заданной таблично

В случае таблично заданной функции имеем: дискретному множеству значений аргумента (x_i) поставлено в соответствие множество значений функции (y_i), $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$

Шаг – разность между соседними значениями аргумента, $\Delta x = h$, постоянный

Производную функции y'_1 в узле $x = x_1$ можно найти с помощью конечных разностей несколькими способами

Виды конечных разностей



Левые разности: $\Delta y_1 = y_1 - y_0, \quad \Delta x = h, \quad y_1' \approx \dfrac{y_1 - y_0}{h}$

Правые разности: $\Delta y_1 = y_2 - y_1, \quad \Delta x = h, \quad y_1' \approx \dfrac{y_2 - y_1}{h}$

Центральные разности: $\Delta y_1 = y_2 - y_0, \quad \Delta x = 2h, \quad y_1' \approx \dfrac{y_2 - y_0}{2h}$

Старшие производные

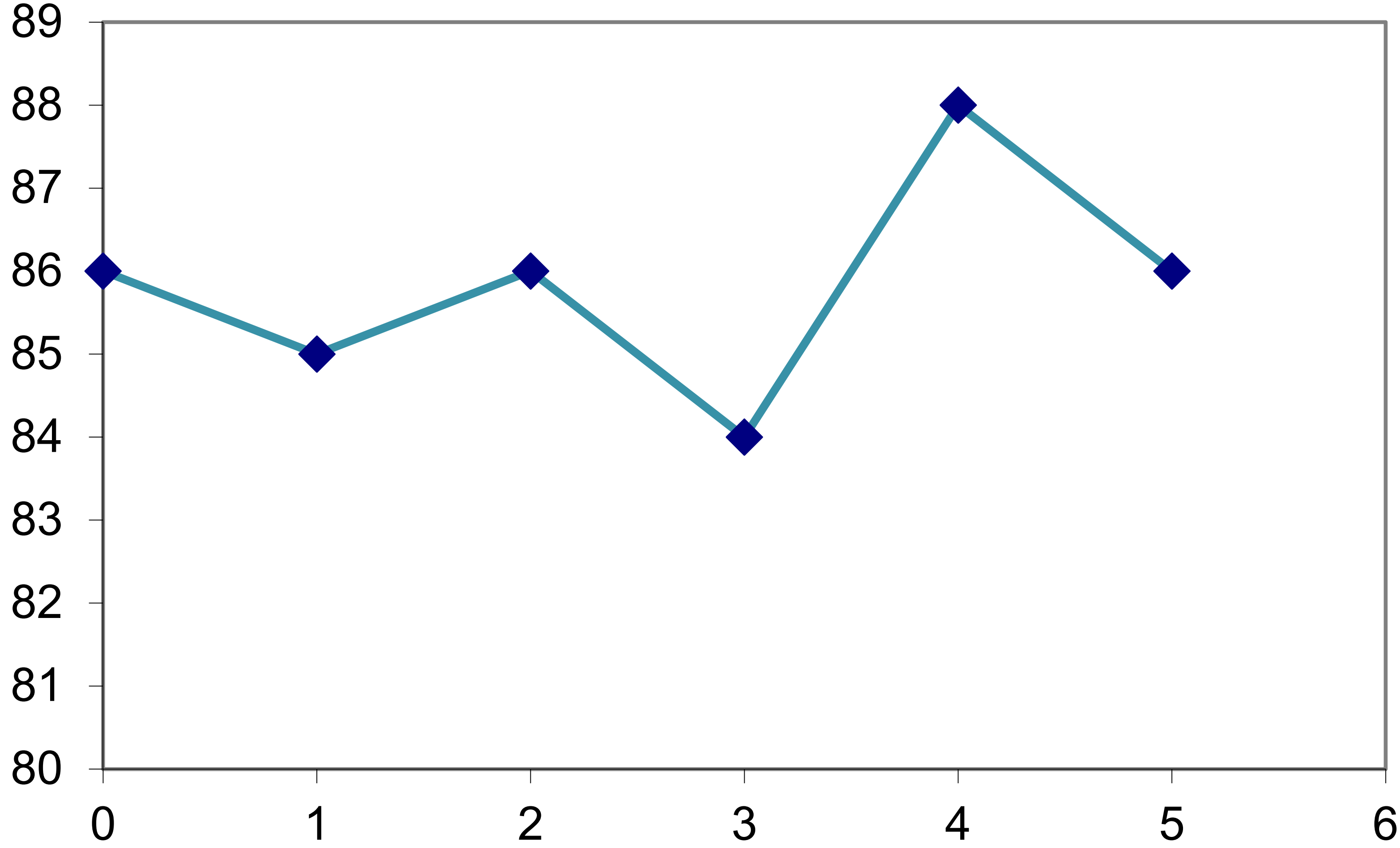
Вторая производная

$$y_1'' = (y_1')' \approx \frac{y_2' - y_1'}{h} \approx \frac{{(y_2 - y_1)}/{h} - {(y_1 - y_0)}/{h}}{h} = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2}$$

При вычислении второй производной также можно использовать левые, правые, или центральные разности

Таким образом можно найти приближенные значения производных любого порядка

Недостаток конечных разностей – большая погрешность



Полиномы Лагранжа

Интерполяционный полином Лагранжа для трех узлов ($n = 2$)

$$L(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2 =$$

$$= \frac{1}{2h^2}\left[(x-x_1)(x-x_2)y_0 - 2(x-x_0)(x-x_2)y_1 + (x-x_0)(x-x_1)y_2\right]$$

Его производная

$$L'(x) = \frac{1}{2h^2}\left[(2x-x_1-x_2)y_0 - 2(2x-x_0-x_2)y_1 + (2x-x_0-x_1)y_2\right]$$

Трехточечные формулы производных

В узле $x = x_0$

$$y_0' = \frac{1}{2h^2}\left[(2x_0 - x_1 - x_2)y_0 - 2(2x_0 - x_0 - x_2)y_1 + (2x_0 - x_0 - x_1)y_2\right] =$$

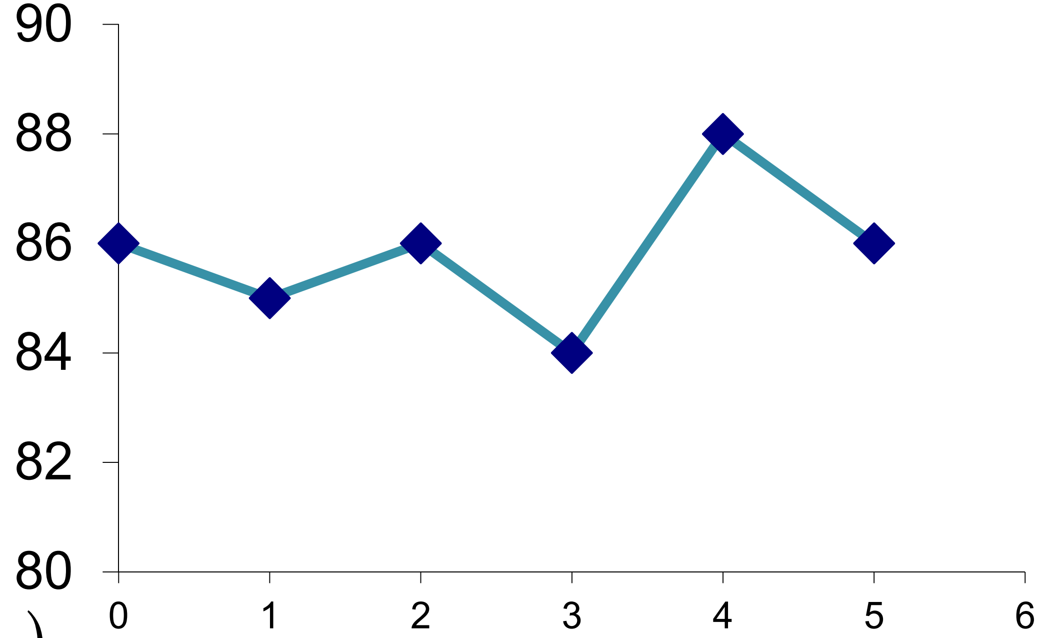
$$= \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2)$$

В узле $x = x_1$

$$y_1' = \frac{1}{2h}(y_2 - y_0)$$

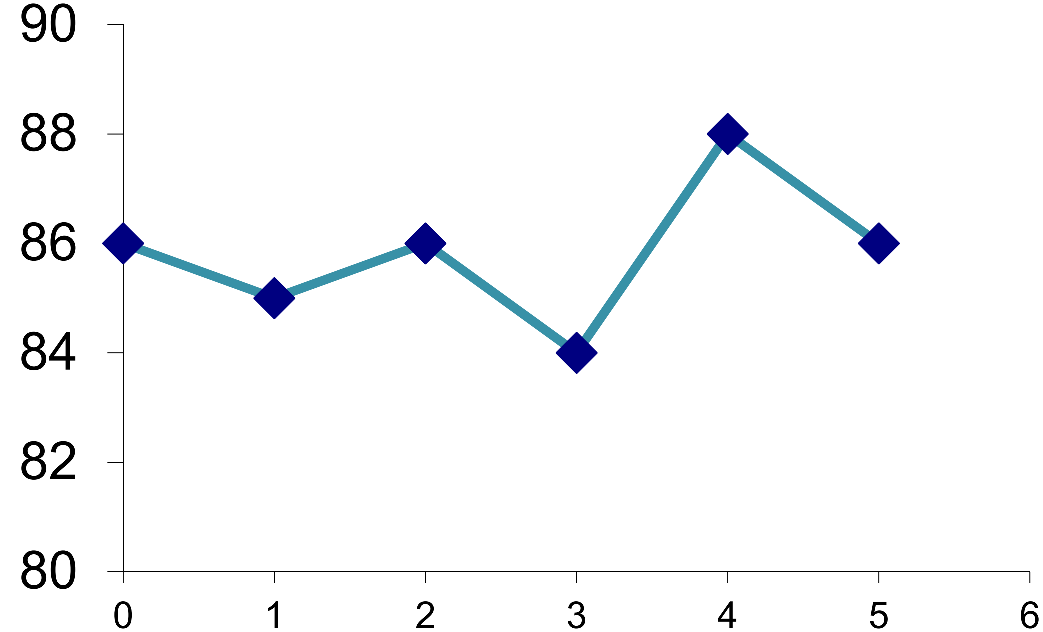
В узле $x = x_2$

$$y_2' = \frac{1}{2h}(y_0 - 4y_1 + 3y_2)$$



Аппроксимация центральными разностями

При четном $n = 2, 4, \ldots$ (нечетное число узлов) наиболее простые формулы получаются для центральных узлов. Поэтому производные в каждом узле вычисляют, используя его как центральный:



При $n = 2$:

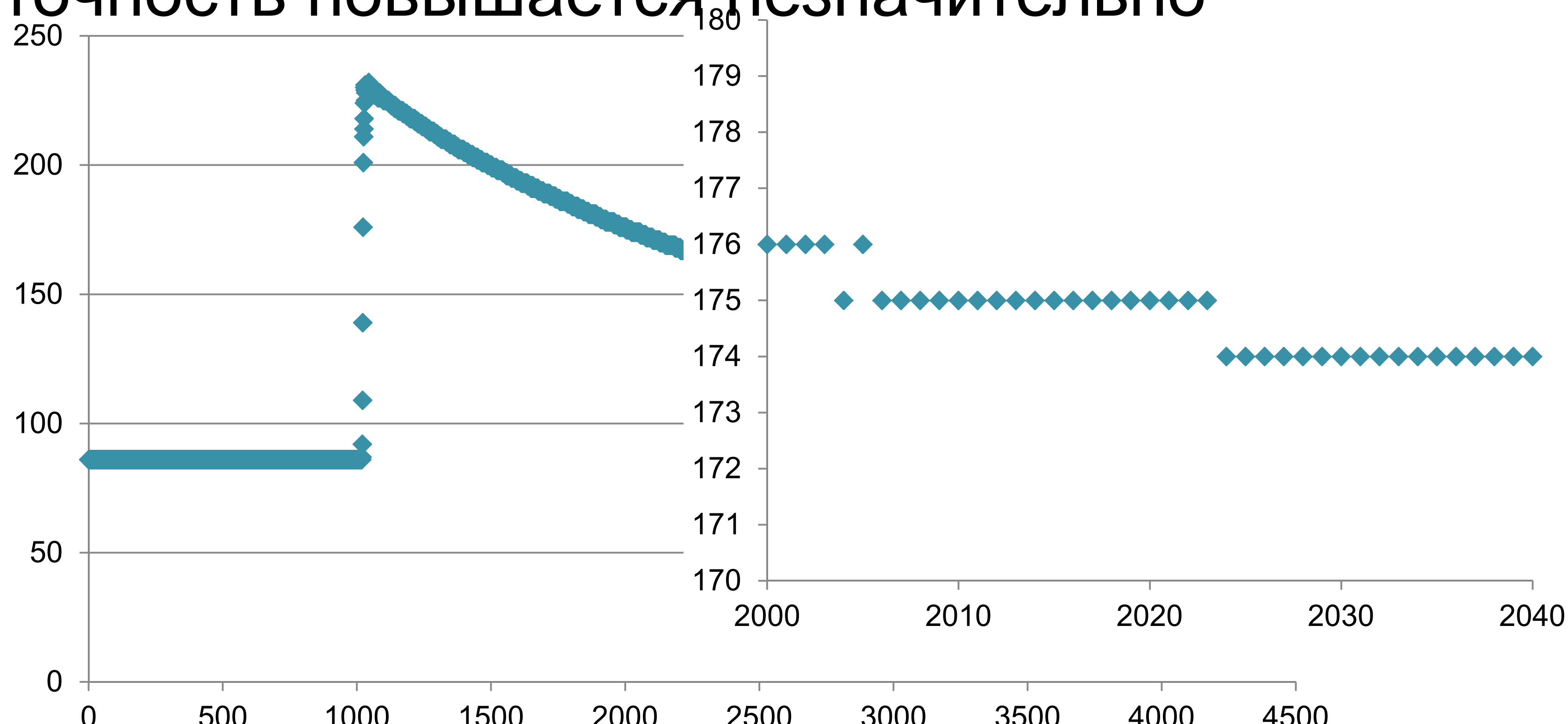
$$y_i' = \frac{1}{2h}\left(y_{i+1} - y_{i-1}\right)$$

При $n = 4$:

$$y_i' = \frac{1}{12h}\left(y_{i-2} - 8y_{i-1} + 8y_{i+1} - y_{i+2}\right)$$

Сглаживание – Аппроксимация – Дифференцирование

- Дальнейшее увеличение числа узлов приводит к большому количеству вычислений, но точность повышается незначительно



Выход – аппроксимация (сглаживание) и только затем дифференцирование

Частные производные

Для функции $u = f(x,y)$ можно приближенно принять

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{f(x+h_x, y) - f(x, y)}{h_x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{f(x, y+h_y) - f(x, y)}{h_y}$$

С помощью конечных разностей для таблично заданной функции получим аппроксимации:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_y}$$

Центральные разности для частных производных

Строятся, используя интерполяционный полином Лагранжа для трех либо пяти узлов

$n = 2$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_y}$$

$n = 4$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{4h_x},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}}{4h_y}$$