Аппроксимация таблично заданных функций

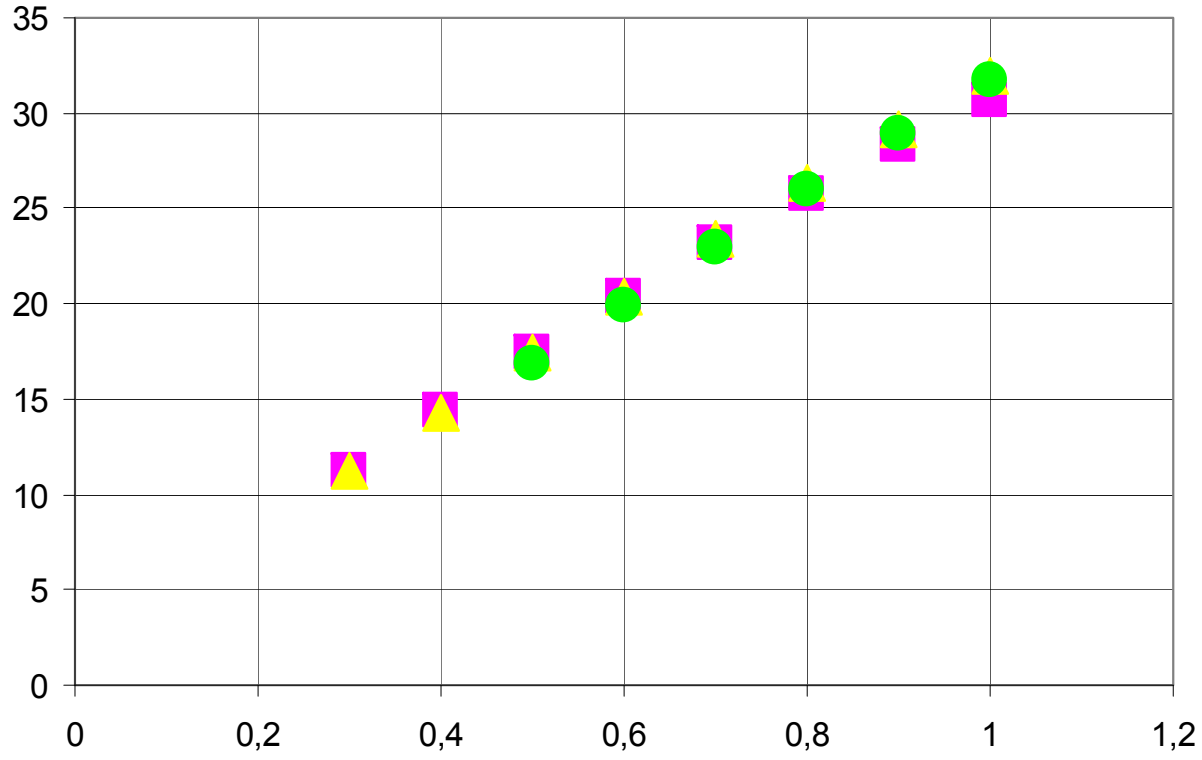
Таблично заданные функции

1. Зависимость разрядного напряжения газового промежутка с однородным полем от расстояния между электродами

Расстояние между шарами, см	Диаметр шаров, см		
	2	**5**	**12,5**
0,30	11,2	11,2	
0,40	14,4	14,3	
0,50	17,4	17,4	16,8
0,60	20,4	20,4	19,9
0,70	23,2	23,4	23,0
0,80	25,8	26,3	26,0
0,90	28,3	29,2	28,9
1,0	30,7	32,0	31,7

Таблично заданные функции

1. Зависимость разрядного напряжения газового промежутка с однородным полем от расстояния между электродами



Таблично заданные функции

1. Зависимость разрядного напряжения газового промежутка с однородным полем от расстояния между электродами

Расстояние между шарами, см	Диаметр шаров, см		
	2	**5**	**12,5**
0,05	2,8		
0,10	4,7		
0,15	6,4		
0,20	8,0	8,0	
0,25	9,6	9,6	
0,30	11,2	11,2	

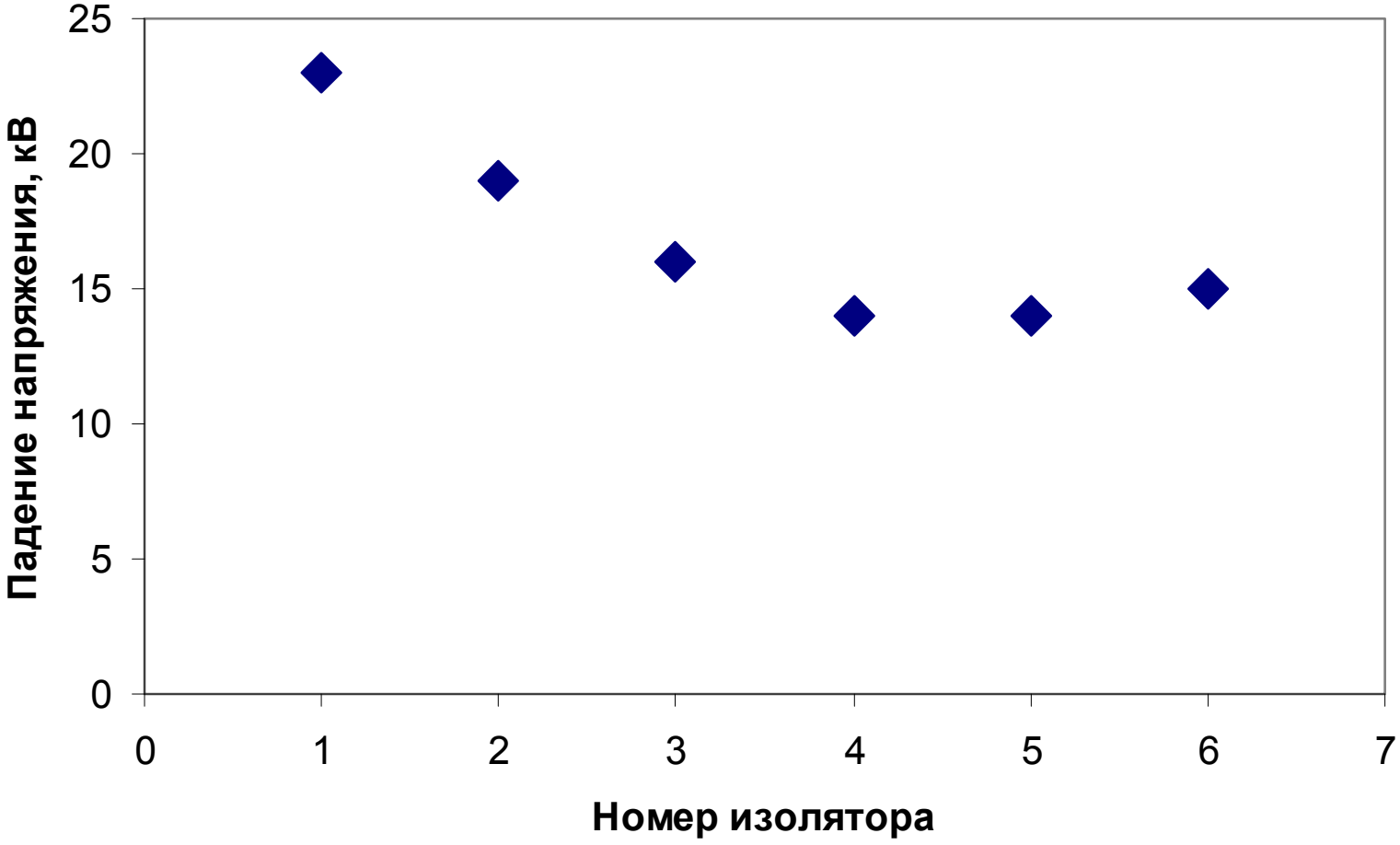
Таблично заданные функции

2. Падение напряжения на изоляторах в гирлянде

Номер изолятора	Падение напряжения, кВ
1	23
2	19
3	16
4	14
5	14
6	15

Таблично заданные функции

2. Падение напряжения на изоляторах в гирлянде



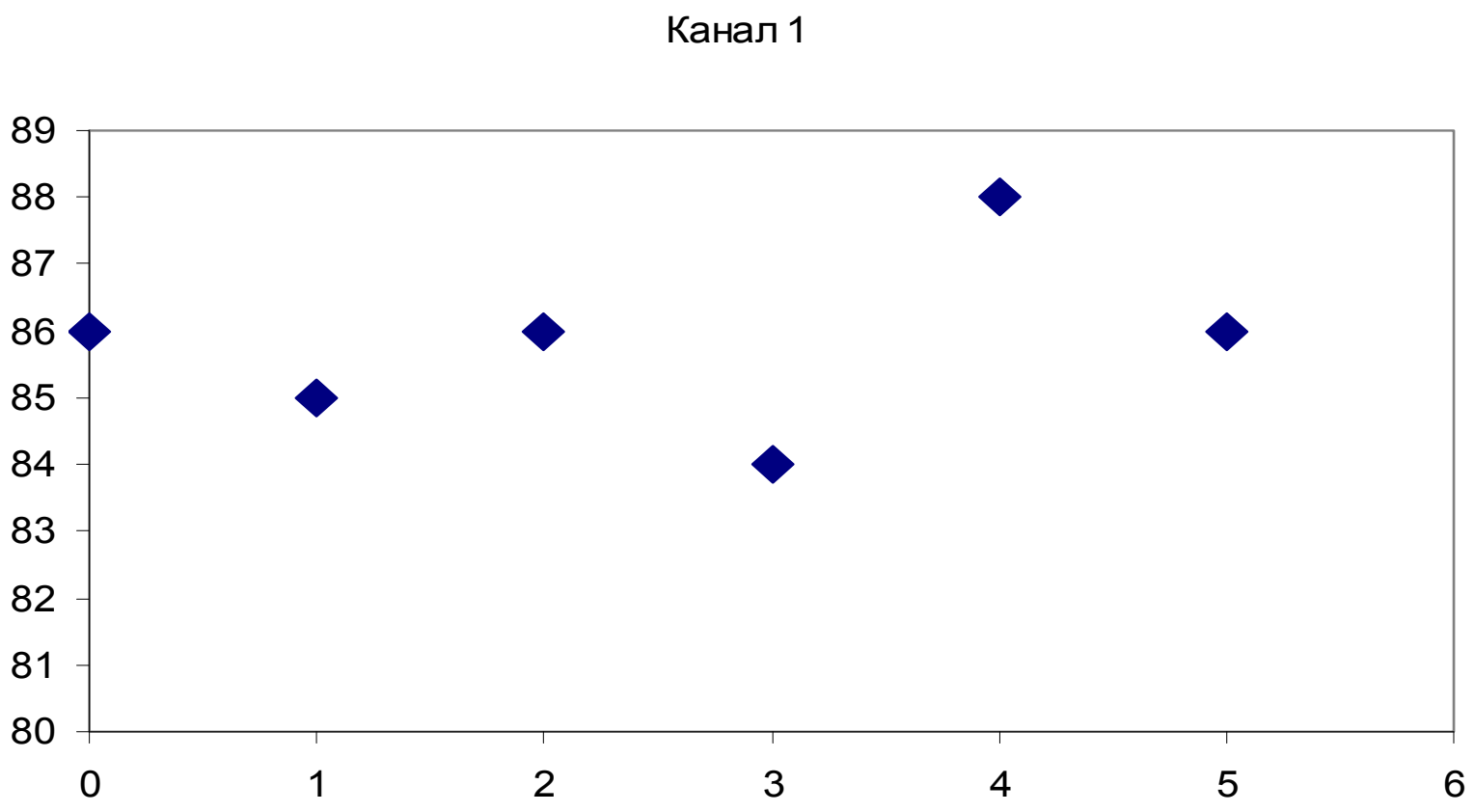
Таблично заданные функции

3. Измерения с помощью цифрового осциллографа

TIME STEP:	VOLTAGE STEP:	
160 = 5ms	CH1: 32 = 5V	CH2: 32 = 0.5V
Номер	Канал 1	Канал 2
0	86	255
1	85	255
2	86	255
3	84	255
4	88	255
5	86	255

Таблично заданные функции

3. Измерения с помощью цифрового осциллографа



Таблично заданные функции

4. Использование сканера

	0	1	2	3
0	86	88	156	255
1	85	92	134	255
2	86	80	112	255
3	87	98	118	255
4	88	122	164	255
5	87	114	189	255
6	86	124	205	255

Таблично заданные функции

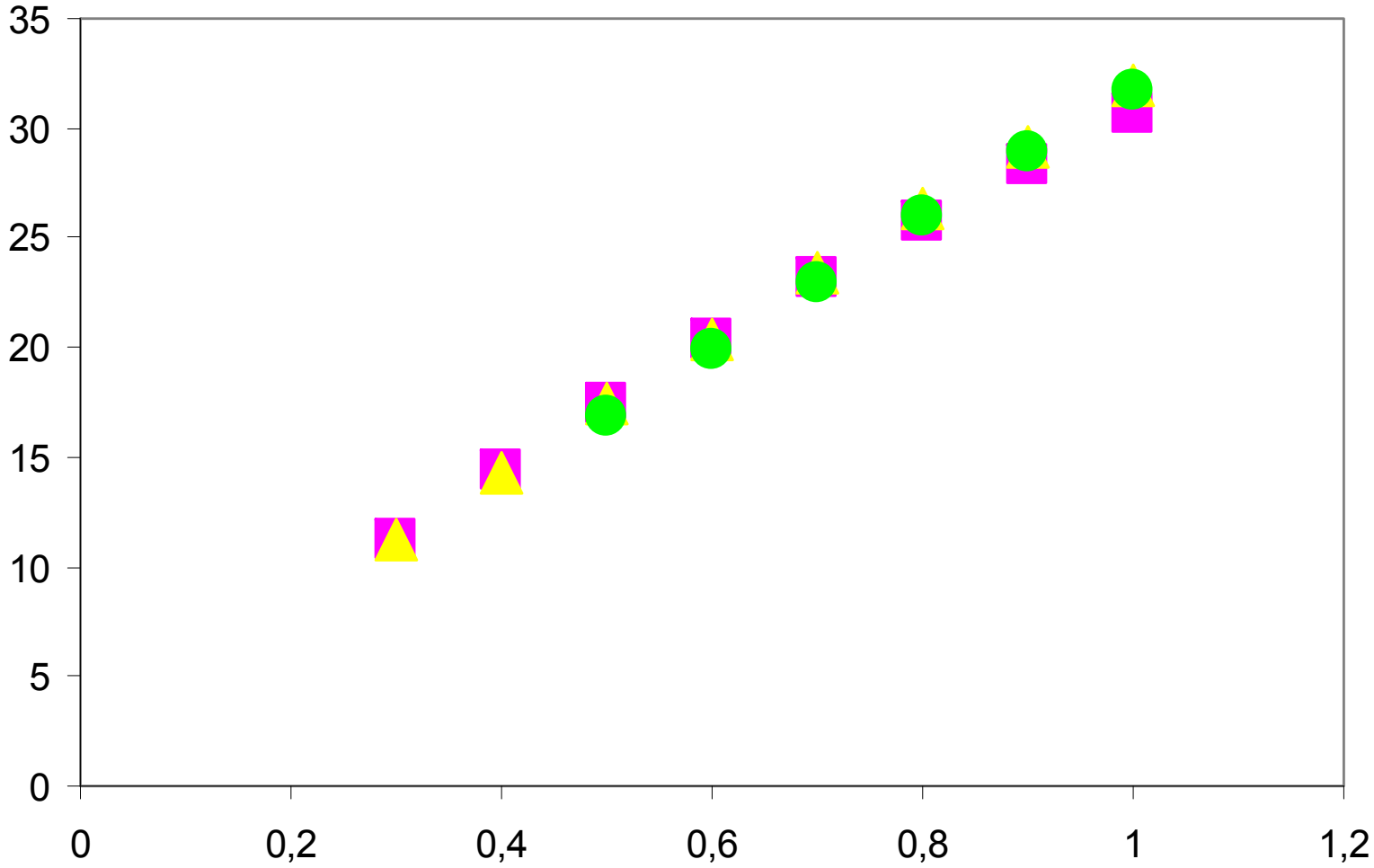
5. Результаты моделирования

Шаг (Время)	Ток, А	Напряжение, В
0	0	10000
1	2	8855,123
2	3,8	6724,845
3	5,5	4645,145
4	7,0	3582,861
5	8,4	2598,537

Аппроксимация

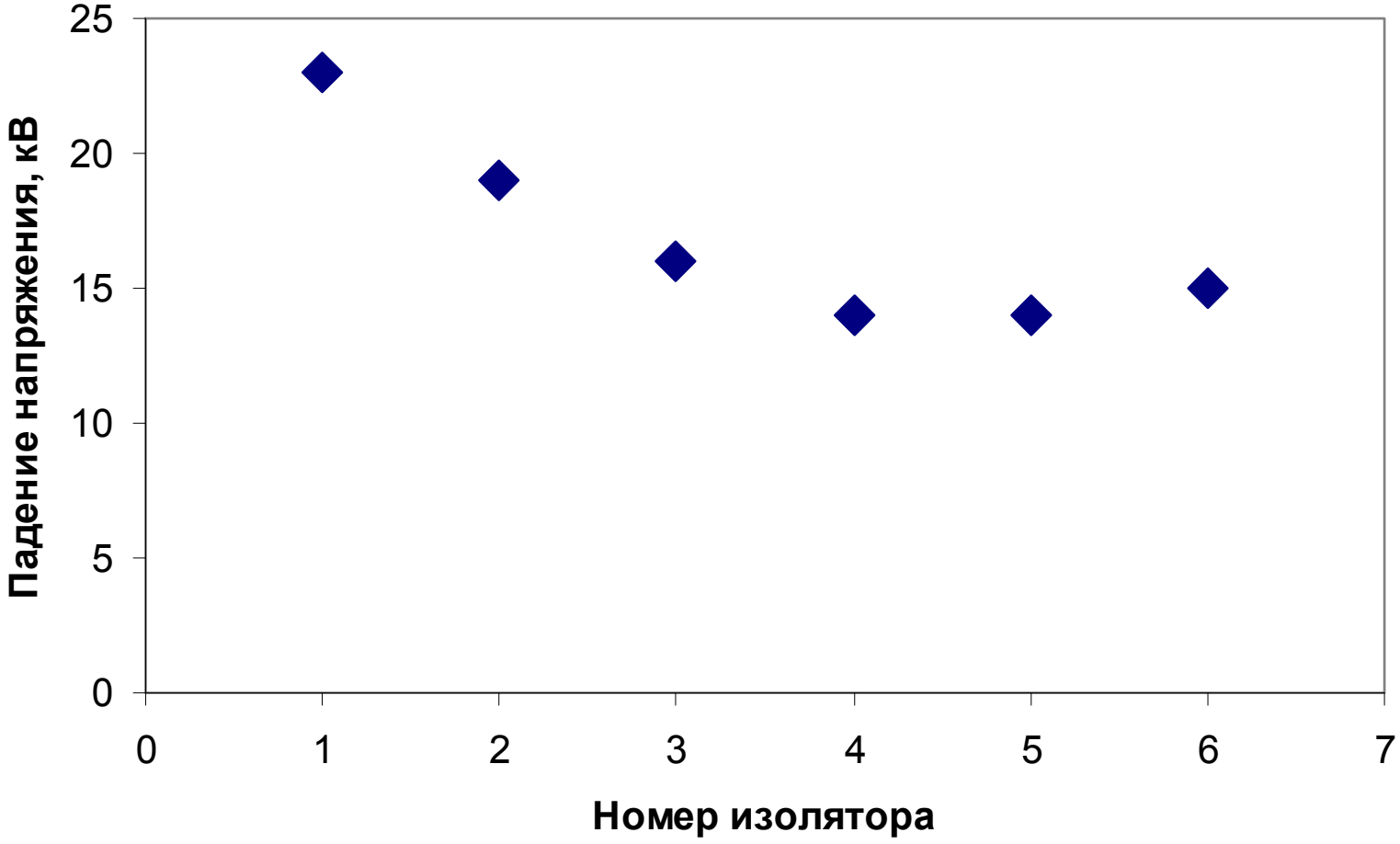
- Таблица: дискретному множеству значений аргумента (x_i) поставлено в соответствие множество значений функции (y_i), $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$
- На практике часто нужно знать значения y при других значениях x
- **Аппроксимация** (приближение) – замена данной функции приближенной (аппроксимирующей) функцией так, чтобы отклонение в заданном диапазоне изменения x было минимальным

Аппроксимация

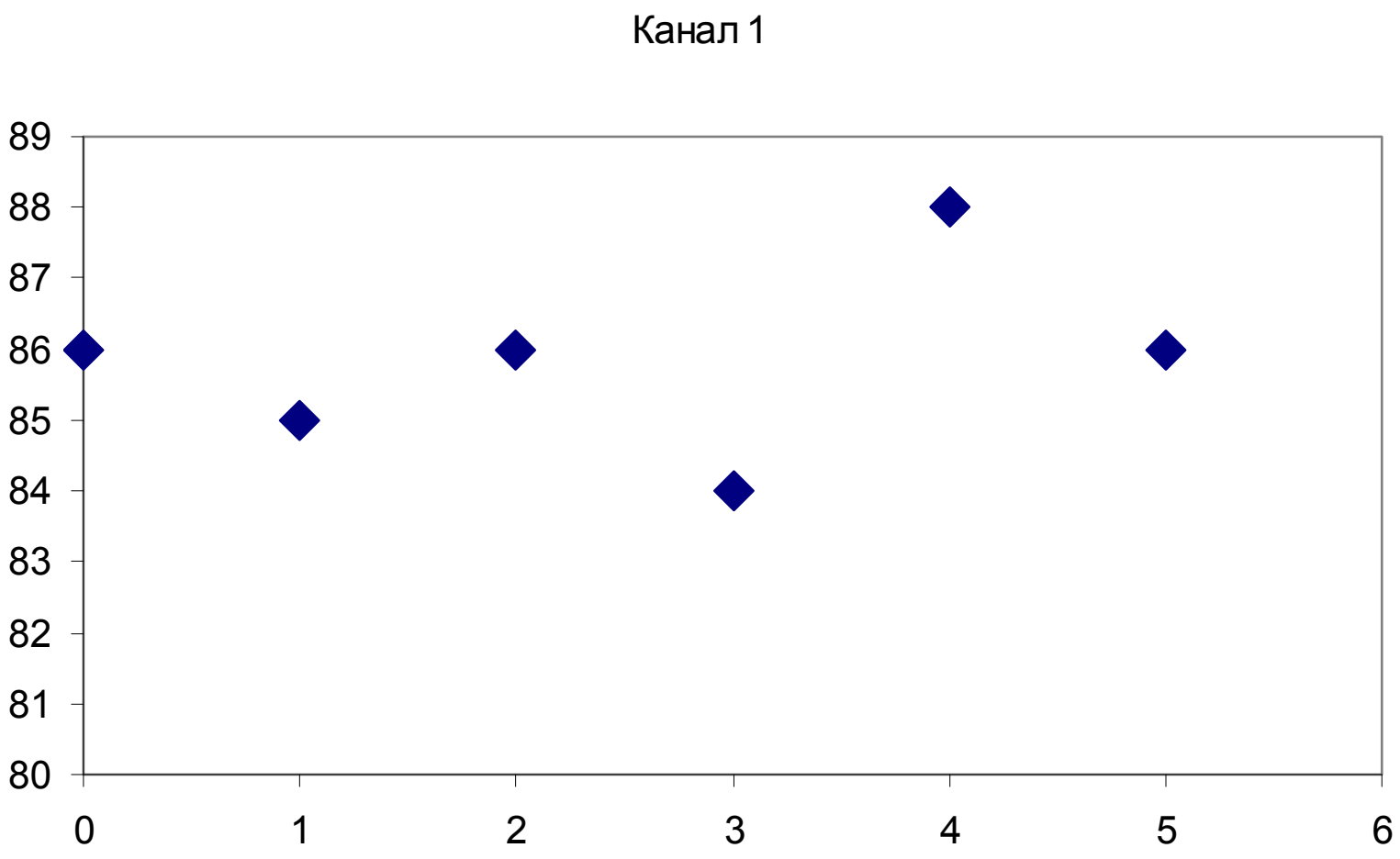


$$U_{\text{пр}} = 23{,}85\delta \cdot S + 7{,}85\sqrt{\delta \cdot S}$$

Аппроксимация



Аппроксимация

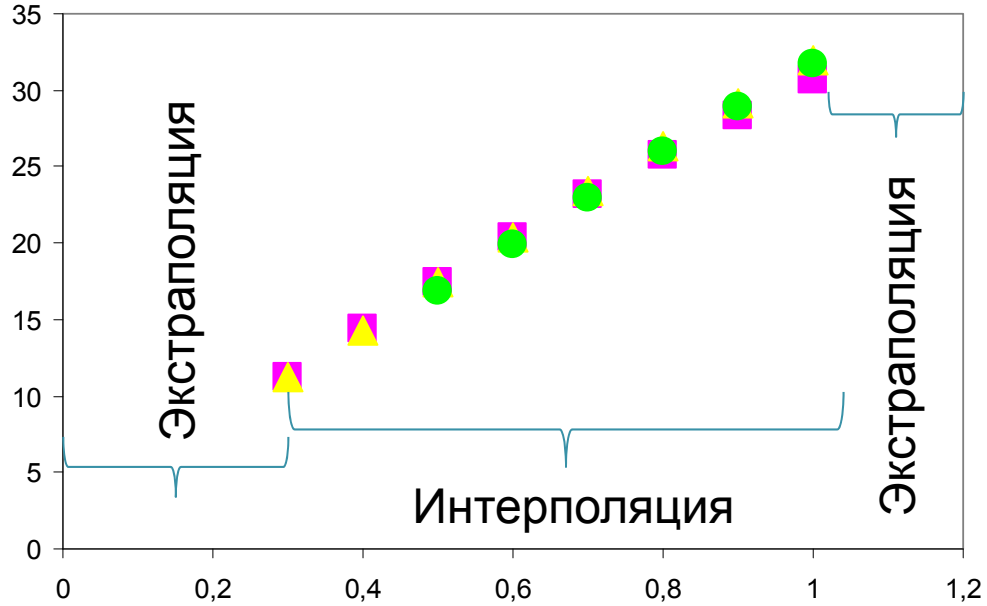


Интерполяция

- Если аппроксимирующая функция строится таким образом, чтобы в узлах (x_i) она точно принимала значения y_i, процедура называется **интерполирование**, а функция – интерполирующей
- Глобальная интерполяция – интерполирующая функция строится для всего диапазона изменения x
- Локальная интерполяция – для разных частей диапазона строятся разные интерполирующие функции

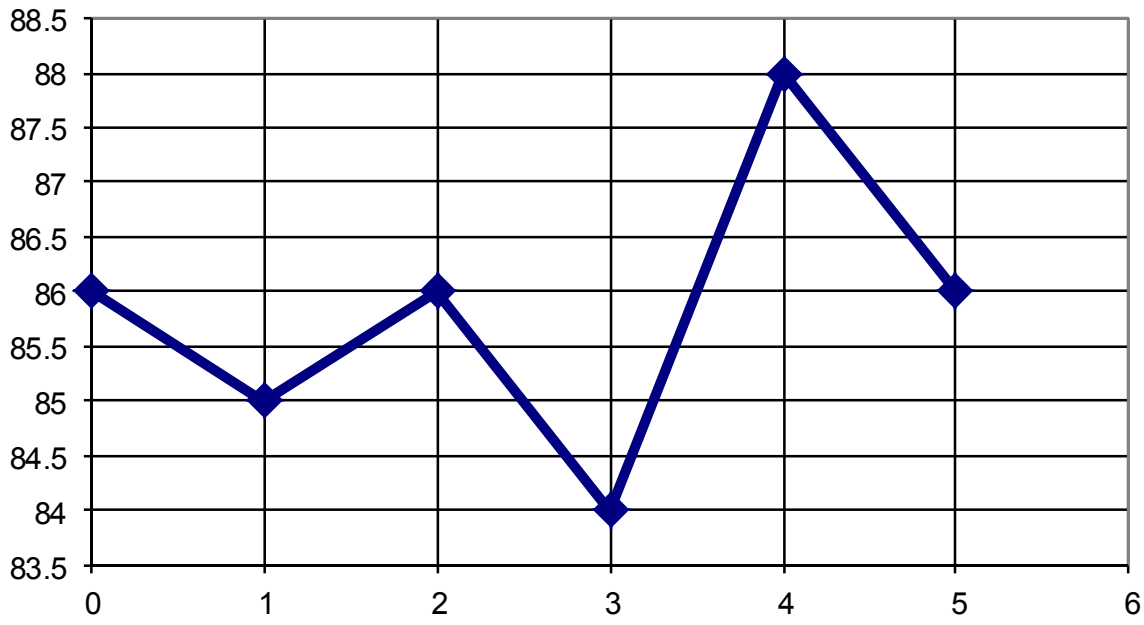
Экстраполяция

- Как правило, интерполирование используется для аппроксимации функции в промежуточных точках диапазона
- Приближенное вычисление функции за пределами диапазона – **экстраполяция**



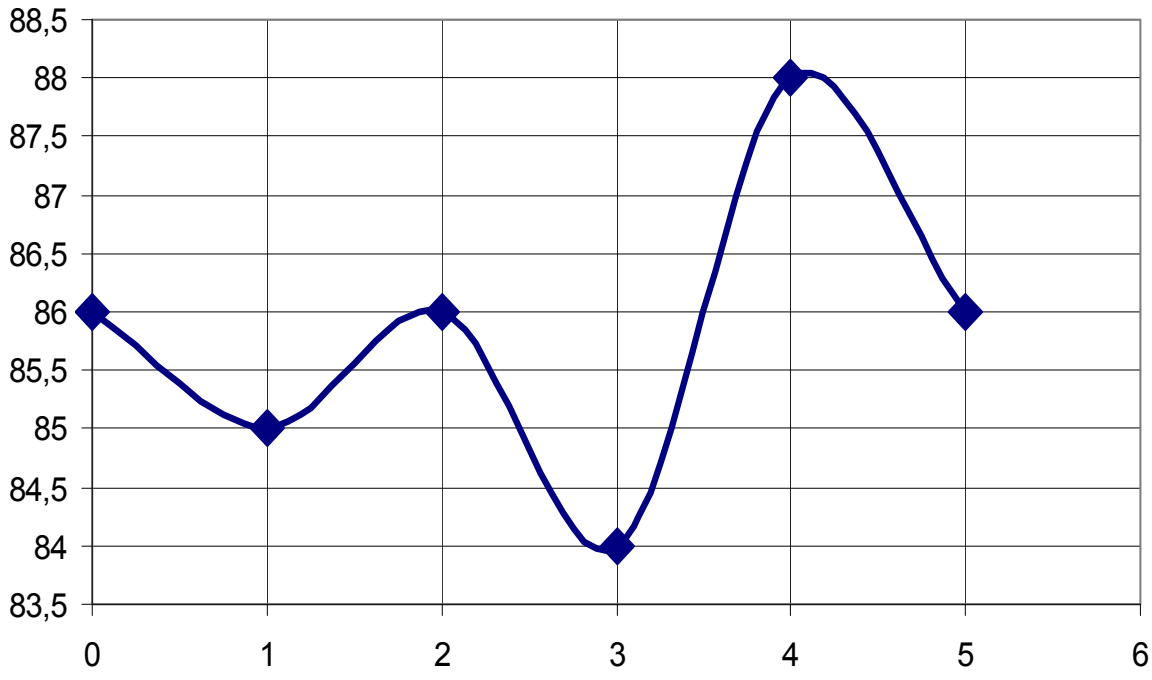
Локальная интерполяция

- Линейная интерполяция – соседние точки соединяются прямыми $\frac{y - y_{i-1}}{y_i - y_{i-1}} = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$



Локальная интерполяция

- Квадратичная (параболическая) интерполяция – по трем соседним точкам строится парабола $y = a_i x^2 + b_i x + c_i$



Глобальная интерполяция

- Для интерполяции чаще всего используются полиномы
  $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$
- Коэффициенты $a_0 \ldots a_n$ находят из системы уравнений
  $a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_nx_0^n = y_0$
  $a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_nx_1^n = y_1$
  …
  $a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_nx_n^n = y_n$
- Способ неэффективен при больших n из-за большого объема вычислений a_i

Полиномы Лагранжа

- Интерполяционный полином ищут в виде суммы полиномов степени n

$$L(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \ldots + y_n l_n(x)$$

- При этом каждый полином l_i равен нулю во всех узлах, кроме i-го. В нем он равен 1
- Этим условиям удовлетворяют такие полиномы:

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)},$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)},$$

$$\ldots$$

$$l_n(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})}$$

Полиномы Лагранжа

- Тогда интерполяционный полином Лагранжа выглядит

$$L(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}y_i$$

- При линейной (n = 1) и квадратичной (n = 2) интерполяциях полиномы равны:

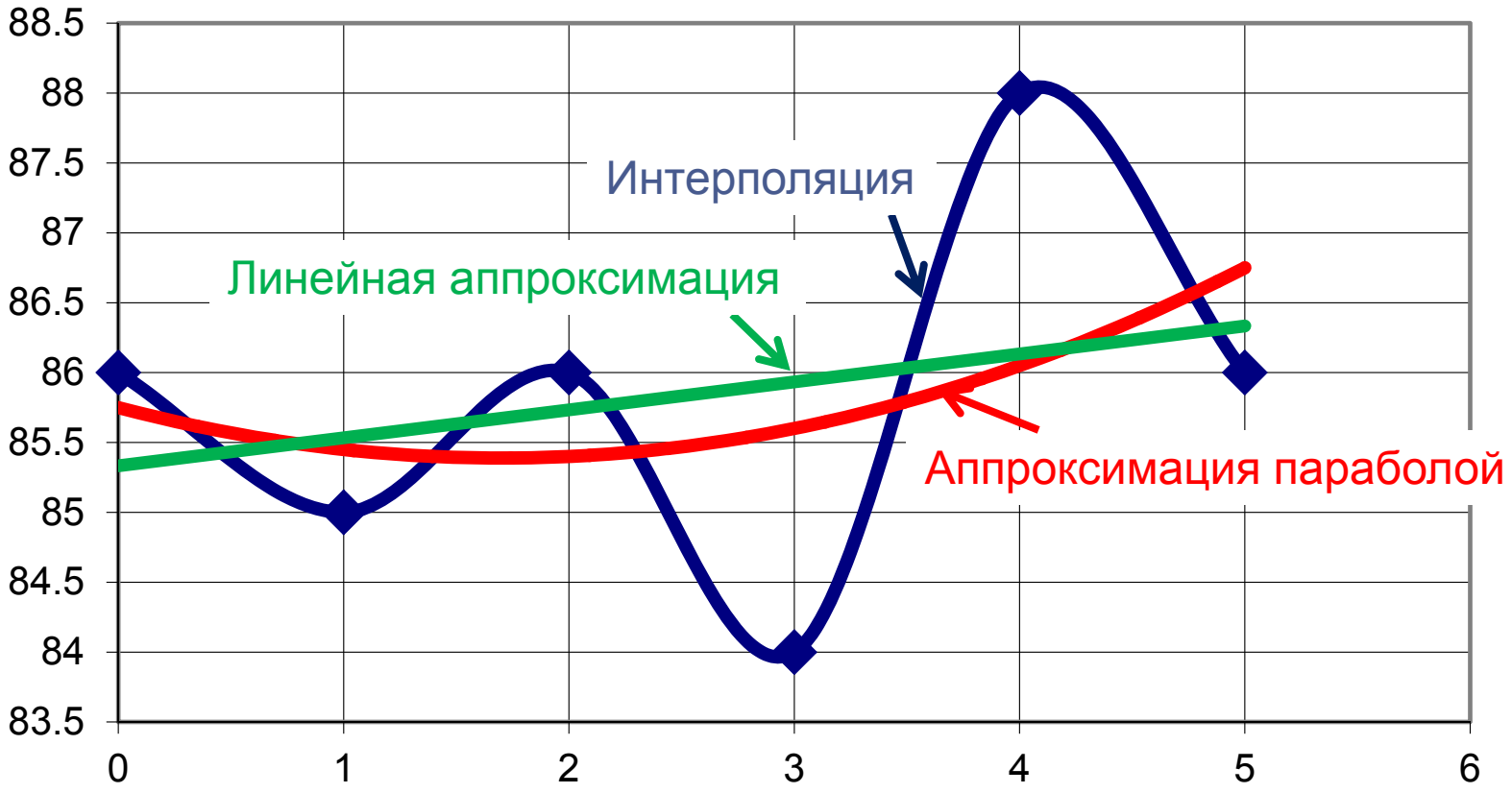
$$L(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1,\qquad n=1;$$

$$L(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2,\qquad n=2$$

Интерполяция и аппроксимация

- Зачастую бывает невыгодно требование интерполяции о совпадении аппроксимирующей функции с табличной. Особенно это справедливо в случае, когда значения табличной функции известны неточно (например, получены в ходе эксперимента). Совпадение значений в этом случае означает тщательное повторение ошибок эксперимента или погрешностей дискретизации
- **Выход –** аппроксимация приближенной функцией, проходящей близко от табличных значений.
- Вид функции выбирается из физических соображений – прямая, парабола, экспонента, синус и т.д.
- Для выбранной функции определяются параметры, дающие наилучшее приближение

Интерполяция и аппроксимация



Критерии аппроксимации

1. **Метод наименьших квадратов**
   Мерой близости аппроксимирующей функции f(x) к табличной является величина

$$S = \sum_{i=0}^{n} \left[f(x_i) - y_i \right]^2$$

Наилучшее приближение – при минимуме S

2. **Равномерное приближение**
   Более жесткое требование близости аппроксимирующей функции к табличной:
   во всех точках отклонение аппроксимирующей функции f(x) от табличной должно быть меньше заданной величины

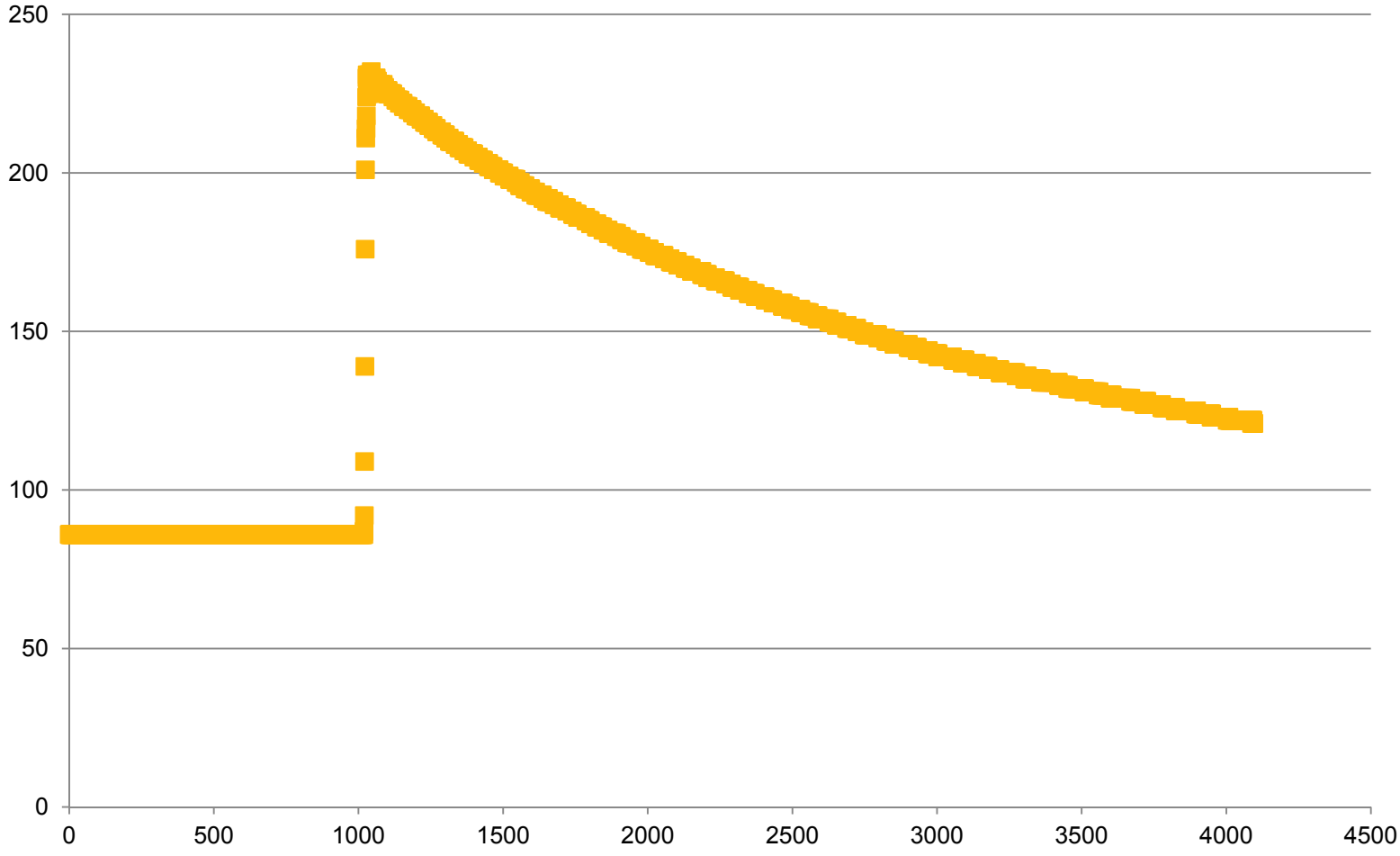
$$\left| f(x_i) - y_i \right| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

Локальное сглаживание

- Во многих случаях для устранения случайных ошибок эксперимента или погрешностей дискретизации целесообразно провести **сглаживание** табличной функции – замену табличных значений новыми, полученными по соседним точкам методом наименьших квадратов.
- Табличную функцию при этом аппроксимируют полиномом невысокой степени – вычислений немного
- Значение полинома в точке сглаживания считают сглаженным значением

1. При аппроксимации прямой (полином первой степени) сглаживание по 3-м точкам: $\bar{y}_i = \frac{1}{3}\left(y_{i-1} + y_i + y_{i+1}\right)$
2. Полином 3-й степени, по 5-ти точкам:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{35}\left(-3y_{i-2} + 12y_{i-1} + 17y_i + 12y_{i+1} - 3y_{i+2}\right)$$

- Сглаживание устраняет высокочастотные колебания и погрешности дискретизации

Локальное сглаживание