



Погрешности



Источники погрешности

1. Математическая модель
2. Исходные данные
3. Приближенный метод
4. Погрешности вычислений



1. Погрешность мат. модели

- Математические формулировки редко точно отражают реальные явления, обычно они дают лишь более или менее идеализированные модели. Как правило, при изучении тех или иных явлений мы вынуждены допустить некоторые упрощения, что и вызывает появление погрешностей решения



2. Погрешности исходных данных

- Вызваны наличием в математических формулах числовых параметров, значения которых могут быть определены лишь приближенно. Это, например, все физические константы или экспериментальные результаты, используемые в модели

3. Погрешности метода

- Поскольку аналитически решить задачу невозможно, ее приходится заменять некоторой приближенной задачей, дающей близкие результаты. Например, интеграл заменяют суммой, производную – разностью, функцию – многочленом и т.д. Еще один источник – применение бесконечных итерационных процессов, принудительно прерываемых (например, $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \dots$)

4. Погрешности вычислений

- При вычислениях на ЭВМ неизбежны погрешности, связанные с ограниченностью разрядной сетки машины – погрешности округлений ($\delta_{\max} = 0.5\alpha^{1-k}$, α – основание системы счисления, k – количество разрядов для хранения числа) и с переводом чисел из одной системы счисления в другую

Числа с плавающей точкой

- Современные компьютеры позволяют обрабатывать целые числа и числа с плавающей точкой.
- Множество целых чисел бесконечно, но из-за ограниченной разрядной сетки мы можем оперировать только с конечным подмножеством. При 4-х байтах на число диапазон доступных чисел составляет ~ от $-2 \cdot 10^9$ до $2 \cdot 10^9$

Числа с плавающей точкой

- При решении научно-технических задач в основном используются вещественные числа. Пример: 273.9

$$2739 \cdot 10^{-1}$$

$$2.739 \cdot 10^2$$

$$0.2739 \cdot 10^3$$

- Последняя запись – *нормализованная форма* числа с плавающей точкой.

Общий вид:

$$D = \pm m \cdot 10^n, m = 0.d_1d_2 \dots d_k, d_1 \neq 0$$

- m – мантисса, n – порядок числа

Понятие погрешности

- *Абсолютная погрешность* – разность между истинным значением числа и приближенным. Если a – приближенное значение x :
$$\Delta x = |a - x|$$
- *Относительная погрешность* – отношение абсолютной погрешности к приближенному значению
$$\delta x = \Delta x/a \text{ или } \delta x = \Delta x/a \cdot 100\%$$

Действия над приближенными числами

1. При сложении и вычитании чисел их абсолютные погрешности складываются:
$$\Delta(a \pm b) = \Delta a + \Delta b$$
2. При умножении и делении чисел их относительные погрешности складываются:
$$\delta(a \cdot b) = \delta a + \delta b$$
$$\delta(a / b) = \delta a + \delta b$$
3. При возведении числа в степень его относительная погрешность умножается на показатель степени
$$\delta(a^k) = k\delta a$$

Пример

$$a = 2520, b = 2518, a - b = 2$$

$$\Delta a = \Delta b = 0.5$$

$$\delta a = 0.5/2520 \approx 0.0002 \text{ (0.02\%)}$$

$$\delta b = 0.5/2518 \approx 0.0002 \text{ (0.02\%)}$$

Относительная погрешность
разности

$$\delta(a - b) = (0.5 + 0.5)/2 = 0.5 \text{ (50\%)}$$

Предельная погрешность

- Очень часто истинное значение x неизвестно и приведенные выражения невозможно использовать. В этом случае используют верхнюю оценку модуля абсолютной погрешности, называемую *предельной погрешностью* Δa :
$$\Delta x \leq \Delta a$$
- В дальнейшем Δa принимается в качестве абсолютной погрешности

Правила округления

Округление до n значащих цифр – отбрасывание всех цифр справа от n -й

1. Если первая из отброшенных цифр меньше 5, то оставшиеся цифры остаются без изменения ($8,3 \approx 8$)
2. Если первая из отброшенных цифр больше 5, то к последней оставшейся цифре добавляется 1 ($8,6 \approx 9$)

Правила округления

3. Если первая из отброшенных цифр равна 5 и среди остальных отброшенных имеются ненулевые, то к последней оставшейся цифре добавляется 1 ($8,501 \approx 9$)
4. Если первая из отброшенных цифр равна 5 и все остальные – нули, то последняя оставшаяся остается неизменной, если она четная, и увеличивается, если нечетная ($8,5 \approx 8$ и $7,5 \approx 8$)



Погрешность округления

- При применении правил округления погрешность не превосходит половины десятичного разряда последней оставленной цифры



Уменьшение погрешностей

- Избегать вычитания близких по значению чисел
- Применять правильный порядок вычислений
- Правильно использовать ряды для вычисления функций

Порядок вычислений

$$S = 0.2764 + 0.3944 + 1.475 + 26.46 + 1364 = 1393$$

Компьютер округляет после каждого сложения, поэтому законы коммутативности выполняются не всегда. При обратном порядке сложения получим

$$S = 1364 + 26.46 + 1.475 + 0.3944 + 0.2764 = 1391$$

Использование рядов

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\sin \pi/6 (30^\circ) = 0.5236 - 0.2392 \cdot 10^{-1} + 0.3279 \cdot 10^{-3} = 0.5$$

$$\sin 13\pi/6 (360^\circ + 30^\circ) = \sin 6.807 \approx 0.5167$$

$$\sin 49\pi/6 (4 \times 360^\circ + 30^\circ) = \sin 25.6563 \approx 129$$