Комплексные числа и действия над ними

Лекция 1

Л. И. Лазарева, И. А. Цехановский

Курс: Ряды и комплексный анализ
Семестр 3, 2009 год
portal.tpu.ru

♦ *Комплексным числом* z называется упорядоченная пара действительных чисел $z = (x, y)$ с определенными ниже операциями над ними. Первое число пары x называется *действительной частью комплексного числа* z и обозначается $x = \mathrm{Re}\ z$; второе число пары y называется *мнимой частью числа* z и обозначается $y = \mathrm{Im}\ z$.

♢ Два комплексных числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части.

Множеству комплексных чисел z можно взаимно однозначно сопоставить точки плоскости (xOy) с декартовыми координатами x, y. Такую плоскость в дальнейшем будем называть *комплексной плоскостью*, ось абсцисс – *действительной*, а ось ординат – *мнимой* осью комплексной плоскости.

В свою очередь, каждой точке (x, y) соответствует вполне определенный вектор – радиус-вектор этой точки, а каждому радиус-вектору, лежащему в плоскости, – вполне определенная точка – его конец. Поэтому будем в дальнейшем комплексные числа представлять также в виде векторов на плоскости (рис. 1).

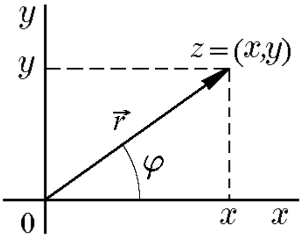

Рис. 1

Геометрическое представление комплексных чисел показывает, что при сравнении двух комплексных чисел z_1 и z_2 понятия «больше» и «меньше» теряют смысл, и наглядно иллюстрирует, что равенство двух комплексных чисел $z_1 = z_2$ всегда подразумевает два равенства действительных чисел: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

♦ Суммой комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называется комплексное число

$$z = (x_1 + x_2, y_1 + y_2). \qquad (1)$$

Данное определение сводит операции сложения комплексных чисел к операции сложения двух действительных чисел. Из определения вытекают следующие законы сложения:
а) коммутативность $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$,
б) ассоциативность $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.
♢ Сложение допускает обратную операцию: для двух комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ можно найти такое число z, что $z_2 + z = z_1$. Такое число z называется разностью чисел z_1 и z_2 и обозначается символом $z = z_1 - z_2$. Очевидно, что

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2). \qquad (2)$$

Можно показать, что существует единственное комплексное число $0 = (0, 0)$ такое, что для любого комплексного числа z выполняется $z + 0 = z$.

Геометрический смысл операций сложения и вычитания комплексных чисел совершенно ясен: сумма и разность комплексных чисел z_1 и z_2 изображаются, соответственно, векторами, направленными по диагоналям параллелограмма, построенного на векторах z_1 и z_2 (рис. 2).

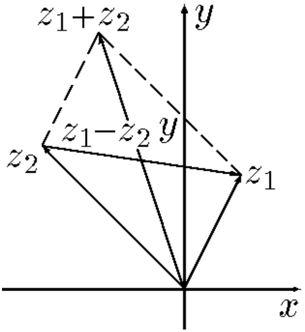

Рис. 2

♦ Произведением комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называется комплексное число $z = z_1 \cdot z_2 = z_1 z_2 = (x, y)$ такое, что

$$x = x_1 x_2 - y_1 y_2, \qquad y = y_1 x_2 + y_2 x_1. \tag{3}$$

Из определения вытекают следующие законы умножения:
а) коммутативность $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;
б) ассоциативность $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$;
в) дистрибутивность $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$.
Любое действительное число x можно считать комплексным числом $(x, 0)$. Точнее, подмножество комплексных чисел вида $(x, 0)$ взаимно однозначно соответствует множеству вещественных чисел (с сохранением арифметических операций). В дальнейшем будем отождествлять эти числа и записывать $x = (x, 0)$.

Умножение на действительную единицу $1 = (1, 0)$ не меняет комплексного числа $1 \cdot z = z$.
Комплексное число вида $z = (0, 1)$ называется мнимой единицей и будет обозначаться символом $i = (0, 1)$. Несложно убедиться, что $i \cdot i = i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$.
Комплексное число вида $z = (0, y)$ называется чисто мнимым числом. Легко установить, что чисто мнимое число $(0, y)$ можно рассматривать как произведение мнимой единицы $i = (0, 1)$ и действительного числа $y = (y, 0)$, т.е. $(0, y) = iy$.
Мнимая единица позволяет придать прямой алгебраический смысл так называемой алгебраической форме записи комплексных чисел. Действительно,

$$z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + iy. \tag{4}$$

В результате операции сложения и умножения комплексных чисел можно проводить по правилам алгебры многочленов, не обращаясь каждый раз непосредственно к определениям (1) и (3).

Для удобства работы с комплексными числами введем операцию комплексного сопряжения.

♦ Комплексное число w называется комплексно сопряженным числу $z = x + iy$, если $w = x - iy$, и обозначается $w = z^*$.

◊ В литературе для обозначения комплексно сопряженного числа иногда используется символ $\bar{z} = x - iy$.

Геометрически точки z и z^* симметричны относительно вещественной оси (см. рис. 3), причем $zz^* = x^2 + y^2$. Соотношение $z = z^*$ равносильно тому, что z – вещественное число.

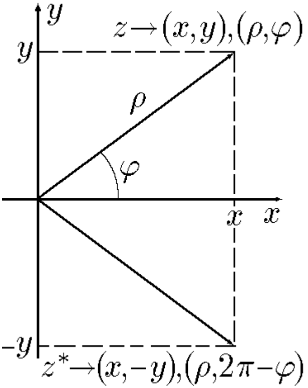

Рис. 3

Умножение также допускает обратную операцию. Пусть $z_2 \neq 0$, тогда можно найти такое число z, что

$$z_2 \cdot z = z_1. \tag{5}$$

Для этого, согласно (3), нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_2 x - y_2 y = x_1, \\ x_2 y + y_2 x = y_1. \end{cases} \tag{6}$$

♦ Число z (5) называется частным двух чисел z_1 и z_2 и обозначается $z = z_1/z_2$. Из системы (6) при условии $z_2 \neq 0$ получим

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \tag{7}$$

♢ Без труда можно установить, что операция комплексного сопряжения удовлетворяет следующим свойствам:

$$(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*, \qquad (z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*, \qquad \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}.$$

Наряду с алгебраической формой комплексных чисел (4) удобно использовать и так называемую тригонометрическую форму. Для этого напомним, что точку на плоскости можно задавать не только декартовыми, но и полярными координатами (ρ, φ) (см. рис. 1). Причем $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Подставив x, y в (2), получим

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{8}$$

Такая форма записи называется тригонометрической. Показательная форма записи комплексных чисел будет введена позднее.

♦ Число ρ в (8) называют модулем, а φ – аргументом комплексного числа z и обозначают

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{zz^*} \geq 0, \qquad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Модуль комплексного числа z равен нулю тогда и только тогда, когда $z = 0$.

Непосредственно из рис. 2 видно, что для модуля комплексного числа z справедливы неравенства

$$|x| = |\mathrm{Re}\, z| \leq |z|, \qquad |y| = |\mathrm{Im}\, z| \leq |z|.$$

Поскольку длина стороны треугольника не больше суммы длин двух других его сторон и не меньше абсолютной величины их разности, то из рис. ?? с очевидностью следует неравенство

$$\big|\, |z_1| - |z_2| \,\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \tag{9}$$

Величина $\mathrm{Arg}\, z$ неоднозначна и определяется с точностью до любого слагаемого, кратного 2π. Наряду с символом $\mathrm{Arg}\, z$, обозначающим всю совокупность значений аргумента, будем употреблять символ $\arg z$, называемый главным значением аргумента и обозначающий одно какое-либо значение $\mathrm{Arg}\, z$, т.е. $\alpha \leq \arg z < \alpha + 2\pi$, $\alpha = \mathrm{const}$. Величину $\arg z$, если не оговорено особо, будем рассматривать в пределах $0 \leq \arg z < 2\pi$, когда $\alpha = 0$ (или $-\pi \leq \arg z < \pi$, когда $\alpha = -\pi$).

Тогда $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$, где k – любое целое число, а из рис. 1 следует, что

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \varphi_0 & x > 0,\ \ y > 0 \\ \pi - \varphi_0 & x < 0,\ \ y > 0 \\ \pi + \varphi_0 & x < 0,\ \ y < 0 \\ 2\pi - \varphi_0 & x > 0,\ \ y < 0 \end{cases}, \quad \varphi_0 = \arccos\frac{|x|}{\rho}, \qquad (10)$$

причем для всех действительных положительных чисел $\varphi = 0$, а для отрицательных $\varphi = \pi$. Соответственно, для чисто мнимых чисел, лежащих в верхней полуплоскости $(y > 0)$, $\varphi = \pi/2$, а для лежащих в нижней полуплоскости $(y < 0)$ $\varphi = 3\pi/2$.

Введение полярных координат и тригонометрической формы комплексных чисел (8) позволяет записать некоторые операции с комплексными числами в более удобной форме. Пусть $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда равенство двух комплексных чисел $z_1 = z_2$ эквивалентно условиям $\rho_1 = \rho_2$, $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$, $k = \overline{-\infty, \infty}$. Из соотношений (3) и (7) с учётом тригонометрических формул $\cos(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 \mp \sin\varphi_1\sin\varphi_2$ и $\sin(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \sin\varphi_1\cos\varphi_2 \pm \sin\varphi_2\cos\varphi_1$ непосредственно следуют формулы умножения и деления комплексных чисел

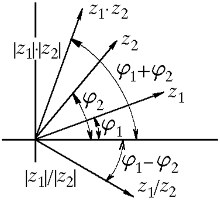

Рис. 4

$$
\begin{aligned}
z &= z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)],\\
z &= \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Таким образом, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются, а при делении их модули делятся, а аргументы вычитаются (см. рис. 4).

♦ Произведение n равных комплексных чисел z называется n-ой степенью числа z и обозначается z^n.
Аналогично вводится понятие возведения в целую отрицательную степень

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{|z|^{2n}}(z^*)^n.$$

Операцию возведения в целую положительную степень с помощью (11) и метода математической индукции можно определить формулой

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \qquad (12)$$

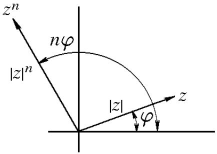

Рис. 5

которая называется формулой Муавра и остается справедливой и для отрицательных целых n. Геометрический смысл формулы Муавра иллюстрирует рис. 5.
◊ Из формулы Муавра (12), в частности, следует, что

$$(z^*)^n = (z^n)^* \qquad \text{и} \qquad |z^n| = |z|^n. \qquad (13)$$

♦ Комплексное число w называется корнем n-й степени из комплексного числа z, если $z = w^n$, и обозначается $w = \sqrt[n]{z} = z^{1/n}$.
Если обозначить $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, то, согласно операции возведения в степень, имеем

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \quad \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k = \overline{-\infty, \infty}.$$

Следовательно,

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right). \qquad (14)$$

Первое соотношение показывает, что модули всех корней одинаковы, второе – что их аргументы различаются на значение, кратное $2\pi/n$. Функции $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ имеют период 2π. Поэтому, хотя формула (14) справедлива для всех целых k, она определяет различные значения корня n-й степени из z лишь для $k = \overline{0, n-1}$. Отсюда следует, что корень n-й степени из любого комплексного числа $z \neq 0$ имеет n различных значений и что эти значения располагаются в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ (см. рис. 6, где $n = 3$).

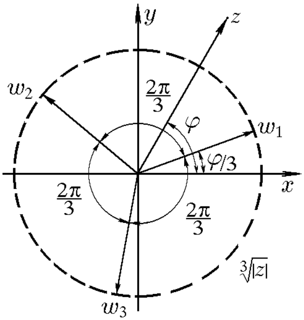

Рис. 6