§ Ортогональные системы вещественных функций

Определение ортогональных функций	Две интегрируемые функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ называются **ортогональными** на промежутке $[a,b]$, если $\int_a^b f_1(x) f_2(x)dx = 0$.

Определение ортогональной системы вещественных функций	Система функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ называется ортогональной на $[a,b]$, если эти функции попарно ортогональны на $[a,b]$, то есть $\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0$, если $i \neq j$, $\int_a^b \varphi_i{}^2(x)dx > 0$.

§ Ряд Фурье по ортогональной системе вещественных функций

Определение ряда по ортогональной системе функций	Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – ортогональная система вещественных функций на $[a,b]$. Рядом по ортогональной системе вещественных функций называется ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$, где c_n – вещественные коэффициенты.

Теорема о коэффициентах ряда Фурье	Пусть ряд по ортогональной системе вещественных функций равномерно сходится на $[a,b]$ к функции $f(x)$. Тогда коэффициенты этого ряда c_n имеют вид $c_n = \dfrac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x)dx}$ и называются коэффициентами Фурье.

§ Тригонометрический ряд Фурье

Определение тригонометрического ряда Фурье	Тригонометрическим рядом Фурье называется ряд $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{\ell} + b_n \sin\frac{\pi n x}{\ell}$, *где коэффициенты Фурье вычисляются по* $a_n = \frac{1}{\ell}\int_a^{a+2\ell} f(x)\cos\frac{\pi n x}{\ell}dx$, $(T = 2\ell - $ *период функ* $b_n = \frac{1}{\ell}\int_a^{a+2\ell} f(x)\sin\frac{\pi n x}{\ell}dx.$

Теорема Дирихле (достаточные условия представления функции в виде суммы её ряда Фурье)	Пусть функция $f(x)$ 1. периодическая, с периодом $T=2\ell$; 2. кусочно-непрерывная на любом конечном промежутке $[x_1, x_2]$ и может иметь разрывы только I рода; 3. кусочно-монотонная. Тогда ряд Фурье, составленный для этой функции, сходится к функции $f(x)$ в каждой точке непрерывности и к среднему арифметическому односторонних пределов в точках разрыва первого рода: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x) = \begin{cases} f(x) - \text{в точках непрерывности}, \\ \dfrac{f(x-x_0)+f(x+x_0)}{2} \end{cases}$ (x_0 - точки разрыва I-го рода).

§ Ряд Фурье для чётной и нечётной функции, для функций, заданных на интервале $[0, l]$ и непериодических функций

Лемма 1	Если $f(x)$ – чётная функция на промежутке $[-a, a]$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$.

Лемма 2	Если $f(x)$ – нечётная функция на промежутке $[-a, a]$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Пример. Разложение функций в ряд Фурье.

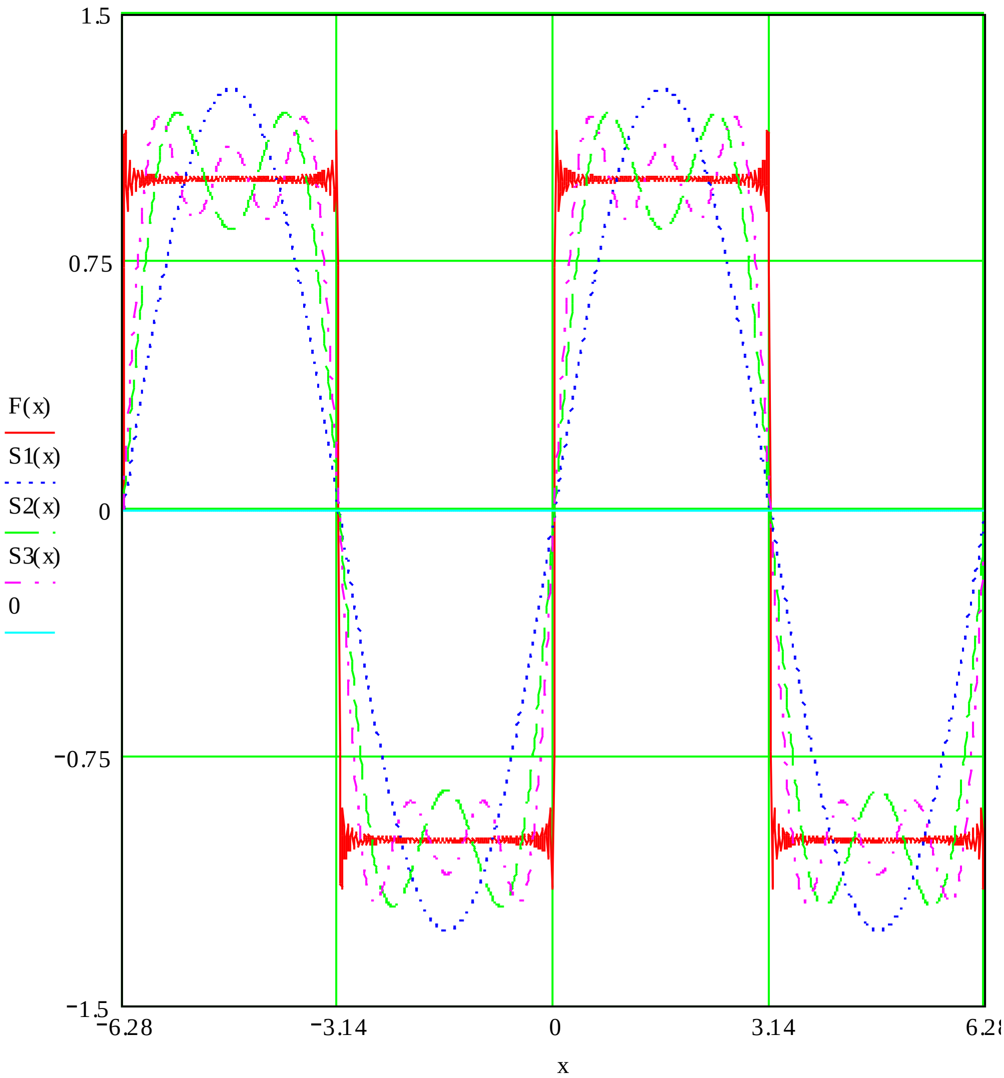
$$f(x) := \mathrm{if}(x < 0, -1, 0) + \mathrm{if}(x \ge 0, 1, 0)$$

$$L := \pi \qquad N := 10(\qquad n := 0..N$$

$$a_0 := \frac{1}{L}\cdot\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \qquad a_n := \frac{1}{L}\cdot\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{L}\right)dx \qquad b_n := \frac{1}{L}\cdot\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{L}\right)dx$$

$$F(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{N} b_n\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{L}\right)$$

$$S1(x) := \frac{4\cdot\sin(x)}{\pi} \qquad S2(x) := S1(x) + \frac{4\cdot\sin(3\cdot x)}{3\cdot\pi} \qquad S3(x) := S2(x) + \frac{4\cdot\sin(5\cdot x)}{\pi\cdot 5}$$



Разложение функций в ряд Фурье в интервале $[0, l]$	Функцию, заданную на интервале $[0, l]$ доопределяют на интервал $[-l, 0]$ чётным образом, если $f(0) \neq 0$ и нечётным образом, если $f(0) = 0$. Вне интервала $[-l, l]$ продолжают периодическим образом. Проверяют выполнение условий Дирихле для полученной функции, вычисляют коэффициенты Фурье по соответствующим формулам и записывают ряд Фурье.

Разложение функций в ряд Фурье непериодических функций	Функцию, заданную на интервале $[a, a+2l]$, вне интервала $[a, a+2l]$ продолжают периодическим образом. Проверяют выполнение условий Дирихле для полученной функции, вычисляют коэффициенты Фурье по соответствующим формулам и записывают ряд Фурье.