ЗАДАНИЕ N 11 Вариант 1

Кратные интегралы

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\ dx\,dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

$$1)\ \ x^2 = y+2, \qquad x^2+y=0.$$
$$2)\ \ y = x^{2/3}, \quad y = 1-\sqrt{4x-x^2-3}, \quad y=0.$$

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$J = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)\ dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\ dy.$$

3. Перейти к полярным координатам и вычислить

$$\iint\limits_{(D)} (x^2+y^2)\ dx\,dy, \qquad D:\{(x^2+y^2)^2 \le (x^2-y^2)\}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ \ y=\cos x;\quad y=\sin x;\quad (x\ge 0).$$
$$2)\ \ x^2+y^2=1;\quad x+y=1;\quad (x>0;\ \ y>0).$$

5. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$

$$1)\ \ D:\ \{y\ge -x;\ \ y\ge x,\ \ 0\le y\le 1\}, \qquad \delta(x;y)=\sqrt{1-y}.$$
$$2)\ \ D:\ \{x^2+y^2\le 9,\ \ -x\le y\le x\}, \qquad \delta(x;y)=x\,y^2.$$

6. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\ dx\,dy\,dz$

в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

$$1)\ \ x=2,\quad y=4x,\quad y=3\sqrt{x},\quad z=4,\quad z\ge 0.$$
$$2)\ \ z=2(x^2+y^2),\quad z=4-2(x^2+y^2).$$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$1)\ \ z=4-x^2,\quad y=5,\quad y=0,\quad z=0.$$
$$2)\ \ z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},\quad y=x/\sqrt{3},\quad y=x,\quad z=0,\quad (x>0,\quad y>0).$$

8. Вычислить массу тела, занимающего область

$$V:\ \{2\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2,\quad -y\le x\le y\},$$

если задана объемная плотность $\gamma(x;y;z)=y\sqrt{x^2+y^2}$.

Кратные интегралы

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\,dx\,dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

$$1)\ \ xy = 1,\quad x^2 = y,\ \ y = 2,\ \ x = 0,\ \ (x > 0).$$
$$2)\ \ x^2 + y^2 = 4,\quad y^2 = 3x,\ \ y = 0,\ \ (x > 0,\ \ y > 0).$$

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$J = \int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

3. Перейти к полярным координатам и вычислить

$$\iint\limits_{(D)} x\sqrt{(x^2+y^2)^3}\,dx\,dy,\qquad D:\{x^2+y^2 \le 2x,\ \ 0 \le y \le x\}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ y = x;\ \ x^2 = 2 - y.$$
$$2)\ x + y = 1;\quad x + 2y + 2 = 0;\ \ x = 0.$$

5. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$

$$1)\ \ D:\ \{0 \le x \le y,\ \ 0 \le y \le 1\},\ \ \delta(x;y) = x^2 + 2y^2.$$
$$2)\ \ D:\ \{x^2 + y^2 \le 4,\quad x \ge 0,\ \ y \ge 0\},\quad \delta(x;y) = x^3.$$

6. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$

в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

$$1)\ \ z = 4 - y^2,\quad z = 2 + y^2,\ \ x = -1,\ \ x = 2.$$
$$2)\ \ z = 4 - x^2 - y^2,\ \ z = 3.$$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$1)\ \ y = 3x,\ \ z = 2(x^2 + y^2),\ \ x = 1,\ \ z \ge 0,\ \ y \ge 0.$$
$$2)\ \ x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ \ x^2 + y^2 = 4,\ \ y \ge 0.$$

8. Вычислить массу тела, занимающего область

$$V:\ \{1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\ \ y \ge 0\},$$

если задана объемная плотность $\gamma(x;y;z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$.

Кратные интегралы

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\,dx\,dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

1) $x = y^2, \quad y^2 = 4 - x.$
2) $x + y = 1; \quad x + 2y + 2 = 0; \quad x = 0.$

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$J = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^2} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)\,dx.$$

3. Перейти к полярным координатам и вычислить

$$\iint\limits_{(D)} \sqrt{(x^2+y^2)^5}\,dx\,dy, \qquad D: \{x^2 + y^2 \le 10x, \quad y \ge 0\}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

1) $y = 2^x; \quad y = 2x - x^2; \quad x = 0, \quad x = 2.$
2) $y^2 = 2x; \quad x - y = 4.$

5. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$

1) $D: \{6 - x \le y \le 2x, \quad x = 4\}, \quad \delta(x;y) = x^2.$
2) $D: \{x^2 + y^2 \le 4, \quad \frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le x\}, \ \delta(x;y) = 2y.$

6. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$
в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

1) $z = \sqrt{y}, \quad z = 0, \quad x = 1, \quad y = 4x.$
2) $z^2 = 36(x^2 + y^2), \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x = 0, \quad z = 0, \quad (x > 0, \quad z > 0).$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

1) $y^2 + z^2 = 4x, \quad x = 4.$
2) $x^2 + y^2 + z^2 = 2R^2, \quad x^2 + y^2 = Rz, \quad z > 0.$

8. Вычислить массу тела, занимающего область

$$V: \{25 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 81, \quad x \ge 0, \ z \ge 0, \quad -x \le y \le x\},$$

если задана объемная плотность $\gamma(x;y;z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$

Кратные интегралы

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\,dx\,dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

$$1)\ \ y = x^2, \quad x+y=1, \quad x=1, \quad x=3.$$
$$2)\ \ x^2+y^2=1, \quad x+y=1, \quad y=0, \quad (y>0).$$

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$J = \int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)\,dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)\,dy.$$

3. Перейти к полярным координатам и вычислить

$$\iint\limits_{(D)} \cos\sqrt{(x^2+y^2)}\,dx\,dy, \qquad D:\{\pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2, \ \ x \le y \le \sqrt{3}x\}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ \ 3x-2y+4=0, \quad 3x-2y+1=0; \quad y=2; \quad y=5.$$
$$2)\ \ x+y+2=0; \qquad y=x^3; \qquad x=0.$$

5. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$

$$1)\ \ D:\ \{0 \le y \le 1-x, \ \ 0 \le x \le 1\}, \quad \delta(x;y)=y^2.$$
$$2)\ \ D:\ \{x \le x^2+y^2 \le 2x\}, \qquad \delta(x;y)=1+y+x.$$

6. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$

в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

$$1)\ \ x+z=2, \quad x^2+y^2=2x, \quad z=0, \quad (z>0).$$
$$2)\ \ y=2, \quad y=2x, \quad x=0, \quad z=2\sqrt{x}, \qquad z \ge 0.$$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$1)\ \ z=\sqrt{1-x^2-y^2}, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad x \ge 0.$$
$$2)\ \ x^2+y^2+1=z, \quad x+y=3, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

8. Вычислить массу тела, занимающего область

$$V:\ \{x^2+z^2 \le y \le 4, \ \ x \ge 0, \ z \ge 0\},$$

если задана объемная плотность $\gamma(x;y;z) = \dfrac{x}{x^2+z^2}$.

Кратные интегралы

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\;dx\,dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

$$1)\;\; x^2+y^2=2,\qquad x^2=y,\quad (y>0).$$
$$2)\;\; x+y=2,\quad y\le 1,\quad x=0,\quad y=0.$$

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$J=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_0^{2-y} f(x,y)\,dx.$$

3. Перейти к полярным координатам и вычислить

$$\iint\limits_{(D)} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx\,dy,\qquad D:\{x^2+y^2\le 1,\quad 0\le y\le x\}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\;\; x=5-y^2;\quad x=4-y.$$
$$2)\;\; y=\sin x;\quad y=\cos x;\quad y=0,\quad (0\le x\le \pi/2).$$

5. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$

$$1)\;\; D:\;\{3-x\le y\le 3+x,\quad 0\le x\le 3\}\quad \delta(x;y)=\sqrt{2x+3y}.$$
$$2)\;\; D:\;\{2-x\le y\le \sqrt{4-x^2}\},\qquad \delta(x;y)=(x^2+y^2).$$

6. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\;dx\,dy\,dz$

в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

$$1)\;\; x^2+y^2=16y,\quad z+y=16,\quad x\ge 0,\quad z\ge 0.$$
$$2)\;\; 4z=y^2,\quad 2x+y=2,\quad y=x,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0.$$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$1)\;\; x=0,\quad y=2x,\quad y=1,\quad x+y+z=3,\quad (z\ge 0).$$
$$2)\;\; x^2+y^2=z,\qquad z=h^2.$$

8. Вычислить массу тела, занимающего область

$$V:\;\{x^2+y^2+z^2\le 4,\qquad y\ge 0,\qquad z\ge 0\},$$

если задана объемная плотность $\gamma(x;y;z)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

Кратные интегралы

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\,dx\,dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

$$1)\ \ y = 2x, \quad y = 2x+3, \quad x = 1, \quad x = 2.$$
$$2)\ \ x = 27 - y^2, \quad x = -6y.$$

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$J = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x^2}^{1} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^e dx \int\limits_{\ln x}^{1} f(x,y)\,dy.$$

3. Перейти к полярным координатам и вычислить

$$\iint\limits_{(D)} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy, \qquad D: \{x^2+y^2 \le Ry\}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ \ y = \ln x; \quad y = 0; \quad x = 1, \quad x = e.$$
$$2)\ \ xy = 1; \qquad x + y = 5.$$

5. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$

$$1)\ \ D: \ \{2x \le y \le 2 - x, \quad x = 0\}, \quad \delta(x;y) = 2 - x + y.$$
$$2)\ \ D: \ \{x^2+y^2 \le 1, \quad y \ge 0\}, \qquad \delta(x;y) = x^2 + 3y.$$

6. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

$$1)\ \ z = x^2, \quad x + y = 2, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0.$$
$$2)\ \ z = \sqrt{x^2+y^2}, \quad z = 0, \quad x^2+y^2 = 2x.$$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$1)\ \ z = 3x^2+3y^2+1, \quad z = 5 - 3x^2 - 3y^2.$$
$$2)\ \ 2x + 3y = 12, \quad z = y^2/2, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0.$$

8. Вычислить массу тела, занимающего область

$$V: \ \{x/8 + y/3 + z/5 \le 1, \quad x \ge 0, \ y \ge 0, \quad z \ge 0\},$$

если задана объемная плотность $\gamma(x;y;z) = (1 + x/8 + y/3 + z/5)^{-6}$.

ЗАДАНИЕ N 11 Вариант 7

Кратные интегралы

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\ dx\,dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

$$1)\ \ x^2+y^2=1, \quad x+y=1, \ \ (x>0;\ \ y>0).$$
$$2)\ \ x^2-y^2=9, \ \ 5y=4x, \ \ y=0, \ \ (x>0;\ \ y>0).$$

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$J=\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y)\,dx+\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)\,dx.$$

3. Перейти к полярным координатам и вычислить

$$\iint\limits_{(D)} (2+x-y)\ dx\,dy, \qquad D:\{1\le x^2+y^2\le 16, \ \ x/\sqrt{3}\le y\le x\sqrt{3}\}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ \ 2y=\sqrt{x}; \ \ 2xy=1; \ \ x=16.$$
$$2)\ \ x=y^2; \quad x=3, \ \ y\le 0.$$

5. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$

$$1)\ \ D:\ \{x^2-1\le y\le 1-x\}, \quad \delta(x;y)=2x+5y+8.$$
$$2)\ \ D:\ \{x^2+y^2\le 4x,\ x^2+y^2\le 4y\}, \quad \delta(x;y)=xy.$$

6. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\ dx\,dy\,dz$

в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

$$1)\ \ z=x^2+y^2, \quad 5x+y=5, \ \ x=0, \ \ y=0, \ \ z=0.$$
$$2)\ \ x^2+y^2=2y, \ \ x^2+y^2=4y, \ \ z=0, \ \ z=2, \ \ x\ge 0.$$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$1)\ \ z=\sqrt{9-x^2-y^2}, \quad 9z=2x^2+2y^2, \ \ z>0.$$
$$2)\ \ y^2=2x, \quad z=2-x, \quad z=0.$$

8. Вычислить массу тела, занимающего область

$$V:\ \{\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{9-x^2-y^2}, \ \ x\ge 0\},$$

если задана объемная плотность $\gamma(x;y;z)=x$.

Кратные интегралы

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\,dx\,dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

$$1)\ \ x^2+y^2=9,\quad y^2-x^2=1,\quad x=0,\quad y=0;\quad (x>0;\ \ y>0).$$
$$2)\ \ y=\ln x,\quad y=0,\quad x=e.$$

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$J=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy+\int\limits_2^3 dx\int\limits_{x-4}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy.$$

3. Перейти к полярным координатам и вычислить

$$\iint\limits_{(D)} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy,\qquad D:\{x^2+y^2\le R^2,\ \ -x\le y\le x\}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ \ y=x^2;\ \ y=x.$$
$$2)\ \ y=3/x;\quad y=8e^x;\ \ y=3;\ \ y=8.$$

5. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$

$$1)\ \ D:\ \{-\sqrt{x}\le y\le x^2,\ \ 0\le x\le 1\},\qquad \delta(x;y)=4xy^2.$$
$$2)\ \ D:\ \{x^2+y^2\le 3x,\quad y\ge 0\},\qquad \delta(x;y)=(x^2+y^2)^3.$$

6. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

$$1)\ \ z=16-x^2-y^2,\quad y=2x,\quad x\ge 0,\quad z\ge 0.$$
$$2)\ \ 10x=z^2+y^2,\quad x=10.$$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$1)\ \ z=\sqrt{1-y},\ \ y=x^2,\quad z=0.$$
$$2)\ \ z=\sqrt{81-x^2-y^2},\ \ z=\sqrt{x^2+y^2},\ \ x\ge 0.$$

8. Вычислить массу тела, занимающего область

$$1)\ V:\ \{x^2+y^2\le 4y,\ \ 0\le z\le 4-y\},$$

если задана объемная плотность $\gamma(x;y;z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Кратные интегралы

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\;dx\,dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

$$\begin{array}{l} 1)\;\; x^2+y^2=1, \quad x^2=1-2y, \;\; x=0, \;\; (x>0, \quad y>0). \\ 2)\;\; x=4-y^2, \quad x-y+2=0 \end{array}$$

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$J=\int\limits_0^{1/2} dy \int\limits_{\sqrt{1-2y}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx+\int\limits_{1/2}^{1} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

3. Перейти к полярным координатам и вычислить

$$\iint\limits_{(D)} y\;dx\,dy, \qquad D:\{x^2+y^2\le ax, \;\; y\ge 0\}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{array}{l} 1)\;\; xy=4; \;\; x+y=5. \\ 2)\;\; y=x; \quad y=-x; \;\; y=1. \end{array}$$

5. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$

$$\begin{array}{l} 1)\;\; D:\;\{x\le y\le 3x, \;\; 0\le x\le 2\}, \quad \delta(x;y)=2x^2+y^2. \\ 2)\;\; D:\;\{4y\le x^2+y^2\le 6y\}, \quad \delta(x;y)=y/2. \end{array}$$

6. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\;dx\,dy\,dz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

$$\begin{array}{l} 1)\;\; 2y+z=2, \quad x^2=y, \quad y+z=1. \\ 2)\;\; z=4-x^2-y^2, \;\; x^2+y^2\le 1, \quad z\ge 0 \end{array}$$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$\begin{array}{l} 1)\;\; x^2+y^2+z^2=8, \;\; x^2=z^2+y^2, \;\; x\ge 0. \\ 2)\;\; x^2+y^2=2y, \;\; x^2+y^2=4y, \;\; z=x^2+y^2, \quad z\ge 0. \end{array}$$

8. Вычислить массу тела, занимающего область

$$V:\;\{x+y+z\le 4, \;\; x\ge 0,\; y\ge 0, \;\; z\ge 0\},$$

если задана объемная плотность $\gamma(x;y;z)=x$.

Кратные интегралы

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\,dx\,dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

1) $y = 11 - x^2, \quad y = -10x.$
2) $x^2 + y^2 = 25, \quad 3y = 4x, \quad y = 0, \quad (x > 0, \quad y > 0).$

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$J = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{-1}^{\ln y} f(x,y)\,dx.$$

3. Перейти к полярным координатам и вычислить

$$\iint\limits_{(D)} \sqrt{(x^2+y^2)^3}\,dx\,dy, \qquad D: \{x^2 + y^2 \le 6y\}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

1) $y + x - 4 = 0; \quad y - x + 4 = 0; \quad x = 0, \quad x = 1.$
2) $xy = 2; \quad y = 7e^x; \quad y = 2; \quad y = 7.$

5. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$

1) $D: \{x^2 \le y \le \sqrt{x}\}, \quad \delta(x;y) = 3x + 2y + 6.$
2) $D: \{1 \le x^2 + y^2 \le 36, \quad -\dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y \le x\}, \qquad \delta(x;y) = 6xy^2.$

6. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$

в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

1) $3x + 4y = 12, \quad z = 6 - x^2 - y^2, \quad x \ge 0, \; y \ge 0, \quad z \ge 0.$
2) $x^2 + y^2 + z^2 = 32, \quad y^2 = x^2 + z^2, \quad y \ge 0.$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

1) $4z = x^2 + y^2 + 8, \quad x^2 + y^2 = 4x, \quad z = 0.$
2) $x = 3, \quad y = 2x, \quad z = 4\sqrt{y}, \quad z \ge 0.$

8. Вычислить массу тела, занимающего область

$$V: \{3(x^2+y^2) \le z \le 3, \quad 0 \le y \le \sqrt{3}x\},$$

если задана объемная плотность $\gamma(x;y;z) = \dfrac{y^2 z}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$

Кратные интегралы

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\ dx\,dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

$$\begin{array}{ll} 1) & y=\sqrt{x}, \quad y=\sqrt{2-x}, \quad y=0. \\ 2) & x^2+y^2=72, \quad 6y=-x^2, \quad (y<0). \end{array}$$

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$J=\int\limits_0^{\pi/4} dy \int\limits_0^{\sin y} f(x,y)\,dx+\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int\limits_0^{\cos y} f(x,y)\,dx.$$

3. Перейти к полярным координатам и вычислить

$$\iint\limits_{(D)} \ln(x^2+y^2)\ dx\,dy, \qquad D:\{x^2+y^2\le 4, \quad x\le y\le 2x\}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{array}{ll} 1) & xy=1; \quad y=\sqrt{x}; \quad x=81. \\ 2) & x+y=4; \quad y=2; \quad y=0, \quad x=0, \quad (x>0; \quad y>0). \end{array}$$

5. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$

$$\begin{array}{ll} 1) & D:\ \{0\le y\le 6-2x, \quad 0\le x\le 3\}, \qquad \delta(x;y)=3-x+2y. \\ 2) & D:\ \{x\le x^2+y^2\le 4x\}, \qquad \delta(x;y)=y^2. \end{array}$$

6. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\ dx\,dy\,dz$

в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

$$\begin{array}{ll} 1) & x^2+y^2=1, \quad x+y+z=2, \quad z=0, \quad (z>0). \\ 2) & x^2+y^2=12-z, \quad x^2+y^2=z^2, \quad (z>0). \end{array}$$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$\begin{array}{ll} 1) & y=\sqrt{x}, \quad y=2\sqrt{x}, \quad x+y=6, \quad 0\le z\le 5. \\ 2) & z^2+y^2=8-x, \quad x=-1, \quad z\ge 0. \end{array}$$

8. Вычислить массу тела, занимающего область

$$V:\ \{0\le x\le a, \quad 0\le y\le b, \quad 0\le z\le c\},$$

если задана объемная плотность $\gamma(x;y;z)=x+y+z$.

ЗАДАНИЕ N 11 Вариант 12

Кратные интегралы

---

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\ dx\,dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

$$1)\ \ x^2/4+y^2=1, \quad y\ge 0,\ \ y\ge \frac{1}{2}x.$$
$$2)\ \ y^2=2x, \quad x-y=4.$$

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$J=\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-(x+2)}^{0} f(x,y)\,dy+\int\limits_{-1}^{0} dx\int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{0} f(x,y)\,dy.$$

3. Перейти к полярным координатам и вычислить

$$\iint\limits_{(D)} (2-x)\ dx\,dy, \qquad D:\{x\le x^2+y^2\le 4x\}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ \ y=\frac{8}{x^2+4};\ \ 4y=x^2.$$
$$2)\ \ y=4x+x^2,\ \ y=x+4.$$

5. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$

$$1)\ \ D:\ \{y^2\le x\le 1\},\ \ \delta(x;y)=4-y-x.$$
$$2)\ \ D:\ \{4\le x^2+y^2\le 9\},\qquad \delta(x;y)=5y-3x.$$

6. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\ dx\,dy\,dz$

в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

$$1)\ \ z=16-x^2-y^2,\quad x+y=4,\ \ x\ge 0,\ \ y\ge 0,\ \ z\ge 0.$$
$$2)\ \ x^2+y^2-z^2=-1,\ \ x^2+y^2=1.$$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$1)\ \ z=x^2+y^2,\ \ y=x^2,\ \ y=1,\ \ z=0.$$
$$2)\ \ x^2=2(z^2+y^2),\ \ x=4,\ \ y\ge 0.$$

8. Вычислить массу тела, занимающего область

$$V:\ \{1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ \ z\ge 0,\quad -x\le y\le \sqrt{3}x\},$$

при указанной объемной плотности $\gamma(x;y;z)=xz$.

Кратные интегралы

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\,dx\,dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

$$1)\ \ y=\sqrt[3]{x},\quad y=-x^3,\quad x=1.$$
$$2)\ \ x^2+y^2=4,\quad x^2+y^2+4y=0,\quad (\ y<0).$$

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$J=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{2x^2}^{3-x} f(x,y)\,dy.$$

3. Перейти к полярным координатам и вычислить

$$\iint\limits_{(D)} \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy,\qquad D:\{x^2+y^2\le 2ay\}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ \ x=8-y^2;\quad x=-2y.$$
$$2)\ \ 2x+y=2;\quad 4x+3y=0;\quad x=0.$$

5. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$

$$1)\ \ D:\ \{0\le y\le 1-x^2\},\quad \delta(x;y)=3-x-y.$$
$$2)\ \ D:\ \{2x\le x^2+y^2\le 4x\},\qquad \delta(x;y)=\sin\sqrt{x^2+y^2}.$$

6. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$

в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

$$1)\ \ y=x,\quad y=-2x,\quad y=1,\quad z=x^2+4y^2,\quad z\ge 0.$$
$$2)\ \ y^2=z^2+x^2,\quad x^2+z^2=1,\quad y\ge 0.$$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$1)\ \ z=y,\quad y=\sqrt{4-x},\quad y=\frac{x-1}{2},\quad z=0.$$
$$2)\ \ 16-x^2-y^2=4z,\quad x^2+y^2\le 4,\quad z\ge 0.$$

8. Вычислить массу тела, занимающего

$$V:\ \{4\le x^2+y^2+z^2\le 9,\quad x\ge 0,\ y\ge 0,\quad z\ge 0\},$$

если задана объемная плотность $\gamma(x;y;z)=xz$.

Кратные интегралы

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\ dx\,dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

$$1)\ \ y = x,\ \ y = 4x,\quad xy = 1,\ \ (x > 0;\ \ y > 0).$$
$$2)\ \ y = e^x,\quad y = e^{-x},\ \ y = 2.$$

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$J = \int\limits_0^4 dx \int\limits_{(3x)/4}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

3. Перейти к полярным координатам и вычислить

$$\iint\limits_{(D)} (x+y-1)\ dx\,dy,\qquad D: \{1 \le x^2+y^2 \le 4,\ \ 0 \le y \le x\}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ \ x+y-1=0;\qquad x-y-1=0;\qquad x-y+1=0,\qquad x+y+1=0.$$
$$2)\ \ x=y^2;\qquad x = 2+y^2/2.$$

5. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$

$$1)\ \ D:\ \{1+x^2 \le y \le 3-x,\ \ x \ge 0\},\qquad \delta(x;y) = 4x+5y+2.$$
$$2)\ \ D:\ \{1-\sqrt{1-y^2} \le x \le y\},\qquad \delta(x;y) = 3xy.$$

6. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\ dx\,dy\,dz$

в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

$$1)\ \ 1-y = x^2+z^2,\quad y=0,\ \ x \ge 0.$$
$$2)\ \ z = x,\ \ y^2 = x,\quad x = 3,\quad z \ge 0.$$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$1)\ \ x = \sqrt{y/2},\ \ x+y=3,\ \ z=2,\ \ z=0.$$
$$2)\ \ x^2+y^2+z^2=4,\ \ z=\sqrt{x^2+y^2},\ \ y \ge 0.$$

8. Вычислить массу тела, занимающего область

$$V:\ \{x^2+y^2=2x,\ \ z=3,\quad y\ge 0,\ \ z \ge 0\},$$

если задана объемная плотность $\gamma(x;y;z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Кратные интегралы

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\,dx\,dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

$$1)\ \ xy=1,\qquad y=\sqrt{x},,\quad x=3.$$
$$2)\ \ y^2-x^2=1,\qquad x^2+y^2=2y,\qquad (y>1).$$

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$J=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-\sqrt{x}}^{0} f(x,y)\,dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_{-\sqrt{2-x}}^{0} f(x,y)\,dy.$$

3. Перейти к полярным координатам и вычислить

$$\iint\limits_{(D)} y\cdot\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy,\qquad D:\{x^2+y^2\le 2x,\quad y\ge x\}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ \ y=x;\quad x^2=2-y.$$
$$2)\ \ y=e^{-x};\quad y=x^2;\quad x=-1;\quad x=0,\quad (x<0).$$

5. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$

$$1)\ \ D:\ \{x^2\le y\le 2\},\quad \delta(x;y)=2-y.$$
$$2)\ \ D:\ \{x^2+y^2\le R^2,\quad -x\le y\le x\sqrt{3}\},\qquad \delta(x;y)=3x^2+2.$$

6. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$

в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

$$1)\ \ z=x^2,\quad x+y=6,\quad y=2x,\qquad x\ge 0,\quad z\ge 0.$$
$$2)\ \ 6y=x^2+z^2,\quad y=6.$$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$1)\ \ 49(x^2+y^2)=4z^2,\quad 7(x^2+y^2)=2z,\quad x=0,\quad y=0,\qquad (x>0,\quad y>0).$$
$$2)\ \ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2},\quad 0\le y\le x.$$

8. Вычислить массу тела, занимающего область

$$V:\ \{x/2+y/4+z/6\le 1,\quad x\ge 0,\ y\ge 0,\quad z\ge 0\},$$

если задана объемная плотность $\gamma(x;y;z)=(1+x/2+y/4+z/6)^{-4}$.

Кратные интегралы

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\,dx\,dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

1) $x^2+y^2=5, \quad y=2x^2 \quad (y>2x^2).$
2) Треугольник $ABC \ : \ A(-2;-2), \quad B(-1;2), \quad C(-1;\ -3/2).$

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$J=\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^{2/3}} f(x,y)\,dy+\int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x,y)\,dy.$$

3. Перейти к полярным координатам и вычислить

$$\iint\limits_{(D)} \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy, \qquad D:\{4\le x^2+y^2\le 16, \quad x\ge 0, \quad y\ge 0\}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

1) $(x^2+y^2)^2=9(x^2-y^2); \qquad x\ge 0, \quad y\ge 0.$
2) $x^2=4y+1; \quad x^2=-2y+4.$

5. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$

1) $D:\ \{x\cdot y=8, \quad x+y=9\ \}, \quad \delta(x;y)=x+y.$
2) $D:\ \{x^2+y^2\le 8y, \ \ x\le y, \ \ \le\sqrt{3}\,x \ \ \ x\ge 0, \quad y\ge 0\}, \quad \delta(x;y)=x\,y.$

6. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$

в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

1) $x=3\sqrt{z}, \quad y=3x, \quad y=3, \quad x\ge 0, \quad z\ge 0.$
2) $x^2+y^2=2x, \quad x^2+y^2=4x, \quad y\le x, \quad z=4, \quad y\ge 0, \quad z\ge 0.$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

1) $z=2x^2+3y^2, \ \ y=x^2, \ \ y=x.$
2) $z=x, \quad x=\sqrt{9-y^2}, \ \ x=\sqrt{25-y^2}, \quad y\ge 0, \quad z\ge 0.$

8. Вычислить массу тела, занимающего область

$$V:\ \{0\le z\le\sqrt{16-x^2-y^2}\ \},$$

если задана объемная плотность $\gamma(x;y;z)=\dfrac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}.$

Кратные интегралы

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\ dx\,dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

1) $y^2 = 4x, \quad 2x - y + 2 = 0, \quad y = -2, \quad y = 2.$
2) $y = -\sqrt{4 - x^2}, \quad y = 4 - x^2.$

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$J = \int\limits_1^3 dx \int\limits_{1-x}^{x^2} f(x,y)\,dy.$$

3. Перейти к полярным координатам и вычислить

$$\iint\limits_{(D)} y\sqrt{x^2+y^2}\ dx\,dy, \qquad D: \{x^2+y^2 \le 6x, \quad 0 \le y \le x\}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

1) $x^2 + y = 2, \quad y^3 = x^2.$
2) $(x^2+y^2)^{3/2} = 2x^2 + y^2.$

5. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$ плотности $\delta(x;y)$

1) $D:$ Квадрат $A(0;3), \quad B(4;7), \quad C(8;3), \quad D(4;-2), \quad \delta(x;y) = 2x + y.$
2) $D: \ \{x^2+y^2 \le 4, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0\}, \quad \delta(x;y) = x\,y^3.$

6. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\ dx\,dy\,dz$
в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

1) $y = 1 - z^2, \quad y = x, \quad y = -x, \quad x = 2, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0.$
2) $1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4, \quad y \le x, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0.$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

1) $2x + 3y = 6, \quad z = 3 + x^2 + y^2, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0.$
2) $x = 1 + y^2 + z^2, \quad x = 3 - \sqrt{y^2+z^2}.$

8. Вычислить массу тела, занимающего область

$$V: \ \{0 \le z \le x^2, \quad x \le y \le 2\},$$

если задана объемная плотность $\gamma(x;y;z) = x\,y.$

Кратные интегралы

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\,dx\,dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

$$1)\ y=-\frac{2}{3}x+6,\quad y=\frac{1}{2}x-1,\quad x-3=0.$$
$$2)\ y=0;\quad y=\pi;\quad x=0,\quad x=\sin y.$$

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$J=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx.$$

3. Перейти к полярным координатам и вычислить

$$\iint\limits_{(D)} x\left(x^2+y^2\right)\,dx\,dy,\qquad D:\{y\le x^2+y^2\le 2y,\quad x\le 0\}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

1) $x^2+y^2=4;\quad y^2=3x.$

2) $(x^2+y^2)^5=16x^4\,y^2.$

5. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$

1) $D:$ Параллелограмм : $A(-1;2),\quad B(3;4),\quad C(3;\ 1/2),\quad D(-1;\ -3/2),$
$\delta(x;y)=3x+2y.$

2) $D:\ \{x^2+y^2\le 8x,\quad \sqrt{3}x\ \le y\le \dfrac{x}{\sqrt{3}}\},\ \delta(x;y)=\dfrac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$

6. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$

в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

$$1)\ y=\sqrt{25-x^2},\quad x=4,\quad z=y,\quad x\ge 0,\quad z\ge 0.$$
$$2)\ z=18-x^2-y^2,\quad y=x,\quad y=3,\quad x\ge 0,\quad z\ge 0.$$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$1)\ z=\sqrt{y},\quad y=2x,\quad y=3,\quad x\ge 0,\quad z\ge 0.$$
$$2)\ x^2+y^2+z^2=2,\quad y=x^2+z^2,\quad y>0.$$

8. Вычислить массу тела, занимающего область

$$V:\ \{4\le x^2+y^2+z^2\le 36,\quad y\ge x,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0\},$$

если задана объемная плотность $\gamma(x;y;z)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2+z^2}.$

Кратные интегралы

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\,dx\,dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

1) $x-2y+5=0, \quad 4x-y+6=0, \quad 2x+3y-18=0, \quad x-2y-2=0.$
2) $y=\sqrt{4x-x^2}, \; y=2\sqrt{x}, \quad x=0, \quad x=4.$

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$J=\int\limits_0^4 dy \int\limits_{(5y)/4}^{\sqrt{9+y^2}} f(x,y)\,dx.$$

3. Перейти к полярным координатам и вычислить

$$\iint\limits_{(D)} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy, \qquad D:\{1\le x^2+y^2\le 9, \quad x\ge 0, \quad y\ge 0\}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

1) $x^2+y^2=5, \quad y=2x^2, \quad (y>0).$
2) $(x^2+y^2)^{3/2}=y^2.$

5. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$

1) $D: \; \{y=e^x, \quad x=0, \quad y=2\}, \quad \delta(x;y)=e^{x+y}.$
2) $D: \; \{2x\le x^2+y^2\le 6x\}, \qquad \delta(x;y)=y\,x.$

6. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$
в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

1) $x=5, \quad y=x/5, \quad z=x^2+5y^2, \quad y\ge 0, \quad z\ge 0.$
2) $x^2+y^2=4y, \quad x^2+y^2=y, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}.$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

1) $y=\sqrt{9-x^2-z^2}, \quad y=\sqrt{x^2+z^2}, \quad (y>0).$
2) $x^2+y^2=4, \quad y+z=2, \quad z\ge 0.$

8. Вычислить массу тела, занимающего область

$$V: \; \{2(x^2+y^2)\le z\le 4, \quad 0\le y\le \frac{x}{\sqrt{3}} \},$$

если задана объемная плотность $\gamma(x;y;z)=\dfrac{x\,z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

Кратные интегралы

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\,dx\,dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

$$1)\quad x^2+y^2=4,\qquad y^2=3x,\quad (y>0).$$
$$2)\quad x+y=4,\qquad x-3y=0,\qquad x+5y=16.$$

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$J=\int\limits_2^4 dy\int\limits_1^{y/2} f(x,y)\,dx+\int\limits_4^5 dy\int\limits_1^2 f(x,y)\,dx+\int\limits_5^7 dy\int\limits_{(y-3)/2}^{2} f(x,y)\,dx.$$

3. Перейти к полярным координатам и вычислить

$$\iint\limits_{(D)}(x^2+y^2)\,dx\,dy,\qquad D:\{x^2+y^2\le 8,\ \ y\le x\ \ \}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\quad x\,y=6;\quad 3x=2y,\quad x-6y=0.$$
$$2)\quad (x^2+y^2)^2=7x^2+5y^2.$$

5. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$

$$1)\quad D:\ \{y=x^2+1,\qquad x-y+3=0\}\quad \delta(x;y)=2x+y.$$
$$2)\quad D:\ \{x^2+y^2\le 4x,\qquad y\le x\},\qquad \delta(x;y)=x\sqrt{(x^2+y^2)^5}.$$

6. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

$$1)\quad y=x^2,\quad x=y^2,\quad 3x+2y+z=6,\quad z=0.$$
$$2)\quad y=x,\quad ,\quad y=-x,\quad y=2,\quad z=4-x^2-y^2,\quad z\ge 0.$$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$1)\quad z^2=4-x,\quad x^2+y^2=4x,\quad (z\ge 0).$$
$$2)\quad x^2+y^2+z^2=2z,\qquad z=\sqrt{x^2+y^2}.$$

8. Вычислить массу тела, занимающего область

$$V:\ \{1\le x^2+y^2+z^2\le 9,\qquad 0\le y\le \frac{x}{\sqrt3},\quad z\ge 0\},$$

если задана объемная плотность $\gamma(x;y;z)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

Кратные интегралы

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\ dx\,dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

1) $y = 2x - x^2, \quad x^2 + y^x = 4, \quad x = 0, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$
2) Параллелограмм : $A(-2;1), \quad B(2;4), \quad C(6;1), \quad D(2;-2).$

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$J = \int\limits_{1/2}^{1} dy \int\limits_{1/y}^{2} f(x,y)\,dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{y}^{2} f(x,y)\,dx.$$

3. Перейти к полярным координатам и вычислить

$$\iint\limits_{(D)} \ln(x^2+y^2)\ dx\,dy, \qquad D: \{4 \leq x^2+y^2 \leq 25, \quad x \geq 0\}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

1) $y^2 + x^2 = 4y; \quad y = \sqrt{3}\,x; \quad y = -\sqrt{3}x, \quad (y > 0).$
2) $(x^2+y^2)^3 = x^4.$

5. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$

1) $D: \ \{x\,y = 1, \quad y = x, \quad x = 2\}, \quad \delta(x;y) = x^4\,y.$
2) $D: \ \{2y \leq x^2+y^2 \leq 6y, \quad -x \leq y \leq x\}, \qquad \delta(x;y) = \sqrt{x^2+y^2}.$

6. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\ dx\,dy\,dz$

в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

1) $x = 4, \quad x = 4y, \quad z = 4y^2, \quad z \geq 0.$
2) $z = 1 + 3x^2 + 2y^2, \quad y = 1 - x^2, \quad y = 0, \quad z = 0.$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

1) $y^2 + z^2 = 2z, \quad x = 4 - y^2 - z^2, \quad x \geq 0.$
2) $z = 3x, \quad y^2 = 2 - x, \quad z \geq 0.$

8. Вычислить массу тела, занимающего область

$$V: \ \{4 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 16, \quad y \leq \sqrt{3}\,x, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0\},$$

если задана объемная плотность $\gamma(x;y;z) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

Кратные интегралы

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\,dx\,dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

1) $x^2 - y^2 = 2, \quad y^2 = -x.$
2) Трапеция : $A(-2;-2), \quad B(-1;2), \quad C(3;4), \quad D(6;2).$

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$J = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

3. Перейти к полярным координатам и вычислить

$$\iint\limits_{(D)} \sqrt{(x^2+y^2)^5}\,dx\,dy, \qquad D: \{x^2+y^2 \le 3x, \quad -x/\sqrt{3} \le y \le x/\sqrt{3}\}.$$

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

1) $y = \sqrt{4-x^2}; \quad x + y = 2.$
2) $(x^2+y^2)^{3/2} = x^2 - y^2.$

5. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$

1) $D: \{x/2 \le y \le \sqrt{x/2}\}, \quad \delta(x;y) = x + 2y.$
2) $D: \{2x \le x^2 + y^2 \le 8x, \; y \ge 0\}, \quad \delta(x;y) = 3y.$

6. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$

в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

1) $y = 2x, \quad x + y + z = 2, \quad x \ge 0, \quad z \ge 0.$
2) $x^2+y^2+z^2 = 1, \quad x^2+y^2+z^2 = 36, \quad x^2+y^2 = z^2, \quad -x \le y \le x, \quad z \ge 0.$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

1) $y = 2 - \sqrt{x^2+z^2}, \quad x^2 + z^2 = y.$
2) $x + y = 3,, \quad z + x^2 = 9, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0.$

8. Вычислить массу тела, занимающего область

$$V: \{\, x^2 + z^2 \le 4z, \quad x + y \le 4, \quad y \ge 0 \,\},$$

если задана объемная плотность $\gamma(x;y;z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+z^2}}.$

Кратные интегралы

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\,dx\,dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

$$1)\ \ x-2y=2,\qquad x-2y+5=0,\quad x=-1,\quad x=3.$$
$$2)\ \ y^2-x=0,\qquad y=2,\quad x-2y=3,\qquad (y>2).$$

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$J=\int\limits_0^{1/\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\arcsin y} f(x,y)\,dx+\int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} dy \int\limits_0^{\arccos y} f(x,y)\,dx.$$

3. Перейти к полярным координатам и вычислить

$$\iint\limits_{(D)} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy,\qquad D:\{x^2+y^2+2y=0\quad x\le 0\ \}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ \ x^2+y=20;\quad y+8x=0.$$
$$2)\ \ (x^2+y^2)^3=x\cdot y^3.$$

5. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$

1) $D:$ Треугольник, $A(0;0)$, $B(\sqrt{2};\sqrt{2})$, $C(\sqrt{2};\sqrt{6})$, $\delta(x;y)=x^2+y^2$.

2) $D:\ \{4\le x^2+y^2\le 9,\quad x\ge 0,\quad y\le 0\},\qquad \delta(x;y)=\dfrac{2x-3y}{x^2+y^2}$.

6. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$
в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

$$1)\ \ z=9-x^2-y^2,\quad x+y=3,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0.$$
$$2)\ \ x=\sqrt{25-y^2},\quad x=z,\quad y=4,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0.$$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$1)\ \ x^2+y^2+z^2=R^2,\quad x^2+z^2=Ry,\quad y\ge 0.$$
$$2)\ \ x^2+y^2+z^2=36,\quad z=\sqrt{x^2+y^2},\quad 0\le y\le -x.$$

8. Вычислить массу тела, занимающего область

$$1)\ V:\ \{x^2+y^2\le 16y,\quad 0\le z\le 16-y,\quad x\ge 0\ \},$$

если задана объемная плотность $\gamma(x;y;z)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Кратные интегралы

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\,dx\,dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

$$1)\ \ y=\sqrt{12-x^2},\quad y=2\sqrt{3}-\sqrt{12-x^2},\quad x=0,\quad (x\geq 0).$$
$$2)\ \ y=|\ln x|,\quad y=5.$$

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$J=\int\limits_0^{1/2}dx\int\limits_0^{\sqrt{2x}}f(x,y)\,dy+\int\limits_{1/2}^{\sqrt{2}}dx\int\limits_0^{1}f(x,y)\,dy+\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}dx\int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}}f(x,y)\,dy.$$

3. Перейти к полярным координатам и вычислить

$$\iint\limits_{(D)} x\ dx\,dy,\qquad D:\{x^2+y^2\leq bx,\quad x\geq 0\}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ \ y=2;\quad y=x^2+5,\quad x=1,\quad x=3.$$
$$2)\ \ (x^2+y^2)^{5/2}=x\cdot y^2.$$

5. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$

$$1)\ \ D:\ \{y=4x+6,\quad x-2y-1=0,\quad x=-1\},\qquad \delta(x;y)=x.$$
$$2)\ \ D:\ \{y\leq x^2+y^2\leq 2y\},\qquad \delta(x;y)=3y.$$

6. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$

в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

$$1)\ \ z=x^2,\quad 2x=y,\quad x=4,\quad y\geq 0,\quad z\geq 0.$$
$$2)\ \ x^2+y^2=4,\quad y=\sqrt{x^2+z^2},\quad y\geq 0.$$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$1)\ \ x^2+y^2+z^2=1,\quad x^2+y^2+z^2=9,\quad y\leq x,\quad y\geq 0,\quad z\geq 0.$$
$$2)\ \ z=4-x^2-y^2,\quad x+y=2,\quad x\geq 0,\quad y\geq 0,\quad z\geq 0.$$

8. Вычислить массу тела, занимающего область

$$V:\ \{x^2+y^2=2x,\quad x+z=2,\quad y\geq 0,\quad z\geq 0\},$$

если задана объемная плотность $\gamma(x;y;z)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Кратные интегралы

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\,dx\,dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

$$\begin{array}{l} 1)\ \ x^2+y^2\le 4, \quad x^2+y^2\le 4x. \\ 2)\ \ x^2+y=0, \quad x-y-2=0 \end{array}$$

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$J=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx.$$

3. Перейти к полярным координатам и вычислить

$$\iint\limits_{(D)} \sqrt{(x^2+y^2)^3}\,dx\,dy, \qquad D:\{x^2+y^2\le y, \quad -x\le y\le x\sqrt{3}\,\}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{array}{l} 1)\ \ 4x-y+6=0;\ \ x-2y=2;\ \ y=-2,\ \ y=2. \\ 2)\ \ (x^2+y^2)^{7/2}=x^3\cdot y^2. \end{array}$$

5. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$

1) $D:$ Треугольник, : $A(3;4)$, $B(6;2)$, $C(3;\ 1/2)$, $\quad \delta(x;y)=x+y.$

2) $D:$ $\{4\le x^2+y^2\le 16, \quad x\le y\le x/\sqrt{3}, \quad x>0, \ \ y>\}, \qquad \delta(x;y)=\dfrac{3x-y}{x^2+y^2}.$

6. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$

в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

$$\begin{array}{l} 1)\ \ x+y=4, \quad z=4\sqrt{y}, \quad x\ge 0, \quad z\ge 0. \\ 2)\ \ x^2+y^2=4, \quad z=x^2+y^2, \quad z\ge 0. \end{array}$$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$\begin{array}{l} 1)\ \ z=4(x^2+y^2), \quad y=3x, \quad x=2, \quad y\ge 0, \quad z\ge 0. \\ 2)\ \ z^2+y^2=2y, \quad z^2+y^2=4y, \quad x=2, \quad x=4. \end{array}$$

8. Вычислить массу тела, занимающего область

$$V:\ \{\,2\le x^2+y^2+z^2\le 8, \quad z^2=x^2+y^2, \quad x\ge 0, \quad y\ge 0\,,\ z\ge 0\,\},$$

если задана объемная плотность $\gamma(x;y;z)=x\,y.$

Кратные интегралы

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\,dx\,dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

$$1)\ \ y=2x,\quad y=2x+3,\quad x=1,\quad x=2.$$
$$2)\ \ x=27-y^2,\quad x=-6y.$$

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$J=\int\limits_{1/2}^{1}dx\int\limits_{1/x}^{2}f(x,y)\,dy+\int\limits_{1}^{2}dx\int\limits_{x}^{2}f(x,y)\,dy.$$

3. Перейти к полярным координатам и вычислить

$$\iint\limits_{(D)} y\ dx\,dy,\qquad D:\{x^2+y^2\le ax,\quad y\ge 0\}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1)\ \ y=\frac{8}{x^2+4};\quad 4y=x^2.$$
$$2)\ \ y=4x+x^2,\quad y=x+4.$$

5. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$

$$1)\ \ D:\ \{x^2\le y\le 2\},\quad \delta(x;y)=2-y.$$
$$2)\ \ D:\ \{x^2+y^2\le R^2,\quad -x\le y\le x\sqrt{3}\},\qquad \delta(x;y)=3x^2+2.$$

6. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$
в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

$$1)\ y=\sqrt{25-x^2},\quad x=4,\quad z=y,\quad x\ge 0,\quad z\ge 0.$$
$$2)\ z=18-x^2-y^2,\quad y=x,\quad y=3,\quad x\ge 0,\quad z\ge 0.$$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$1)\ \ y^2+z^2=2z,\quad x=4-y^2-z^2,\quad x\ge 0.$$
$$2)\ \ z=3x,\quad y^2=2-x,\quad z\ge 0.$$

8. Вычислить массу тела, занимающего область

$$V:\ \{x^2+y^2=2x,\quad x+z=2,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0\},$$

если задана объемная плотность $\gamma(x;y;z)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.