Линейные и нелинейные уравнения физики

Нелинейное уравнение теплопроводности

Старший преподаватель кафедры ВММФ

Левченко Евгений Анатольевич

где $\beta = \alpha/2a_1$, $N = u_c c_1/(q^* \sqrt{\pi})$. Здесь учтено выражение для коэффициента температуропроводности $a^2 = k/\rho c_V$, через c_1 обозначена теплопроводность жидкой фазы.

Решение трансцендентного уравнения (3.39) можно найти численным методом или графически.

При малых β имеем: $e^{\beta^2} \approx 1$, $\Phi(\beta) \approx 2\beta/\sqrt{\pi}$, из (3.39) следует $2\beta^2/\sqrt{\pi} = N$. Подставляя сюда $\beta = \alpha/2a_1$, находим

$$\alpha = \sqrt{\frac{2u_c c_1 a_1^2}{q^*}}.$$

3.3 Распространение тепла в нелинейной среде

Распространение тепла от мгновенного сосредоточенного источника

В качестве примера задачи с внутренней нелинейностью рассмотрим распространение тепла от мгновенного сосредоточенного источника в среде со степенной зависимостью коэффициента теплопроводности (3.4) от температуры:

$$k = k_0 u^\sigma. \tag{3.40}$$

Пусть в начальной момент времени $t = 0$ в плоскости $x = 0$ на единицу площади мгновенно выделяется количество теплоты E_0. При отсутствии объемных тепловых источников распространение тепла от мгновенного сосредоточенного источника моделируется следующей задачей Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial}{\partial x}(u^\sigma \dfrac{\partial u}{\partial x}), \quad t > 0, x \in R^1, \\ u(x,0) = Q\delta(x). \end{cases} \tag{3.41}$$

Здесь $a^2 = k_0/\rho c_V$ — коэффициент температуропроводности, $Q = E_0/(\rho c_V)$. Сходимость $u(x,t)$ к дельта - функции при $t \to 0$ понимается как слабая сходимость

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) u(x,t) dx = Qf(0)$$

для любой непрерывной функции $f(x)$. От такого источника в обе стороны от точки $x = 0$ вдоль оси x распространяются тепловые возмущения. Из физической постановки задачи можно положить, что

$$u \to 0, \quad u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty. \tag{3.42}$$

Интегрируя уравнение теплопроводности (3.41), получаем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)dx = a^2\left\{u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x\to+\infty} - u^\sigma\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{x\to-\infty}\right\} = 0.$$

Отсюда с учетом начального условия получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)dx = Q = \mathrm{const}, \quad \text{при} \quad t \geq 0. \tag{3.43}$$

В задачу входят параметры Q, a^2, единицы измерения которых в системе СИ определяются как $[Q] = \text{град}\cdot\text{М}$, $[a^2] = \text{М}^2\cdot\text{с}^{-1}\cdot\text{град}^{-\sigma}$. Чтобы найти автомодельную переменную, составим безразмерную комбинацию

$$\eta = \frac{x}{(Q^\sigma a^2 t)^\nu}, \qquad \nu = \frac{1}{\sigma+2}. \tag{3.44}$$

Комбинация, имеющая размерность температуры, имеет вид

$$T = \left(\frac{Q^2}{a^2 t}\right)^\nu. \tag{3.45}$$

Решение уравнения (3.41) в соответствии с (3.25) будем искать в виде

$$u(x,t) = \left(\frac{Q^2}{a^2 t}\right)^\nu \Theta(\eta). \tag{3.46}$$

Производные функции (3.46) равны

$$\begin{aligned} u_t &= -\nu\frac{Q^{2\nu}}{a^{2\nu}}t^{-\nu-1}\Theta + \left(\frac{Q^2}{a^2 t}\right)^\nu \Theta' \frac{x}{(Q^\sigma a^2)^\nu}(-\nu)t^{-\nu-1}, \\ u_x &= \left(\frac{Q^2}{a^2 t}\right)^\nu \Theta' \frac{1}{(Q^\sigma a^2 t)^\nu}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Здесь штрихом обозначена производная по η. Из (3.44) также следует формула преобразования производной

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{(Q^\sigma a^2 t)^\nu}\frac{\partial}{\partial \eta}. \tag{3.48}$$

Подставляя выражения (3.44), (3.46)–(3.48) в (3.41), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения $\Theta(\eta)$:

$$-\nu\Theta - \nu\eta\Theta' = (\Theta^\sigma\Theta')'. \tag{3.49}$$

Интегрируя уравнение (3.49), получим

$$-\nu\eta\Theta = \Theta^\sigma\Theta' + c. \tag{3.50}$$

Здесь c — постоянная интегрирования. В силу граничных условий (3.42) имеем $\Theta^\sigma\Theta' \to 0$ при $|\eta| \to \infty$. Переходя в (3.50) к пределу $|\eta| \to \infty$, находим, что $c = 0$. В результате уравнение (3.50) принимает вид

$$\Theta^\sigma\Theta' = -\nu\eta\Theta. \tag{3.51}$$

Уравнение (3.51) имеет особое решение $\Theta = 0$. Если $\Theta \neq 0$, то уравнение (3.51) после интегрирования приводится к виду

$$\Theta^\sigma = -\frac{\sigma}{2}\nu\eta^2 + \text{const}.$$

Подставим в это выражение (3.44) и переобозначим постоянную интегрирования, получим

$$\Theta^\sigma = \frac{\sigma}{2(\sigma+2)}(\eta_0^2 - \eta^2).$$

Из условия вещественности и положительности температуры можем записать

$$\Theta(\eta) = \begin{cases} \left[\dfrac{\sigma}{2(\sigma+2)}(\eta_0^2 - \eta^2)\right]^{1/\sigma}, & |\eta| < \eta_0, \\ 0, \qquad |\eta| \geq \eta_0. \end{cases} \tag{3.52}$$

Здесь η_0 — постоянная. В области $|\eta| \geq \eta_0$ функция $\Theta(\eta) \equiv 0$. Найдем η_0 из условия (3.43), которое для функции Θ принимает вид

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Theta(\eta)d\eta = \int_{-\eta_0}^{\eta_0} \Theta(\eta)d\eta = 1.$$

Подставим в это выражение (3.52), получим

$$2\left[\frac{\sigma}{2(\sigma+2)}\right]^{1/\sigma} \int\limits_0^{\eta_0} (\eta_0^2 - \eta^2)^{1/\sigma}d\eta = 1,$$

откуда

$$2\left[\frac{\sigma}{2(\sigma+2)}\right]^{1/\sigma} \eta_0^{(\sigma+2)/\sigma} I(\sigma) = 1. \tag{3.53}$$

Здесь

$$I(\sigma) = \int\limits_0^1 (1-\xi^2)^{1/\sigma} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(1+1/\sigma)}{\Gamma(3/2+1/\sigma)}, \tag{3.54}$$

$\xi = \eta/\eta_0$, $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера. Из (3.53) выразим постоянную η_0:

$$\eta_0 = \left\{ 2I(\sigma) \left[\frac{\sigma}{2(\sigma+2)} \right]^{1/\sigma} \right\}^{-\sigma/(\sigma+2)}. \tag{3.55}$$

Подставляя полученные выражения в (3.46), с учетом (3.55) найдем поле температур $u(x,t)$ в следующем виде:

$$u(x,t) = \begin{cases} u(t) \left[1 - \left(\dfrac{x}{x_0(t)} \right)^2 \right]^{1/\sigma}, & |x| < x_0(t), \\ 0, & |x| \geq x_0(t). \end{cases} \tag{3.56}$$

Здесь

$$u(t) = \eta_0^{2/\sigma} Q^{2/(\sigma+2)} \left[\frac{\sigma}{2(\sigma+2)} \right]^{1/\sigma} (a^2 t)^{-1/(\sigma+2)}, \tag{3.57}$$

движение фронта задается выражением

$$x_0(t) = \eta_0 Q^{\sigma/(\sigma+2)} (a^2 t)^{1/(\sigma+2)}. \tag{3.58}$$

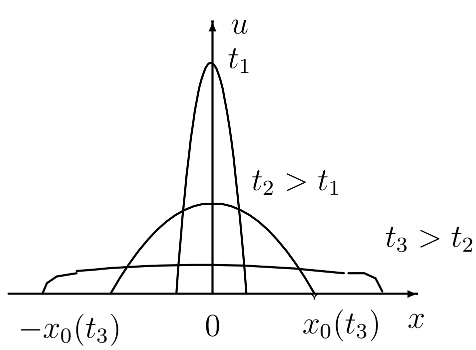

Рис. 3.3:

Решение (3.56) описывает распространение *тепловой волны* от мгновенного теплового источника, сосредоточенного в начальный момент времени в плоскости $x = 0$. Положение фронтов волны в каждый момент времени определяется координатами $x = \pm x_0(t)$. Распространение фронта тепловой волны иллюстрирует Рис.3.3. Скорость движения фронта конечна и равна

$$v(t) = \frac{dx_0}{dt} = \frac{a^2\eta_0}{\sigma+2} Q^{\sigma/(\sigma+2)}(a^2t)^{-(\sigma+1)/(\sigma+2)} \sim t^{-(\sigma+1)/(\sigma+2)}. \qquad (3.59)$$

Скорость $v(t)$ уменьшается с течением времени, но тепловое возмущение проникает в нелинейную среду неограниченно, так как $x_0(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Если $\sigma > 1$, то градиент температуры неограниченно растет, $|\partial u/\partial x| \to \infty$ при $x \to \pm x_0 \mp 0$. Несмотря на неограниченный рост градиента температуры на крутом фронте тепловой волны, плотность теплового потока $q = -k_0 u^\sigma \partial u/\partial x$ стремится к нулю при приближении к тепловому фронту со стороны теплового возмущения, $x \to x_0(t) - 0$, что обеспечивает выполнение на фронте условия непрерывности теплового потока. При $\sigma \to 0$ из (3.55) находим $\eta_0 \to \infty$, и из (3.56) следует

$$u(x,t) = \frac{Q}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-x^2/(4a^2t)}.$$

Это выражение описывает распространение тепла от мгновенного точечного источника *в линейной среде* с коэффициентом теплопроводности, равным k_0. Из (3.59) в рассматриваемом случае получаем $v \to \infty$. Этот результат доказывает бесконечность скорости распространения теплового возмущения в линейном случае.

Режим с "обострением"

Распространение тепла в нелинейной среде может приводить к пространственной локализации тепловых возмущений, когда фронт тепловой волны остается неподвижным в течение некоторого конечного интервала времени. Механизмы локализации могут быть различными. В частности, локализация возникает, если температура в некоторой области неограниченно возрастает за конечный промежуток времени. Такой режим называют режимом с "обострением а соответствующий промежуток времени — временем обострения.

Режим с "обострением"иллюстрирует следующая краевая задача:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial}{\partial x}(u^\sigma \dfrac{\partial u}{\partial x}), \\ u(x,0) = A_0 \tau^{-1/\sigma} \left(1 - \dfrac{x}{x_0}\right)^{2/\sigma}, \quad x > 0, \\ u(0,t) = A_0(\tau - t)^{-1/\sigma}, \quad 0 < t < \tau. \end{cases} \qquad (3.60)$$