Линейные и нелинейные уравнения физики

Уравнение Лапласа в декартовой системе координат.

Старший преподаватель кафедры ВММФ

Левченко Евгений Анатольевич

25. Разделение переменных в уравнении Лапласа

Этот раздел посвящен одному из наиболее распространенных методов решения начальных и краевых задач – методу Фурье или, как его называют в соответствии с основной идеей, методу разделения переменных. Этот метод оказывается эффективным в тех случаях, когда, во-первых, уравнение в частных производных в выбранной системе координат допускает разделение переменных и, во-вторых, граничные условия задаются на координатных линиях или поверхностях данной системы координат. Это позволяет из общих решений обыкновенных дифференциальных уравнений по соответствующим переменным выделить единственные решения и, как следствие, определить единственное решение исходной задачи.

25.1. Разделение переменных в уравнении Лапласа в декартовой системе координат

Рассмотрим пример, наглядно иллюстрирующий сущность метода. В прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ рассмотрим следующую задачу Дирихле для функции $u(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \tag{25.1}$$

$$u(x, 0) = f(x),\ u(x, b) = \varphi(x),\ u(0, y) = \psi(y),\ u(a, y) = \chi(y).$$

Функции $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(y)$, $\chi(y)$ непрерывны на каждой стороне прямоугольника, а в его вершинах в зависимости от физического смысла величины $u(x, y)$ эти функции могут быть непрерывными или иметь разрывы. В первом случае должны выполняться условия непрерывности

$$f(a) = \chi(0),\ \chi(b) = \varphi(a),\ \varphi(0) = \psi(b),\ \psi(0) = f(0). \tag{25.2}$$

Рассмотрим последовательно обе возможности.

I. Граничные условия в вершинах прямоугольника имеют разрыв.

В этом случае сразу можно провести редукцию задачи.

♦ Процедура сведения исходной задачи к более простым называется редукцией исходной задачи.

Представим функцию $u(x, y)$ в виде суммы четырех гармонических функций

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) + u_4(x, y), \tag{25.3}$$

каждая из которых принимает заданные значения на одной из сторон, обращаясь в нуль на остальных трех. В результате имеем четыре задачи Дирихле

$$\Big[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big]u_i(x,y)=0, \qquad i=\overline{1,4}, \tag{25.4}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned}
&u_1(x,0)=f(x),\ u_1(x,b)=u_1(0,y)=u_1(a,y)=0;\\
&u_2(x,0)=0,\ u_2(x,b)=\varphi(x),\ u_2(0,y)=u_2(a,y)=0;\\
&u_3(x,0)=u_3(x,b)=0,\ u_3(0,y)=\psi(y),\ u_3(a,y)=0;\\
&u_4(x,0)=u_4(x,b)=u_4(0,y)=0,\ u_4(a,y)=\chi(y).
\end{aligned} \tag{25.5}$$

Найдем одну из функций $u_i(x,y)$, например $u_2(x,y)$. Следуя идее метода, частное решение задачи ищем в виде

$$u_2(x,y)=X(x)Y(y), \tag{25.6}$$

где $X(x)$ и $Y(y)$ – «функции разделения», каждая из которых зависит только от одной переменной. Подстановка (25.6) в (25.4) дает

$$X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0.$$

Следующий шаг метода разделения переменных состоит в том, что уравнение, в которое уже подставлены функции «разделения», домножается на такой множитель, чтобы получить сумму, каждое из слагаемых которой зависит только от одной переменной. В данном случае таким множителем является $[X(x)Y(y)]^{-1}$:

$$\frac{X''(x)}{(X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}=0.$$

Последнее равенство возможно лишь тогда, когда каждое слагаемое (группа слагаемых), зависящее только от своей переменной, равно константе, а сумма этих констант равна нулю. Поскольку мы имеем всего две переменных, то констант должно быть две, равных по величине и противоположных по знаку. Следовательно,

$$\frac{X''(x)}{(X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=\lambda, \quad \lambda=\mathrm{const}\,.$$

В результате приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$X''(x) = \lambda X(x),$$
$$Y''(y) = -\lambda Y(y).$$

Эти уравнения необходимо дополнить граничными условиями, которые следуют из подстановки (25.6) во вторую строку (25.5):

$$X(x)Y(0) = 0, \quad u_2(x,b) = \varphi(x),$$
$$X(0)Y(y) = 0, \quad X(a)Y(y) = 0.$$

Так как сомножители $X(x)$ и $Y(y)$ для произвольных x и y не могут обращаться в нуль, [тогда $u_2(x,y) \equiv 0$], то

$$X(0) = X(a) = 0, \quad Y(0) = 0, \quad u_2(x,b) = \varphi(x). \tag{25.7}$$

Таким образом, для функций $X(x)$ и$Y(y)$ получим следующие задачи:

$$X''(x) = \lambda X(x), \qquad X(0) = X(a) = 0; \tag{25.8}$$
$$Y''(y) = -\lambda Y(y), \qquad Y(0) = 0. \tag{25.9}$$

Задача (25.8) представляет собой задачу Штурма–Лиувилля для $X(x)$, решение которой приведено в примере III.2.2:

$$X_n(x) = a_n \sin\frac{\pi n x}{a}, \qquad \lambda_n = -\Big(\frac{\pi n}{a}\Big)^2, \quad n = \overline{1,\infty}. \tag{25.10}$$

Общее решение уравнения (25.9) с учетом (25.10) имеет вид

$$Y_n(y) = b_n \operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}y + c_n \operatorname{ch}\frac{\pi n}{a}y.$$

Если учесть, что $Y_n(0) = 0$, то

$$Y_n(y) = b_n \operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}y$$

и, следовательно,

$$u_2^n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = a_n b_n \sin\frac{\pi n}{a}x \operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}y =$$
$$= \bar{a}_n \sin\frac{\pi n}{a}x \operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}y, \quad n = \overline{1,\infty}. \tag{25.11}$$

В силу линейности уравнения Лапласа любая сумма его решений также будет решением, поэтому, просуммировав все решения (25.11), получим общий вид решения уравнения Лапласа

$$u_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{a}_n\sin\frac{\pi n}{a}x\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi n}{a}y, \tag{25.12}$$

удовлетворяющего однородным граничным условиям из второй строки (25.5).

Оставшиеся не определенными произвольные постоянные $\bar{a}_n=a_nb_n$ можно найти, воспользовавшись последним условием (25.7), т.е.

$$u_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{a}_n\sin\frac{\pi n}{a}x\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi nb}{a}=\varphi(x). \tag{25.13}$$

Разложим функцию $\varphi(x)$ на интервале $]0,a[$ в ряд Фурье по ортогональной системе функций (25.10)

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{\pi n}{a}x;\quad \varphi_n=\frac{2}{a}\int\limits_0^a\varphi(x)\sin\frac{\pi nx}{a}dx. \tag{25.14}$$

Поскольку разложение в ряд Фурье единственно, то равенство (25.13) справедливо лишь тогда, когда коэффициенты рядов (25.13) и (25.14) равны, т.е.

$$\bar{a}_n=\frac{1}{\mathrm{sh}(\pi nb/a)}\varphi_n, \tag{25.15}$$

и, следовательно,

$$u_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\frac{\mathrm{sh}(\pi ny/a)}{\mathrm{sh}(\pi nb/a)}\sin\frac{\pi n}{a}x. \tag{25.16}$$

После аналогичных вычислений для функций $u_1(x,y)$, $u_3(x,y)$, $u_4(x,y)$ получим, согласно (25.3), решение задачи

$$\begin{aligned}u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{&\Big[\varphi_n\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi ny}{a}+f_n\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi n(b-y)}{a}\Big]\frac{\sin(\pi nx/a)}{\mathrm{sh}(\pi nb/a)}+\\&+\Big[\chi_n\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi nx}{b}+\psi_n\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi n(a-x)}{b}\Big]\frac{\sin(\pi ny/b)}{\mathrm{sh}(\pi na/b)}\Big\},\end{aligned} \tag{25.17}$$

где f_n, χ_n, ψ_n – коэффициенты Фурье функций $f(x)$, $\chi(x)$, $\psi(x)$, определяемые аналогично (25.14) формулами

$$f_n(x) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{\pi n x}{a}dx;$$

$$\chi_n = \frac{2}{b}\int_0^b \chi(y)\sin\frac{\pi n x}{b}dx; \tag{25.18}$$

$$\psi_n = \frac{2}{b}\int_0^b \psi(y)\sin\frac{\pi n x}{b}dx.$$

II. Граничные условия в вершинах прямоугольника являются непрерывными.

Как уже отмечалось, в этом случае должны выполняться условия непрерывности (25.2). Поскольку значения функции $u(x,y)$ в вершинах прямоугольника не обязательно нулевые, то редукция задачи непосредственно для функции $u(x,y)$ невозможна. Поэтому решение задачи будем искать в виде

$$u(x,y) = u_0(x,y) + w(x,y), \tag{25.19}$$

где $u_0(x,y)$ – гармоническая функция, которую следует выбрать так, чтобы гармоническая функция $w(x,y)$ в вершинах прямоугольника обращалась в нуль. Это означает, что функция $u_0(x,y)$ должна удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{array}{ll} u_0(0,0) = \psi(0) = f(0), & u_0(a,0) = f(a) = \chi(0), \\ u_0(a,b) = \varphi(a) = \chi(b), & u_0(0,b) = \varphi(0) = \psi(b), \end{array} \tag{25.20}$$

Положим

$$u_0(x,y) = A + Bx + Cy + Dxy. \tag{25.21}$$

Такая функция гармонична при любых вещественных коэффициентах, которые мы найдем, подчинив соотношение (25.21) условиям (25.20). В результате имеем

$$A = f(0), \quad B = \frac{f(a) - f(0)}{a}, \quad C = \frac{\psi(b) - \psi(0)}{b},$$
$$D = \frac{[\varphi(a) - \varphi(0)] - [f(a) - f(0)]}{ab}. \tag{25.22}$$

Таким образом, замена (25.19) приводит к задаче Дирихле для функции $w(x,y)$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \tag{25.23}$$
$$w(x,0) = \bar f(x), \quad w(x,b) = \bar\varphi(x),$$

$$w(0, y) = \bar{\psi}(y), \quad w(a, b) = \bar{\chi}(y),$$

где $\bar{f}(x)$, $\bar{\varphi}(x)$, $\bar{\psi}(y)$, $\bar{\chi}(y)$ определяются формулами

$$\begin{aligned} &\bar{f}(x) = f(x) - u_0(x, 0), \quad \bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - u_0(x, b), \\ &\bar{\psi}(y) = \psi(y) - u_0(0, y), \quad \bar{\chi}(y) = \chi(y) - u_0(a, y) \end{aligned} \tag{25.24}$$

и удовлетворяют условиям непрерывности

$$\bar{f}(a) = \bar{\chi}(0) = \bar{\chi}(b) = \bar{\varphi}(a) = \bar{\varphi}(0) = \bar{\psi}(b) = \bar{\psi}(0) = \bar{f}(0) = 0,$$

означающим, что непрерывная на границе функция $w(x, y)$ в вершинах прямоугольника обращается в нуль. Для такой функции можно провести редукцию задачи (25.23) к задачам типа (25.4), решение которых определено формулами (25.17), (25.18), причем в последних функции $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(y)$, $\chi(y)$ следует заменить функциями $\bar{f}(x)$, $\bar{\varphi}(x)$, $\bar{\psi}(y)$, $\bar{\chi}(y)$.

$\Diamond$ Отметим, что ряды (25.17), определяющие решение в случае непрерывных граничных условий, равномерно сходятся в прямоугольнике в отличие от аналогичных рядов, определяющих решение для разрывных граничных условий, которые в окрестности вершин могут утрачивать равномерную сходимость.

Аналогично рассматривается задача Дирихле для прямоугольного параллелепипеда.

Перейдем к задаче Неймана. Некоторые особенности, возникающие в этом случае, проиллюстрируем на задаче Неймана в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \tag{25.25}$$

$$u_x(0, y) = \frac{F}{b}, \quad u_y(x, 0) = -\frac{F}{a}, \quad u_x(a, y) = u_y(x, b) = 0,$$

где $F = \text{const}$. Сразу отметим, что редукция этой задачи к двум, каждая из которых на трех сторонах имеет нулевые граничные условия, невозможна, так как при этом нарушится необходимое условие разрешимости задачи Неймана (24.24):

$$\oint\limits_{S_E} \frac{\partial u}{\partial n} dl = -\frac{F}{a}\int\limits_0^a dx + \frac{F}{b}\int\limits_0^b dy = 0.$$

Поэтому решение задачи ищем в виде

$$u(x, y) = u_0(x, y) + w(x, y), \tag{25.26}$$

где $u_0(x, y)$ – гармонический полином

$$u_0(x, y) = A + Bx + Cy + Dxy + E(x^2 - y^2), \qquad (25.27)$$

удовлетворяющий условиям (25.25), т.е.

$$\begin{gathered} B + Dy = \frac{F}{b}, \quad B + Dy + 2Ea = 0, \\ C + Dx = -\frac{F}{a}, \quad C + Dx - 2Eb = 0. \end{gathered} \qquad (25.28)$$

Отсюда находим

$$u_0(x, y) = A + \frac{F}{2ab}[y^2 - 2by - (x^2 - 2ax)].$$

Если оставшийся неопределенным коэффициент A выбрать в виде $A = F(b^2 - a^2)/(2ab)$, то

$$u_0(x, y) = \frac{F}{2ab}[(y - b)^2 - (x - a)^2]. \qquad (25.29)$$

В результате подстановки (25.26) задача (25.25) сводится к следующей задаче для функции $w(x, y)$:

$$\begin{gathered} w_{xx} + w_{yy} = 0, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ w_x(0, y) = w_y(x, 0) = w_x(a, y) = w_y(x, b) = 0, \end{gathered}$$

решением которой является произвольная постоянная c. Таким образом, решение задачи Неймана имеет вид

$$u(x, y) = \frac{F}{2ab}[(y - b)^2 - (x - a)^2] + c. \qquad (25.30)$$

Пример 25.1. Найти стационарное распределение температуры в тонкой прямоугольной пластине длиной a и шириной b с коэффициентом теплопроводности k, если:

а) по периметру прямоугольника поддерживается заданная температура;

б) через одну сторону поступает, а через смежную ей сторону выводится количество тепла Q.

Решение. а) Математическая постановка задачи соответствует (25.1). Ее решения задаются формулами (25.17), (25.18) или (25.17)–(25.19).

б) Математическая постановка задачи соответствует (25.25), где следует положить $F = Q/k$. Решение задачи определяется формулой (25.30).