Линейные и нелинейные уравнения физики

Уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат

Старший преподаватель кафедры ВММФ

Левченко Евгений Анатольевич

Пример 25.5. Для задачи Неймана (25.54) отметить неправильно поставленные задачи: а) $f(\varphi) = A = \text{const}$; б) $f(\varphi) = \cos\varphi$; в) $f(\varphi) = \sin^2\varphi$.

Решение. Для задачи Неймана должно выполняться условие разрешимости (24.24), которое в полярных координатах для окружности $r = a$ примет вид

$$I = \int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi = 0, \tag{25.57}$$

т.е.

$$\text{а)}\ \ I = 2\pi A, \quad \text{б)}\ \ I = 0, \quad \text{в)}\ \ I = \pi.$$

Отсюда следует, что задачи а) и в) поставлены неправильно. Это означает, что не существует гармонических функций, которые бы на окружности удовлетворяли условиям а) и в).

25.3. Разделение переменных в уравнении Лапласа в цилиндрических координатах

$\Diamond$ Если цилиндр бесконечен и граничные условия не зависят от переменной z, то решение задачи имеет вид

$$u(r, \varphi, z) = u(r, \varphi).$$

Для определения функции $u(r, \varphi)$ получим двумерную задачу, решение которой получено выше (см., в частности, пример 25.3).

Рассмотрим ряд задач на определение гармонических функций в цилиндре радиуса a и конечной высоты h, решение которых можно найти методом разделения переменных.

Общая постановка задачи в этом случае имеет вид

$$\begin{gathered}
\Delta u = 0, \qquad 0 \leqslant r < a, \quad 0 < z < h, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\
u(r, \varphi + 2\pi, z) = u(r, \varphi, z), \qquad u(a, \varphi, z) = f_1(\varphi, z), \\
u(r, \varphi, 0) = f_2(r, \varphi), \qquad u(r, \varphi, h) = f_3(r, \varphi)
\end{gathered}$$

и допускает следующую редукцию $u = u_1 + u_2$:

$$\begin{gathered}
\Delta u_1 = 0, \quad u_1(a, \varphi, z) = f_1(\varphi, z), \\
u_1(r, \varphi, 0) = u_1(r, \varphi, h) = 0
\end{gathered}$$

и

$$\Delta u_2 = 0, \quad u_2(a, \varphi, z) = 0,$$
$$u_2(r, \varphi, 0) = f_1(r, \varphi), \qquad u_2(r, \varphi, h) = f_2(r, \varphi).$$

Учет зависимости от азимутального угла φ был рассмотрен в предыдущем разделе, поэтому перейдем сразу к задачам, в которых граничные условия не зависят от переменной φ.

Пример 25.6. Дан цилиндр радиусом $r = a$ и высотой h, боковая поверхность и нижнее основание которого поддерживаются при нулевой температуре, а верхнее основание – при температуре T. Найти стационарное распределение температуры в цилиндре.

Решение. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\Delta u = 0, \qquad 0 < z < h, \quad r < a, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi;$$
$$u|_{z=0} = 0, \quad u|_{r=a} = 0, \quad u|_{z=h} = T.$$

Запишем оператор Лапласа в цилиндрической системе координат

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Поскольку краевые условия не зависят от переменной φ, то решение задачи можно искать в виде $u(r, \varphi, z) = u(r, z)$, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0,$$

и, следовательно, уравнение Лапласа примет вид

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Решение задачи будем искать методом Фурье, положив

$$u(r, z) = R(r) Z(z).$$

Обозначим

$$R' = \frac{dR}{dr}, \qquad \dot{Z} = \frac{dZ}{dz}.$$

Тогда

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r R' Z + R \ddot{Z} = 0.$$

Разделив переменные, получим

$$\frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} = -\frac{\ddot{Z}}{Z} = \lambda, \qquad \lambda = \text{const}$$

или

$$R'' + \frac{R'}{r} = R\lambda; \qquad \ddot{Z} + \lambda Z = 0.$$

Из граничного условия

$$u(a, z) = R(a)Z(z) = 0$$

найдем $R(a) = 0$. Поскольку функция $u(r, z)$ имеет смысл температуры, то

$$|R(r)| < \infty \quad \text{при} \quad r \leqslant a.$$

В результате функция $R(r)$ есть решение задачи Штурма–Лиувилля для уравнения Бесселя

$$R'' + \frac{1}{r}R' - \lambda R = 0, \quad \lim_{r\to+0}|R(r)| < \infty, \quad R(a) = 0.$$

Для собственных значений и собственных функций получим соответственно

$$\lambda = -\Big(\frac{\alpha_n^0}{a}\Big)^2, \qquad n = \overline{1, \infty};$$
$$R_n(r) = A_n J_0\Big(\alpha_n^0 \frac{r}{a}\Big),$$

где α_n^0 – нули функции $J_0(x)$ (см. разд. «Задача Штурма–Лиувилля для уравнения Бесселя» части III). В результате уравнение для функции $Z(z)$ примет вид

$$\ddot{Z} - (\alpha_n^0)^2 Z = 0, \qquad n = \overline{1, \infty}.$$

Следовательно,

$$Z_n(z) = B_n \operatorname{sh} \alpha_n^0 z + C_n \operatorname{ch} \alpha_n^0 z$$

и

$$u_n(r, z) = A_n J_0\Big(\alpha_n^0 \frac{r}{a}\Big)[B_n \operatorname{sh} \alpha_n^0 z + C_n \operatorname{ch} \alpha_n^0 z].$$

Просуммировав по n, найдем

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0\Big(\alpha_n^0 \frac{r}{a}\Big)[\bar{B}_n \operatorname{sh} \alpha_n^0 z + \bar{C}_n \operatorname{ch} \alpha_n^0 z],$$

где
$$\bar{B}_n = A_n B_n, \qquad \bar{C}_n = A_n C_n.$$
Из граничных условий получим
$$u|_{z=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_n J_0\Big(\alpha_n^0 \frac{r}{a}\Big) = 0.$$
Следовательно, $\bar{C}_n = 0$. Аналогично
$$u|_{z=h} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}_n J_0\Big(\alpha_n^0 \frac{r}{a}\Big) \operatorname{sh}(\alpha_n^0 h) = T.$$
Разложим функцию $f(r)$ в ряд Фурье–Бесселя на интервале $]0, a[$:
$$f(r) = T = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n J_0\Big(\alpha_n^0 \frac{r}{a}\Big),$$
где
$$\beta_n = \frac{1}{a^2}\frac{2}{[J_0'(\alpha_n^0)]^2}\int\limits_0^a r f(r) J_0\Big(\alpha_n^0 \frac{r}{a}\Big) dr.$$
Тогда
$$\bar{C}_n = -\frac{\beta_n}{2\operatorname{sh}\alpha_n^0 h}.$$
Итак,
$$u(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0\Big(\alpha_n^0 \frac{r}{a}\Big)\beta_n \frac{\operatorname{sh}\alpha_n^0 z}{\operatorname{sh}\alpha_n^0 h}.$$
Чтобы определить коэффициент β_n разложения функции $f(r) = T$ в ряд Фурье–Бесселя, найдем значение интеграла (см. пример III.5.8)
$$I_n = \frac{1}{a^2}\int\limits_0^a rT J_0\Big(\alpha_n^0 \frac{r}{a}\Big) dr.$$
Сделаем в интеграле замену переменных $\alpha_n^0 r/a = t$. Тогда $dr = (a/\alpha_n^0)dt$. Для новых пределов интегрирования получим $r_1 = 0$, $t_1 = 0$, $r_2 = a$, $t_2 = \alpha_n^0$ и

$$I_n = \frac{T}{(\alpha_n^0)^2}\int\limits_0^{\alpha_n^0} tJ_0(t)dt = \frac{T}{(\alpha_n^0)^2}\int\limits_0^{\alpha_n^0}[tJ_1(t)]'dt =$$

$$= \frac{T}{(\alpha_n^0)^2}[tJ_1(t)]\Big|_0^{\alpha_n^0} = \frac{T}{(\alpha_n^0)^2}[\lambda_n^0 J_1(\alpha_n^0)] = -\frac{TJ_0'(\alpha_n^0)}{\alpha_n^0}.$$

Окончательно имеем

$$\beta_n = \frac{I_n}{[J_0'(\alpha_n^0)]^2} = -\frac{2T}{(\alpha_n^0)J_0'(\alpha_n^0)}$$

и

$$u(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} -J_0\Big(\alpha_n^0\frac{r}{a}\Big)\frac{2T}{\alpha_n^0 J_0'(\alpha_n^0)}\frac{\operatorname{sh}\alpha_n^0 z}{\operatorname{sh}\alpha_n^0 h} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2T}{\alpha_n^0}\frac{\operatorname{sh}\alpha_n^0 z}{\operatorname{sh}\alpha_n^0 h}\frac{J_0(\alpha_n^0 r/a)}{J_1(\alpha_n^0)}.$$

Пример 25.7. Дан цилиндр радиусом $r = a$ и высотой h, боковая поверхность которого поддерживается при температуре $\sin\pi mz$ $(m = \overline{1,\infty})$, а верхнее и нижнее основания – при нулевой температуре. Найти стационарное распределение температуры в цилиндре.

Решение. Математическая постановка задачи имеет вид

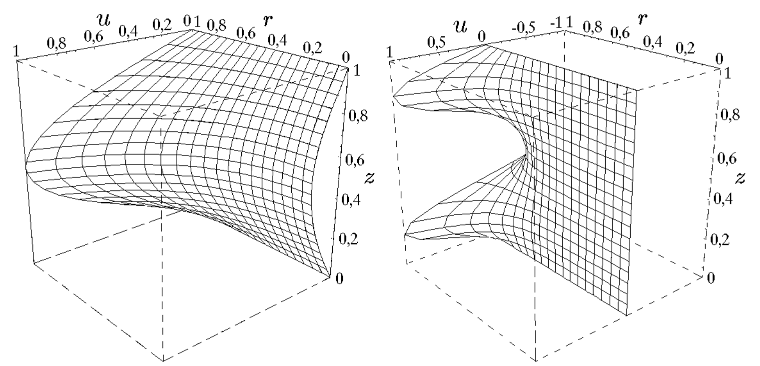

Рис. 45 Рис. 46

$$\Delta u = 0, \qquad 0 < z < h, \quad r < a,$$
$$u|_{z=0} = u|_{z=h} = 0, \quad u|_{r=a} = \sin \pi m z.$$

Решение задачи будем искать методом Фурье, положив

$$u(r,z) = R(r)Z(z).$$

Аналогично предыдущему примеру, для определения функций $R(r)$ и $Z(z)$ имеем следующие задачи:

$$R'' + \frac{R'}{r} = \lambda R; \qquad |R(r)| < \infty \quad r \leqslant a, \tag{25.58}$$
$$\ddot{Z} + \lambda Z = 0, \qquad z(0) = z(h) = 0. \tag{25.59}$$

Собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля (25.59) получены ранее (см. пример III.2.2) и имеют вид

$$\lambda = (\frac{\pi n}{h})^2, \quad Z_n(z) = A_n \sin\frac{\pi n z}{h}, \qquad n = \overline{1,\infty}.$$

Тогда общее решение уравнения (25.59) есть

$$R_n(r) = B_n I_0\Big(\frac{\pi n r}{h}\Big) + C_n K_0\Big(\frac{\pi n r}{h}\Big),$$

и из условия ограниченности (25.59) $C_n = 0$. Следовательно,

$$u(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n I_0\Big(\frac{\pi n r}{h}\Big) \sin\frac{\pi n z}{h},$$

где $\bar{A}_n = A_n B_n$. Из граничных условий получим

$$u|_{r=a} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n I_0\Big(\frac{\pi n a}{h}\Big) \sin\frac{\pi n z}{h} = \sin \pi m z.$$

Таким образом,

$$\bar{A}_n I_0\Big(\frac{\pi n a}{h}\Big) = \delta_{nm},$$

и для решения исходной задачи получим

$$u(r,z) = \frac{I_0(\pi m r/h)}{I_0(\pi m a/h)} \sin\frac{\pi m z}{h}.$$

График этой функции при $a = 1$, $h = 1$, $m = 1$ приведен на рис. 45, а при $a = 1$, $h = 1$, $m = 3$ – на рис. 46.