Линейные и нелинейные уравнения физики

Уравнение Лапласа в полярной системе координат.

Старший преподаватель кафедры ВММФ

Левченко Евгений Анатольевич

25.2. Разделение переменных в уравнении Лапласа в полярных координатах

Рассмотрим первую краевую задачу для круга

$$\Delta_2 u = 0, \qquad u(x,y)\Big|_{\sqrt{x^2+y^2}=a} = f(x,y)\big|_{\sqrt{x^2+y^2}=a}, \tag{25.31}$$

где $\Delta_2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$, а $f(x,y)$ – заданная функция. Задача, для которой $\sqrt{x^2+y^2} < a$, называется внутренней, а задача, для которой $\sqrt{x^2+y^2} > a$, – внешней.

Задачу (25.31) удобно рассматривать в полярной системе координат

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

В этом случае оператор Лапласа примет вид

$$\Delta_2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{25.32}$$

(Доказать самостоятельно.)

Тогда граничное условие (25.31) можно переписать в виде

$$u(r,\varphi)|_{r=a} = f(\varphi), \tag{25.33}$$

где функция $f(\varphi)$ удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке $[0, 2\pi]$. Уравнение Лапласа $\Delta_2 u = 0$ с граничными условиями (25.33) будем решать методом разделения переменных, или методом Фурье. В этом случае частное решение уравнения ищем в виде

$$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi), \tag{25.34}$$

где $R(r)$ и $\Phi(\varphi)$ – «функции разделения» – зависят только от одной переменной (r и φ соответственно). Поэтому далее аргументы этих функций будем опускать. Подставив (25.34) в уравнение Лапласа в полярных координатах, получим

$$\frac{\Phi}{r}\frac{d}{dr}\Big(r\frac{dR}{dr}\Big) + \frac{R}{r^2}\Phi'' = 0.$$

Умножим левую и правую части этого равенства на $r^2/(R\Phi)$, чтобы каждое из слагаемых получившегося выражения зависело только от одной переменной – r или φ:

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\Big(r\frac{dR}{dr}\Big) + \frac{\Phi''}{\Phi} = 0.$$

Последнее равенство возможно лишь в том случае, когда каждое слагаемое равно константе, а сумма этих констант равна нулю. Таким образом,

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\Big(r\frac{dR}{dr}\Big) = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda, \qquad \lambda = \mathrm{const}\,.$$

В результате приходим к следующим уравнениям для функций $\Phi(\varphi)$ и $R(r)$:

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \qquad r\frac{d}{dr}(r\dot{R}) - \lambda R = 0. \tag{25.35}$$

Здесь точкой обозначена производная по переменной r. Функция $u = \Phi R$ (25.34) – гармоническая, поэтому она достигает своего наибольшего значения на границе области гармоничности, для чего должны выполняться условия

$$|R(r)| < \infty, \qquad |\Phi(\varphi)| < \infty.$$

Кроме того, решение уравнения Лапласа в полярных координатах не должно измениться, если к углу φ прибавить 2π:

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \tag{25.36}$$

Для определения функции $\Phi(\varphi)$ и параметра λ получили задачу Штурма–Лиувилля (25.35), (25.36), решение которой приведено в примере III.2.8. В этом решении следует положить $l = 2\pi$. Тогда

$$\Phi_n(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi, \qquad \lambda = n^2. \tag{25.37}$$

Функцию $R(r)$ будем искать в виде $R(r) = r^\mu$, тогда $\dot{R} = \mu r^{\mu-1}$, $\ddot{R} = \mu(\mu-1)r^{\mu-2}$. Подставим в уравнение (25.37):

$$r^2\ddot{R} + r\dot{R} - n^2R = 0$$

и получим $\mu^2 = n^2$ или $\mu = \pm n$. Таким образом,

$$\begin{aligned} &R_n(r) = C_nr^n + B_nr^{-n}, && n \neq 0,\\ &R_0(r) = C_0 + B_0\ln r, && n = 0. \end{aligned} \tag{25.38}$$

Из условия $|R(r)| < \infty$ следует, что для внутренней задачи $(r < a)$ $B_0 = B_n = 0$, а для внешней $(r > a)$ $B_0 = C_n = 0$. В результате приходим к двум возможным вариантам частного решения (25.34)

$$\begin{aligned} &u_n^1(r,\varphi) = r^n(A_n^1\cos n\varphi + B_n^1\sin n\varphi), && r \leqslant a;\\ &u_n^2(r,\varphi) = \frac{1}{r^n}(A_n^2\cos n\varphi + B_n^2\sin n\varphi), && r \geqslant a, \end{aligned} \tag{25.39}$$

где $n = \overline{0, \infty}$. В силу линейности исходного уравнения любая сумма его решений также будет решением этого уравнения. Просуммировав все частные решения (25.39), получим наиболее общий вид решения уравнения Лапласа

$$u_1(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n^1 \cos n\varphi + B_n^1 \sin n\varphi), \quad r \leqslant a; \tag{25.40}$$

$$u_2(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n} (A_n^2 \cos n\varphi + B_n^2 \sin n\varphi), \quad r \geqslant a, \tag{25.41}$$

удовлетворяющего условиям

$$|u(r, \varphi)| < \infty, \qquad u(r, \varphi + 2\pi) = u(r, \varphi). \tag{25.42}$$

Функция $u_1(r, \varphi)$ есть решение для внутренней задачи, а $u_2(r, \varphi)$ – для внешней.

$\Diamond$ Заметим также, что для функции, гармонической в кольце $a < r < b$, условие ограниченности решения выполняется автоматически и общее решение, удовлетворяющее условиям (25.42), примет вид (25.53) (см. пример 25.4).

Положим в (25.40) $r = a$, тогда

$$u_1(a, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n (A_n^1 \cos n\varphi + B_n^1 \sin n\varphi) = f(\varphi). \tag{25.43}$$

Разложим $f(\varphi)$ в ряд Фурье, что всегда возможно, так как она периодична и удовлетворяет условиям Дирихле. Получим

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi,$$

где

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\psi) \cos n\psi \, d\psi, \; \beta_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\psi) \sin n\psi \, d\psi. \tag{25.44}$$

Поскольку разложение в ряд Фурье единственно, то равенство (25.43) возможно лишь в том случае, когда

$$A_n^1 = \frac{\alpha_n}{a^n}, \quad B_n^1 = \frac{\beta_n}{a^n}.$$

Проделаем аналогичные операции для $u_2(r, \varphi)$. Окончательно имеем

$$u_{1,2}(r,\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{\pm n}(\alpha_n\cos n\varphi+\beta_n\sin n\varphi). \qquad (25.45)$$

◊ Если α_n и β_n – коэффициенты Фурье ограниченных и непрерывных функций, то при $r<a$ ряд для $u_1(r,\varphi)$ (при $r>a$ для u_2) сходится равномерно.

Пример 25.2. Найти функцию, гармоническую в круге радиуса a и такую, что 1) $u|_{r=a}=\varphi$; 2) $u|_{r=a}=A\sin^3\varphi+B$, где A, B – некоторые постоянные.

Решение. 1) Математическая постановка задачи имеет вид

$$\Delta u=0,\qquad u|_{r=a}=\varphi,\quad r<a,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$$

Решение этой задачи дается функцией $u_1(r,\varphi)$ (25.45). Найдем коэффициенты разложения функции $f(\varphi)=\varphi$ в ряд Фурье. Из (25.44) найдем

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi\cos n\varphi\,d\varphi.$$

Проинтегрируем один раз по частям, положив $U=\varphi$, $dU=d\varphi$, $dV=\cos n\varphi\,d\varphi$, $V=(\sin n\varphi)/n$. Получим

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\Big[n\varphi\sin n\varphi\Big|_0^{2\pi}-\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin n\varphi}{n}d\varphi\Big]=0,$$

где $n=\overline{1,\infty}$. Аналогично

$$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi\sin n\varphi\,d\varphi=-\frac{2}{n},\quad \alpha_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi\,d\varphi=2\pi.$$

Окончательно получим

$$u(r,\varphi)=\pi-2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\frac{\sin n\varphi}{n}=2\operatorname{arctg}\frac{a-r\cos\varphi}{r\sin\varphi}.$$

2) Математическая постановка задачи имеет вид

$$\Delta u=0,\qquad u|_{r=a}=A\sin^3\varphi+B,\quad r<a,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,$$

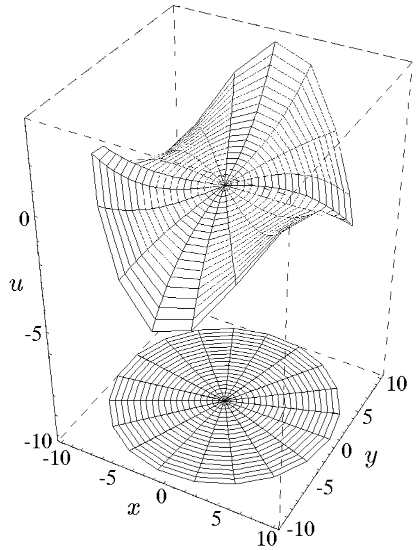

Рис. 44

и ее решение дается формулой (25.45), где в показателе степени нужно выбрать положительное n. С учетом того, что

$$\sin^3\varphi = \frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi,$$

простым сравнением находим

$$\alpha_0 = 2B, \qquad \alpha_k = 0, \quad k = \overline{1,\infty};$$
$$\beta_1 = \frac{3A}{4}, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = -\frac{A}{4}, \quad \beta_k = 0, \quad k = \overline{4,\infty}.$$

Этот же результат можно получить из (25.44) с учетом условия ортогональности тригонометрических функций. Таким образом,

$$u(r,\varphi) = B + \frac{3A}{4}\frac{r}{a}\sin\varphi - \frac{A}{4}\Big(\frac{r}{a}\Big)^3\sin 3\varphi.$$

График этой функции при $A = 1$, $B = 0$ и $a = 10$ приведен на рис. 44.

Пример 25.3. Найти стационарное распределение температуры в бесконечном цилиндре, образующая которого параллельна оси Oz, а направляющая представляет собой границу лежащего в плоскости $z = 0$ кругового сектора радиуса b с углом раствора α, $0 < \alpha < 2\pi$, если на его границе поддерживается температура $u(r,0) = u(r,\alpha) = 0$, $u(b,\varphi) = \varphi$.

Решение. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \qquad (25.46)$$
$$u(r,0) = u(r,\alpha) = 0, \qquad u(b,\varphi) = \varphi.$$

Поскольку граничные условия не зависят от z, то $u(r,\varphi,z) = u(r,\varphi)$. Решение задачи ищем методом разделения переменных:

$$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi). \qquad (25.47)$$

Подставив в (25.46) и домножив на $r^2/(R\Phi)$, получим

$$r^2\frac{R'' + R'/r}{R} + \frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} = 0.$$

Разделив переменные, для определения функции $\Phi(\varphi)$ получим следующую задачу Штурма–Лиувилля:

$$\ddot{\Phi} = \lambda\Phi, \qquad \Phi(0) = \Phi(\alpha) = 0, \qquad (25.48)$$

решение которой дано в примере III.2.2 и имеет вид

$$\Phi_n = A_n \sin\frac{\pi n\varphi}{\alpha}, \qquad n = \overline{1,\infty}, \quad \lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2. \qquad (25.49)$$

Тогда для определения функции $R(r)$ получим уравнение

$$r^2R'' + rR' - \left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2 R = 0, \qquad |R(r)| < \infty, \qquad (25.50)$$

решение которого будем искать в виде

$$R(r) = r^\mu.$$

Подставив его в (25.50), получим

$$\mu(\mu - 1) + \mu - \left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2 = 0,$$

откуда

$$\mu_{1,2} = \pm\frac{\pi n}{\alpha},$$

и общее решение уравнения (25.50) можно представить в виде

$$R_n(r) = B_n r^{\pi n/\alpha} + C_n r^{-\pi n/\alpha}.$$

Из условия $|R(r)| < \infty$ для $r \in [0, b]$ находим, что $C_n \equiv 0$. Тогда

$$R_n(r) = B_n r^{\pi n/\alpha}. \tag{25.51}$$

Подставив (25.49) и (25.51) в (25.47) и просуммировав по n, получим

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n r^{\pi n/\alpha} \sin\frac{\pi n\varphi}{\alpha}, \tag{25.52}$$

где $\bar{A} = A_n B_n$. Подставим (25.52) в граничное условие (25.46)

$$u(b, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n b^{\pi n/\alpha} \sin\frac{\pi n\varphi}{\alpha} = \varphi$$

и разложим правую часть в ряд Фурье по ортогональной системе функций (25.49). Приравняв коэффициенты при одинаковых функциях из этой системы, найдем

$$\bar{A}_n b^{\pi n/\alpha} = \frac{\displaystyle\int\limits_0^\alpha \varphi \sin(\pi n\varphi/\alpha) d\varphi}{\displaystyle\int\limits_0^\alpha \sin^2(\pi n\varphi/\alpha) du} = (-1)^{n+1}\frac{2\alpha}{\pi n}.$$

Окончательно для распределения температуры получим

$$u(r, \varphi) = \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \Big(\frac{r}{b}\Big)^{\pi n/\alpha} \sin\frac{\pi n\varphi}{\alpha}.$$

Пример 25.4. Найти функцию $u(r, \varphi)$, гармоническую в кольце $1 < r < 2$ и такую, что

$$u|_{r=1} = 1 + \cos^2\varphi, \qquad u|_{r=2} = \sin^2\varphi.$$

Решение. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\Delta u = 0, \qquad u(r, \varphi) = u(r, \varphi + 2\pi),$$
$$u(1, \varphi) = 1 + \cos^2\varphi, \qquad u(2, \varphi) = \sin^2\varphi.$$

Перейдем к полярным координатам

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\varphi\varphi}}{r^2} = 0.$$

Частное решение этого уравнения ищем в виде

$$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi).$$

Разделив переменные, получим

$$r^2R'' + rR' - \lambda^2 R = 0,$$
$$\Phi'' + \lambda^2\Phi = 0, \quad \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi).$$

Решение задачи Штурма–Лиувилля для функции Φ приведено в примере III.2.8 и имеет вид

$$\lambda_n = n^2, \quad \Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \quad n = \overline{0,\infty}.$$

Для определения функций $R_n(r)$ получим уравнение

$$r^2R_n'' + rR_n' - n^2R_n = 0.$$

1. Рассмотрим случай, когда $n = 0$. Тогда

$$r^2R_0'' + rR_0' = 0.$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$\Phi_0(r) = C_0 \ln r + D_0.$$

Обозначим $\Phi_0(\varphi) = A_0$, тогда

$$u_0(r,\varphi) = A_0(D_0 + C_0 \ln r) = a_0 + b_0 \ln r,$$

где $a_0 = A_0D_0$, $b_0 = A_0C_0$.

2. Рассмотрим случай, когда $n \neq 0$. Решение ищем в виде $R_n(r) = r^\alpha$. Уравнение для определения $\alpha_n(r)$ запишется следующим образом:

$$r^2[\alpha(\alpha-1)]r^{\alpha-2} + r\alpha r^{\alpha-1} - n^2r^\alpha = 0.$$

Из последнего соотношения находим

$$\alpha = \pm n.$$

Следовательно,

$$R_n(r) = C_nr^n + D_nr^{-n}.$$

Общее решение запишется в виде

$$u_n(r,\varphi) = A_n\Big(C_nr^n + \frac{D_n}{r^n}\Big)\cos n\varphi + R_n\Big(C_nr^n + \frac{D_n}{r^n}\Big)\sin n\varphi.$$

Обозначим

$$A_nC_n = a_n, \qquad A_nD_n = b_n, \qquad B_nC_n = c_n, \qquad B_nD_n = d_n$$

и просуммируем $u_n(r,\varphi)$ по всем n. Тогда

$$u(r,\varphi) = a_0 + b_0 \ln r + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\Big(a_n r^n + \frac{b_n}{r^n}\Big)\cos n\varphi + \Big(c_n r^n + \frac{d_n}{r^n}\Big)\sin n\varphi\Big]. \quad (25.53)$$

Из первого граничного условия

$$u(1,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n + b_n)\cos n\varphi + (c_n + d_n)\sin n\varphi] = 1 + \cos^2\varphi.$$

Разложив правую часть в ряд Фурье и приравняв коэффициенты при одинаковых функциях $\sin n\varphi$ и $\cos n\varphi$, получим

$$a_0 = \frac{3}{2}, \quad a_n + b_n = \frac{1}{2}\delta_{2n}, \quad c_n + d_n = 0, \quad n = \overline{1,\infty}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$1 + \cos^2\varphi = 1 + \frac{1+\cos 2\varphi}{2} = \frac{3}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{2}.$$

Из второго граничного условия

$$u(2,\varphi) = a_0 + b_0 \ln 2 + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\Big(a_n 2^n + \dfrac{b_n}{2^n}\Big)\cos n\varphi + \\ + \Big(c_n 2^n + \dfrac{d_n}{2^n}\Big)\sin n\varphi\Big] = \sin^2\varphi.$$

Аналогично найдем

$$a_0 + b_0 \ln 2 = \frac{1}{2}, \quad a_n 2^n + \frac{b_n}{2^n} = -\frac{1}{2}\delta_{2n}, \quad c_n 2^n + \frac{d_n}{2^n} = 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi.$$

Тогда

$$a_0 = \frac{3}{2}, \quad b_0 = -\frac{1}{\ln 2},$$
$$a_2 + b_2 = \frac{1}{2}, \quad 4a_2 + \frac{b_2}{4} = -\frac{1}{2},$$
$$a_2 = -\frac{1}{6}, \quad b_2 = \frac{2}{3}, \quad a_n = b_n = 0, \quad n \neq 2.$$

Окончательно получим

$$u(r,\varphi)=\frac{3}{2}-\frac{\ln r}{\ln 2}+\Big(\frac{2}{3r^2}-\frac{r^2}{6}\Big)\cos 2\varphi.$$

Рассмотрим теперь задачу Неймана

$$\Delta_2 u(r,\varphi)=0, \qquad E: r<R; \tag{25.54}$$
$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{r=a}=f(\varphi),$$

где n – нормаль к окружности радиуса R, внешняя по отношению к области E. Если функция $f(\varphi)$ удовлетворяет условию разрешимости (24.24), то решение задачи ищем в виде

$$u_{1,2}(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}r^{\pm k}(\bar A_k\cos k\varphi+\bar B_k\sin k\varphi),$$

где произвольные постоянные $\bar A_k$ и $\bar B_k$ следует определить из граничных условий (25.54). Так как направление нормали $\vec n$ совпадает с направлением радиус-вектора $\vec r$, то

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Поскольку это условие не определяет коэффициент $\bar A_0$, то с точностью до произвольной постоянной $C=\bar A_0$ найдем

$$u_1(r,\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k}{ka^{k-1}}(\alpha_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi)+C \tag{25.55}$$

для внутренней задачи и

$$u_2(r,\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^{k-1}}{kr^k}(\alpha_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi)+C \tag{25.56}$$

для внешней. Коэффициенты α_k и β_k по-прежнему определены формулами (25.44).

Аналогично решается третья краевая задача.

Отметим, что преобразование Кельвина (24.12) относительно окружности радиуса a саму окружность оставляет неизменной и, более того, будучи конформным, сохраняет углы между окружностью и нормалью. Поэтому решения внешних задач можно получить из решения внутренних преобразованием Кельвина, т.е. заменой $r\to a^2/r$. Легко убедиться, что такая замена в (25.31) переводит $u_1(r,\varphi)$ в $u_2(r,\varphi)$, а (25.55) в (25.56) и наоборот.

Пример 25.5. Для задачи Неймана (25.54) отметить неправильно поставленные задачи: а) $f(\varphi) = A = \text{const}$; б) $f(\varphi) = \cos\varphi$; в) $f(\varphi) = \sin^2\varphi$.

Решение. Для задачи Неймана должно выполняться условие разрешимости (24.24), которое в полярных координатах для окружности $r = a$ примет вид

$$I = \int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi = 0, \tag{25.57}$$

т.е.

$$\text{а)}\ \ I = 2\pi A, \quad \text{б)}\ \ I = 0, \quad \text{в)}\ \ I = \pi.$$

Отсюда следует, что задачи а) и в) поставлены неправильно. Это означает, что не существует гармонических функций, которые бы на окружности удовлетворяли условиям а) и в).

25.3. Разделение переменных в уравнении Лапласа в цилиндрических координатах

◊ Если цилиндр бесконечен и граничные условия не зависят от переменной z, то решение задачи имеет вид

$$u(r, \varphi, z) = u(r, \varphi).$$

Для определения функции $u(r, \varphi)$ получим двумерную задачу, решение которой получено выше (см., в частности, пример 25.3).

Рассмотрим ряд задач на определение гармонических функций в цилиндре радиуса a и конечной высоты h, решение которых можно найти методом разделения переменных.

Общая постановка задачи в этом случае имеет вид

$$\begin{gathered}\Delta u = 0, \qquad 0 \leqslant r < a, \quad 0 < z < h, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi;\\ u(r, \varphi + 2\pi, z) = u(r, \varphi, z), \qquad u(a, \varphi, z) = f_1(\varphi, z),\\ u(r, \varphi, 0) = f_2(r, \varphi), \qquad u(r, \varphi, h) = f_3(r, \varphi)\end{gathered}$$

и допускает следующую редукцию $u = u_1 + u_2$:

$$\begin{gathered}\Delta u_1 = 0, \quad u_1(a, \varphi, z) = f_1(\varphi, z),\\ u_1(r, \varphi, 0) = u_1(r, \varphi, h) = 0\end{gathered}$$