Линейные и нелинейные уравнения физики

# Уравнение Бесселя. Функции Бесселя первого рода

Старший преподаватель кафедры ВММФ

Левченко Евгений Анатольевич

ГЛАВА 2

# Цилиндрические функции

## 3. Функции Бесселя первого рода

Рассмотрим уравнение

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad \operatorname{Re}\nu \geqslant 0. \tag{3.1}$$

♦ Уравнение (3.1) называется уравнением Бесселя индекса $\nu$, а его решения, не равные тождественно нулю, называются цилиндрическими функциями.

♢ Такие функции возникают при решении методом разделения переменных уравнений в частных производных, содержащих оператор Лапласа, в цилиндрической системе координат. Поэтому они и называются цилиндрическими.

**Теорема 3.1.** *Существует частное решение уравнения* (3.1), *задаваемое равномерно сходящимся рядом*

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)C_0}{k!\Gamma(\nu+1+k)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k+\nu}, \qquad C_0 \neq 0. \tag{3.2}$$

**Доказательство.** Частное решение уравнения мы будем искать в виде обобщенного степенного ряда

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+\sigma}, \tag{3.3}$$

где $\sigma$ — некоторое число, а $C_k$ – некоторые подлежащие определению постоянные, причем $C_0 \not\equiv 0$. Тогда

$$\begin{gathered}
xy'(x) = C_0\sigma x^\sigma + C_1(\sigma+1)x^{\sigma+1} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k(k+\sigma)x^{k+\sigma},\\
x^2y''(x) = C_0\sigma(\sigma-1)x^\sigma + C_1(\sigma+1)\sigma x^{\sigma+1} +\\
+\sum_{k=2}^{\infty} c_k(k+\sigma)(k+\sigma-1)x^{k+\sigma}, \qquad (3.4)\\
x^2y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\sigma+2} = \sum_{k=2}^{\infty} C_{k-2}x^{k+\sigma}.
\end{gathered}$$

В последнем равенстве мы сделали замену $n+2=k$. Подставим (3.2) и (3.3) в уравнение (3.1) и получим

$$[\sigma(\sigma-1)+\sigma-\nu^2]x^\sigma C_0 +$$
$$+[\sigma(\sigma+1)+(\sigma+1)-\nu^2]x^{\sigma+1}C_1 +$$
$$+x^\sigma\sum_{k=2}^{\infty}\{[(k+\sigma)(k+\sigma-1)+(k+\sigma)-\nu^2]C_k+C_{k-2}\}x^k=0.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получим

$$\begin{array}{ll}
C_0[\sigma^2-\nu^2]=0 & x^\sigma, \\
C_1[(\sigma+1)^2-\nu^2]=0, & x^{\sigma+1}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots, & \\
C_k[(k+\sigma)^2-\nu^2]+C_{k-2}=0, & x^{\sigma+k}, \quad k>2.
\end{array}$$

Так как $C_0\neq 0$, то из первого уравнения находим $\sigma=\pm\nu$.

1. Пусть $\sigma=\nu$, тогда из второго равенства находим $C_1=0$ и

$$C_k=-\frac{C_{k-2}}{(k+\nu)^2-\nu^2}=-\frac{C_{k-2}}{k(2\nu+k)}.$$

Следовательно, для нечетного $k$ $(k=2l+1)$

$$C_{2l+1}=0,$$

а для четного $k$ $(k=2l)$

$$C_{2l}=-\frac{C_{2(l-1)}}{2^2(\nu+l)l},$$

т.е.

$$C_2=-\frac{C_0}{2^2(\nu+1)1};$$
$$C_4=\frac{C_0}{2^4 2!(\nu+1)(\nu+2)};$$
$$\vdots$$
$$C_{2l}=(-1)^l\frac{C_0}{2^{2l}l!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+l)}.$$

Нетрудно убедиться (например, используя признак Даламбера), что ряд (3.3) сходится равномерно на любом промежутке $[0, a]$ и, следовательно, функция $y(x)$ (3.3) является решением уравнения Бесселя для любого $C_0$.

С учетом соотношений

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1), \quad l! = \Gamma(l+1),$$
$$\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+l)} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(l+\nu+1)}$$

получим

$$C_{2l} = \frac{(-1)^l\Gamma(\nu+1)C_0}{2^{2l}\Gamma(l+\nu+1)\Gamma(l+1)},$$

и решением уравнения (3.1) будет ряд

$$y(x) = \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{\Gamma(\nu+1)2^\nu C_0}{l!\Gamma(l+\nu+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{\nu+2l}, \tag{3.5}$$

что и требовалось доказать.

♢ Удобно в качестве $C_0$ взять число

$$C_0 = \frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}.$$

♦ Функция

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k+\nu} \tag{3.6}$$

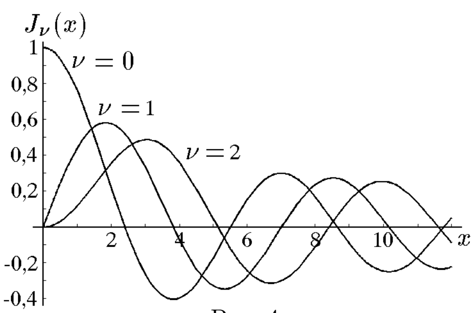


Рис. 4

называется функцией Бесселя первого рода (см. рис. 4). Здесь комплексное число $\nu$ – индекс функции Бесселя, а $x$ – независимая переменная.

◊ Поскольку уравнение (3.1) не меняется при замене $\nu$ на $-\nu$, то функция $J_{-\nu}(x)$ также является решением уравнения (3.1).

**Следствие 3.1.1.** *Справедливо соотношение*

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \tag{3.7}$$

**Доказательство.** Рассмотрим функцию

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+1-n)} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k-n}.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{\Gamma(k+1-n)} = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant k < n, \\ \dfrac{1}{(k-n)!} & k \geqslant n. \end{cases}$$

Тогда

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(k-n)!} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k-n}.$$

Положив $k = l + n$, с учетом (3.6) получим

$$J_{-n}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{l+n} \frac{1}{l!(l+n)!} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2l+n} = (-1)^n J_n(x), \tag{3.8}$$

что и требовалось доказать.

**Следствие 3.1.2.** *Справедливо соотношение*

$$J_{-n}(-x) = J_n(x). \tag{3.9}$$

**Доказательство.** Из соотношения (3.8) следует

$$J_{-n}(-x) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{l+n} \frac{1}{l!(l+n)!} \Big(\frac{-x}{2}\Big)^{2l+n} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{3l+2n} \frac{1}{l!(l+n)!} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2l+n} = J_n(x),$$

что и требовалось доказать.

**Теорема 3.2.** *Если $\nu$ не является целым числом, то функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ линейно независимы.*

**Доказательство.** Выпишем уравнения Бесселя для функций $J_\nu$ и $J_{-\nu}$:

$$\frac{d}{dx}[xJ'_\nu(x)] + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right)J_\nu(x) = 0,$$
$$\frac{d}{dx}[xJ'_{-\nu}(x)] + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right)J_{-\nu}(x) = 0.$$

Первое из уравнений умножим на $J_{-\nu}(x)$, второе — на $J_\nu(x)$ и вычтем его из первого. Получим

$$\begin{aligned}J_{-\nu}(x)\frac{d}{dx}[xJ'_\nu(x)] - J_\nu(x)\frac{d}{dx}[xJ'_{-\nu}(x)] +\\ +xJ'_{-\nu}(x)J'_\nu(x) - xJ'_\nu(x)J'_{-\nu}(x) =\\ = \frac{d}{dx}\{x[J_{-\nu}(x)J'_\nu(x) - J_\nu(x)J'_{-\nu}(x)]\} =\\ = -\frac{d}{dx}\{xW[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)]\} = 0,\end{aligned}$$

где $W[J_\nu, J_{-\nu}]$ — определитель Вронского функций $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$. Следовательно,

$$xW[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)] = C.$$

Отсюда в пределе $x \to 0$ можно определить константу $C$:

$$\begin{aligned}C = \lim_{x\to 0} xW[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)] =\\ = \lim_{x\to 0}[xJ_\nu(x)J'_{-\nu}(x) - xJ_{-\nu}(x)J'_\nu(x)].\end{aligned}$$

С учетом определения функции Бесселя (3.6) и соотношения

$$xJ'_\nu(x) = \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{2l+\nu}{l!\Gamma(\nu+l+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l+\nu}$$

находим

$$\begin{aligned}C = \lim_{x\to 0}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+l}(2l-\nu)}{k!\Gamma(\nu+k+1)l!\Gamma(-\nu+l+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2l} -\right.\\ \left. - \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+l}(2l+\nu)}{l!\Gamma(-\nu+k+1)k!\Gamma(\nu+l+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2l}\right\}.\end{aligned}$$

Отличны от нуля только слагаемые с $k = l = 0$, поэтому

$$C = \frac{-\nu}{\Gamma(1+\nu)\Gamma(1-\nu)} - \frac{\nu}{\Gamma(1-\nu)\Gamma(1+\nu)} = \\ = -\frac{2\nu}{\nu\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)} = \frac{-2}{\pi}\sin\pi\nu.$$

Здесь мы воспользовались соотношением

$$\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu) = \frac{\pi}{\sin\pi\nu}.$$

Таким образом,

$$C = -\frac{2}{\pi}\sin\pi\nu$$

а

$$W[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)] = -\frac{2}{\pi x}\sin\pi\nu. \tag{3.10}$$

Из (3.10), в частности, вытекает, что $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ линейно независимы при нецелом $\nu$, что и требовалось доказать.

**Следствие.** Если $\nu \neq n$, то общее решение уравнения (3.1) имеет вид

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x). \tag{3.11}$$

**Доказательство** непосредственно следует из того, что функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ линейно независимы (см. уравнение (3.10)) и являются решениями линейного дифференциального уравнения второго порядка (3.1).

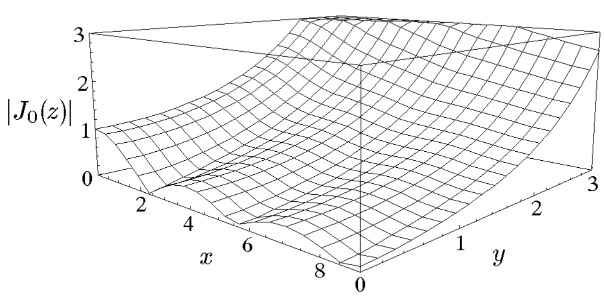


Рис. 5

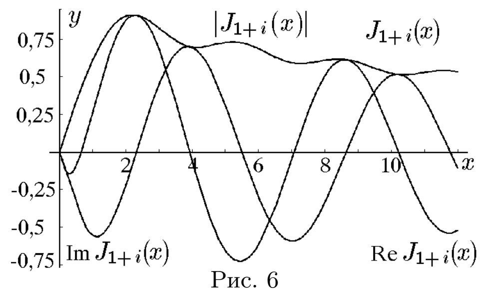


Рис. 6

◊ Заметим, что функции Бесселя (3.6) определены не только для вещественных аргументов и индексов, но и для комплексных. Так, например, на рис. 5 изображен модуль функции Бесселя нулевого индекса от комплексного аргумента $z$, а на рис. 6 приведены графики действительной и мнимой частей, а также модуля функции Бесселя $J_{1+i}(x)$ комплексного индекса.

**Пример 3.1.** Найти общее решение уравнения

$$y'' + \frac{y'}{x} + \Big(1 - \frac{1}{9x^2}\Big)y = 0.$$

**Решение.** Данное уравнение запишем в виде

$$x^2y'' + xy' + \Big(x^2 - \frac{1}{9}\Big)y = 0.$$

Оно является уравнением Бесселя с $\nu = 1/3$. Поэтому его общее решение есть

$$y(x) = C_1 J_{1/3}(x) + C_2 J_{-1/3}(x).$$

**Пример 3.2.** Найти общее решение уравнения

$$x^2y'' + xy' + 4(x^4 - 2)y = 0. \tag{3.12}$$

**Решение.** Сделаем в уравнении (3.12) замену переменных $x^2 = \tau$, $x = \sqrt{\tau}$. Тогда

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\tau}{dx}\frac{dy}{d\tau} = 2x\frac{dx}{d\tau} = 2\sqrt{\tau}\frac{dy}{d\tau},$$
$$y'' = 2\sqrt{\tau}\frac{d}{d\tau}y' = \sqrt{\tau}\frac{d}{d\tau}\sqrt{\tau}\frac{dy}{d\tau} = 2\frac{dy}{d\tau} + 4\tau\frac{d^2y}{d\tau^2}.$$

Подставив эти выражения в уравнение (3.12), получим

$$\tau\Big(2\frac{dy}{d\tau}+4\tau\frac{d^2y}{d\tau^2}\Big)+2\sqrt{\tau}\sqrt{\tau}\frac{dy}{d\tau}+4(\tau^2-2)y=0$$

или

$$\tau^2\frac{d^2y}{d\tau^2}+\tau\frac{dy}{d\tau}+(\tau^2-2)y=0.$$

Это уравнение Бесселя с индексом $\nu=\sqrt{2}$. Его общее решение имеет вид

$$y(\tau)=C_1J_{\sqrt{2}}(\tau)+C_2J_{-\sqrt{2}}(\tau).$$

Возвратившись к исходным переменным, получим

$$y(x)=C_1J_{\sqrt{2}}(x^2)+C_2J_{-\sqrt{2}}(x^2).$$

**Пример 3.3.** * Получить дифференциальное уравнение для функции

$$f(x)=J_\mu(x)J_\nu(x). \tag{3.13}$$

**Решение.** Введем вспомогательные функции

$$\begin{gathered}\psi(x)=J'_\mu(x)J'_\nu(x),\\ \varphi(x)=\mu^2J_\mu(x)J'_\nu(x)+\nu^2J_\nu(x)J'_\mu(x).\end{gathered} \tag{3.14}$$

Продифференцируем $f(x)$ дважды

$$f'(x)=J'_\mu(x)J_\nu(x)+J_\mu(x)J'_\nu(x); \tag{3.15}$$

$$f''(x)=J''_\mu(x)J_\nu(x)+J_\mu(x)J''_\nu(x)+2J'_\mu(x)J'_\nu(x). \tag{3.16}$$

Если учесть, что для функций Бесселя имеет место уравнение (3.1)

$$J''_\mu(x)=\Big(\frac{\mu^2}{x^2}-1\Big)J_\mu(x)-\frac{1}{x}J'_\mu(x), \tag{3.17}$$

то (3.16) перепишется в виде

$$\begin{gathered}f''(x)=\Big(\frac{\mu^2}{x^2}-1\Big)J_\mu(x)J_\nu(x)-\frac{1}{x}J'_\mu(x)J_\nu(x)+\\ +\Big(\frac{\nu^2}{x^2}-1\Big)J_\mu(x)J_\nu(x)-\frac{1}{x}J'_\nu(x)J_\mu(x)+2J'_\mu(x)J'_\nu(x).\end{gathered} \tag{3.18}$$

Принимая во внимание (3.13) и (3.14), из (3.18) запишем

$$\psi(x)=\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{2x}f'(x)+\Big(1-\frac{\mu^2+\nu^2}{2x^2}\Big)f(x). \tag{3.19}$$

Продифференцировав (3.19), получим