Линейные и нелинейные уравнения физики

Функции Бесселя второго рода. Рекуррентные соотношения для функций Бесселя

Старший преподаватель кафедры ВММФ

Левченко Евгений Анатольевич

Решение. Используя для левой части определение функции Бесселя (3.6) и свойства гамма-функции (см. пример I.40.10), получим

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{\mu+\nu+2k}}{k!\Gamma(\mu+\nu+k+1)} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{\mu+\nu+2k}\varphi \cos([\mu-\nu]\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\mu+\nu+2k+1)}{k!\Gamma(\mu+\nu+k+1)\Gamma(\mu+k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{\mu+\nu+2k}.$$

Сравнив это разложение с (3.32), убеждаемся в справедливости соотношения (3.33).

4. Функции Бесселя второго рода

Как выяснено в предыдущем разделе, при целых $\nu = n$ частные решения уравнения Бесселя (3.1)

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0 \tag{4.1}$$

не являются линейно независимыми, так как

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x),$$

т.е. в этом случае найдено только одно частное решение уравнения (4.1).

Рассмотрим уравнения Бесселя с нецелыми ν. Его общее решение имеет вид (см. рис. 7)

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x).$$

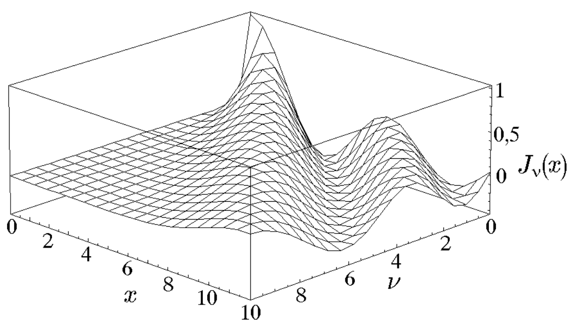

Рис. 7

Если положить

$$C_1 = \operatorname{ctg} \pi\nu, \qquad C_2 = -\frac{1}{\sin \pi\nu},$$

то получим функцию

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}. \tag{4.2}$$

♦ Функция (4.2) называется функцией Неймана

◊ Она была введена Вебером и иногда называется также функцией Вебера и часто обозначается через $Y_\nu(x)$. Функцию $N_\nu(x)$ называют также бесселевой (или цилиндрической) функцией второго рода индекса ν от аргумента x (см. рис. 8).

◊ Функция Неймана (4.2) определена для нецелых ν. Однако ее можно доопределить для целых ν, полагая

$$N_n(x) = \lim_{\nu\to n} N_\nu(x).$$

Утверждение 4.1. *Существует предел*

$$N_n(x) = \lim_{\nu\to n} N_\nu(x) =$$
$$= \frac{2}{\pi}\Big(\gamma + \ln\frac{x}{2}\Big)J_n(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{-n+2k} -$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k+n}\Big\{\sum_{m=1}^{k+n}\frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}\Big\}, \tag{4.3}$$

где γ – постоянная Эйлера, введенная ранее в разд. «Гамма-функция» части I.

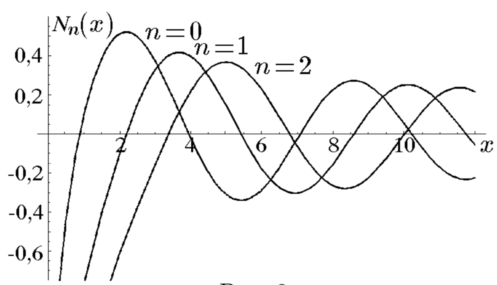

Рис. 8

Доказательство этого утверждения см., например, в [27].

Утверждение 4.2. *Функции* $J_\nu(x)$ *и* $N_\nu(x)$ *линейно независимы при любом* ν.

Для доказательства того, что функция Неймана $N_\nu(x)$ и функция Бесселя первого рода $J_\nu(x)$ линейно независимы при всех ν, рассмотрим определитель Вронского

$$W(x) = W[J_\nu(x), N_\nu(x)] = \begin{vmatrix} J_\nu(x) & N_\nu(x) \\ J'_\nu(x) & N'_\nu(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} J_\nu(x) & \dfrac{J_\nu(x)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu} \\ J'_\nu(x) & \dfrac{J'_\nu(x)\cos\pi\nu - J'_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu} \end{vmatrix} = \frac{\cos\pi\nu}{\sin\pi\nu}\begin{vmatrix} J_\nu(x) & J_\nu(x) \\ J'_\nu(x) & J'_\nu(x) \end{vmatrix} -$$

$$- \frac{1}{\sin\pi\nu}\begin{vmatrix} J_\nu & J_{-\nu}(x) \\ J'_\nu(x) & J'_{-\nu}(x) \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sin\pi\nu} W[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)].$$

Из соотношения (4.2) получим

$$W[J_\nu(x), N_\nu(x)] = -\frac{1}{\sin\pi\nu} W[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)] =$$

$$= -\frac{1}{\sin\pi\nu}\Big(-\frac{2}{\pi x}\Big)\sin\pi\nu.$$

Таким образом,

$$W[J_\nu(x), N_\nu(x)] = \frac{2}{\pi x}. \tag{4.4}$$

Эта формула получена в предположении, что ν не является целым числом. Но в силу теоремы 4.1 ее можно распространить и на целые значения $\nu = n$.

Из соотношения (4.4) следует, что $W[J_\nu(x), N_\nu(x)] \neq 0$ при любых значениях ν и x. Следовательно, $J_\nu(x)$ и $N_\nu(x)$ линейно независимы, что и требовалось доказать.

Утверждение 4.3. *Функции* $J_\nu(x)$ *и* $N_\nu(x)$ *образуют фундаментальную систему решений уравнения Бесселя при любом, в том числе и целом, индексе. Общее решение уравнения Бесселя* (3.1) *при любом индексе* ν *дается формулой*

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 N_\nu(x). \tag{4.5}$$

Справедливость утверждения непосредственно следует из того, что функции $J_\nu(x)$ и $N_\nu(x)$ линейно независимы и являются решениями линейного дифференциального уравнения второго порядка (3.1).

Пример 4.1. Найти общее решение уравнения

$$x^2y'' + xy' + \left(a^2x^2 - \nu^2\right)y = 0, \tag{4.6}$$

где a и ν — некоторые постоянные.

Решение. Положим $x = t/a$, тогда

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{dy}{dt}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = a^2\frac{d^2y}{dt^2}$$

и уравнение примет вид

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + \left(t^2 - \nu^2\right)y = 0.$$

Следовательно,

$$y(t) = C_1J_\nu(t) + C_2N_\nu(t).$$

Возвратившись к исходным переменным, получим

$$y(x) = C_1J_\nu(ax) + C_2N_\nu(ax). \tag{4.7}$$

5. Рекуррентные соотношения для функций Бесселя

Теорема 5.1. *Справедливы следующие рекуррентные соотношения:*

$$\frac{d}{dx}[x^{-\nu}J_\nu(x)] = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}, \tag{5.1}$$

$$\frac{d}{dx}[x^{\nu}J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x). \tag{5.2}$$

Доказательство. Из определения (3.6) следует

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = \frac{d}{dx}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\frac{x^{2k}}{2^{2k+\nu}}\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\frac{x^{2k-1}}{2^{2k+\nu}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(-1)}{(k-1)!\Gamma([k-1]+[\nu+1]+1)}\frac{x^{2(k-1)+1+\nu}}{2^{2(k-1)+(\nu+1)}}\frac{1}{x^\nu} =$$

$$= \frac{(-1)}{x^\nu}J_{\nu+1}(x).$$

Аналогично получаем

$$\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = \frac{d}{dx}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\frac{x^{2k+2\nu}}{2^{2k+\nu}}\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2(k+\nu)}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\frac{x^{2k+2\nu-1}}{2^{2k+\nu}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+[\nu-1]+1)}\frac{x^{2k+(\nu-1)}}{2^{2k+(\nu-1)}}x^\nu = x^\nu J_{\nu-1}(x),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 5.1.1. Справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$xJ'_\nu(x) = \nu J_\nu(x) - xJ_{\nu+1}(x). \tag{5.3}$$

$$xJ'_\nu(x) = -\nu J_\nu(x) + xJ_{\nu-1}(x). \tag{5.4}$$

Доказательство непосредственно следует из соотношений (5.1) и (5.2).

Пример 5.1. Доказать справедливость рекуррентного соотношения (5.3), исходя из определения бесселевых функций (3.6).

Решение. Из определения (3.6) следует, что

$$xJ'_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+\nu)}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k+\nu} =$$

$$= \nu\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k+\nu} +$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!\Gamma(k+\nu+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k+\nu}.$$

Положив $l = k-1$, получим

$$xJ'_\nu(x) = \nu J_\nu(x) + 2\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{l!\Gamma(l+(\nu+1)+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2l+(\nu+1)+1} =$$
$$= \nu J_\nu(x) - xJ_{\nu+1}(x),$$

что и требовалось доказать.

Пример 5.2. Доказать справедливость рекуррентного соотношения (5.4), исходя из определения бесселевых функций (3.6).

Решение. Рассмотрим

$$xJ'_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+\nu)}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k+\nu}.$$

Аналогично предыдущему примеру

$$xJ'_\nu(x) = \nu\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k[(2k+2\nu)-\nu]}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k+\nu} =$$

$$= -\nu\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k+\nu} +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+2\nu)}{k!(k+\nu)\Gamma(k+(\nu-1)+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k+(\nu-1)}\frac{x}{2} =$$

$$-\nu J_\nu(x) + xJ_{\nu-1}(x),$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\Gamma(k+\nu+1) = (k+\nu)\Gamma(k+(\nu-1)+1).$$

Таким образом, соотношение (5.4) доказано.

Следствие 5.1.2. Справедливы рекуррентные соотношения

$$2J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x), \tag{5.5}$$

$$2\frac{\nu}{x}J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x). \tag{5.6}$$

Доказательство. Складывая соотношения (5.3) и (5.4), получим (5.5). Вычтя (5.4) из (5.3), получим (5.6).

◊ Положим в (5.3) $\nu = 0$. Тогда

$$J_0'(x) = -J_1(x). \tag{5.7}$$

Следовательно, нули функции $J_1(x)$ совпадают с максимумами и минимумами функции $J_0(x)$ (см. рис. 4).

Следствие 5.1.3. Справедливы соотношения

$$\Big(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\Big)^m\Big[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\Big] = (-1)^m\frac{J_{\nu+m}(x)}{x^{\nu+m}}, \tag{5.8}$$

$$\Big(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\Big)^m[x^\nu J_\nu(x)] = x^{\nu-m}J_{\nu-m}(x). \tag{5.9}$$

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции. Представим (5.1) в виде

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\Big[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\Big] = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+1}}.$$

Таким образом, при $m = 1$ соотношение (5.8) справедливо. Предположим, что (5.8) выполняется при некотором $m = k$. Проверим справедливость соотношения (5.8) при $m = k + 1$. Для этого продифференцируем его по x и воспользуемся соотношением (5.1). Получим

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\Big)^k\Big[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\Big] = (-1)^k\frac{d}{dx}\Big[\frac{J_{\nu+k}(x)}{x^{\nu+k}}\Big] = (-1)^{k+1}\frac{J_{\nu+k+1}(x)}{x^{\nu+k}}.$$

Следовательно,

$$\Big(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\Big)\Big(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\Big)^k\Big[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\Big] = (-1)^{k+1}\frac{J_{\nu+k+1}(x)}{x^{\nu+k+1}},$$

что и требовалось доказать. Аналогично доказывается (5.9).

Следствие 5.1.4. Справедливы соотношения

$$\Big(\frac{d}{dx}\Big)^m x^{\nu/2}J_\nu(2\sqrt{qx}) = q^{m/2}x^{(\nu-m)/2}J_{\nu-m}(2\sqrt{qx}); \tag{5.10}$$

$$\Big(\frac{d}{dx}\Big)^m x^{-\nu/2}J_\nu(2\sqrt{qx}) = \\ = (-1)^m q^{m/2}x^{-(\nu+m)/2}J_{\nu+m}(2\sqrt{qx}). \tag{5.11}$$

Доказательство. Проведем в (5.9) замену переменных

$$x = 2\sqrt{qt}, \qquad \frac{1}{x}\frac{d}{dx} = \frac{1}{2q}\frac{d}{dt} \tag{5.12}$$

и получим

$$\Big(\frac{1}{2q}\frac{d}{dt}\Big)^m [2\sqrt{qt}]^\nu J_\nu(2\sqrt{qt}) = (2\sqrt{qt})^{\nu-m} J_{\nu-m}(2\sqrt{qt}).$$

Заменив здесь t на x, получим (5.10). Аналогично из (5.8) придем к (5.11).

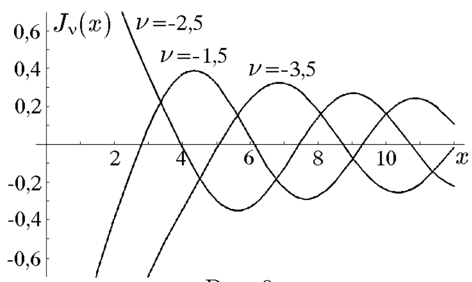

Рис. 9

Следствие 5.1.5. Функции Бесселя полуцелого индекса выражаются через элементарные функции (см. рис. 9)

$$J_{1/2+m}(x) = (-1)^m x^{m+1/2}\Big[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\Big]^m\Big[\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\Big]; \tag{5.13}$$

$$J_{-1/2-m}(x) = x^{m+1/2}\Big[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\Big]^m\Big[\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\Big]. \tag{5.14}$$

Доказательство. Вычислим $J_{1/2}(x)$ и $J_{-1/2}(x)$:

$$J_{1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+3/2)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k+1/2};$$

$$J_{-1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1/2)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k-1/2}.$$

Из основного функционального соотношения для гамма-функции $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ и из того, что $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, следует

$$\Gamma(k+3/2) = \frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}}\sqrt{\pi} \quad \text{и} \quad \Gamma(k+1/2) = \frac{(2k-1)!!}{2^k}\sqrt{\pi}.$$

Следовательно,

$$J_{1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{k+1}}{k!(2k+1)!!\sqrt{\pi}} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k+1/2}$$

и

$$J_{-1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{k}}{k!(2k-1)!!\sqrt{\pi}} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k-1/2}.$$

Заметим, что

$$k!(2k+1)!! = \frac{(2k)!!}{2^k}(2k+1)!! = \frac{(2k+1)!}{2^k},$$
$$k!(2k-1)!! = \frac{(2k)!}{2^k}.$$

Тогда

$$J_{1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\sqrt{2}}{(2k+1)!\sqrt{\pi}} x^{2k+1}\frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,$$
$$J_{-1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\sqrt{2}}{(2k)!\sqrt{\pi}} x^{2k}\frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

Следовательно,

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \quad \text{и} \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x. \tag{5.15}$$

Положим в соотношении (5.8) $\nu = 1/2$, а в (5.9) $\nu = -1/2$ и воспользуемся соотношениями (5.15). Получим формулы (5.13) и (5.14), что и требовалось доказать.

Пример 5.3. Вычислить $J_{3/2}(x)$ и $J_{-3/2}(x)$.

Решение. Подставим в (5.13) $m = 1$ и в (5.14) $m = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} J_{3/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big(\frac{\sin x}{x} - \cos x\Big), \\ J_{-3/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big(-\sin x - \frac{\cos x}{x}\Big). \end{aligned} \tag{5.16}$$

Пример 5.4. Доказать справедливость соотношений

$$\begin{aligned} &J_0'(x) = -J_1(x), \\ &J_2(x) - J_0(x) = 2J_0''(x), \\ &x^2 J_n''(x) = (n^2 - n - x^2)J_n + xJ_{n+1}(x). \end{aligned} \tag{5.17}$$

Решение. Применив рекуррентную формулу

$$-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}[x^{-\nu}J_\nu(x)] = x^{-(\nu+1)}J_{\nu+1}(x)$$

для $\nu = 0$, получим первое равенство.

Продифференцировав полученное равенство и воспользовавшись соотношением

$$J_\nu'(x) = \frac{1}{2}[J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)]$$

для $\nu = 1$, получим второе равенство.

В тождестве

$$x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) \equiv 0$$

воспользуемся рекуррентным соотношением (5.5). Тогда

$$x^2 J_n''(x) = -\frac{x}{2}[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)] - (x^2 - n^2)J_n(x).$$

Исключим из этого равенства $J_{n-1}(x)$ с помощью соотношения (5.6) и получим

$$x^2 J_n''(x) = -\frac{x}{2}[\frac{2n}{x}J_n(x) - 2J_{n+1}(x)] - (x^2 - n^2)J_n(x)$$

или

$$x^2 J_n''(x) = (n^2 - n - x^2)J_n(x) + xJ_{n+1}(x).$$

Пример 5.5. Доказать соотношение

$$\int\limits_0^x J_\nu(t)dt = 2\sum_{k=0}^{\infty} J_{\nu+2k+1}(x), \quad \nu > -1. \tag{5.18}$$