Линейные и нелинейные уравнения физики

Лекция. Гамма и Бета функции.

Старший преподаватель кафедры ВММФ

Левченко Евгений Анатольевич

Пример 37.11. Вычислить

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin at}{t}dt, \qquad a > 0.$$

Решение. Обозначим

$$f(t) = \sin at, \qquad \psi(p) = 1/p;$$

$$\varphi(p) = \frac{a}{p^2 + a^2}, \qquad g(t) = 1.$$

Тогда по формуле Парсеваля (37.15)

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin at}{t}dt = \int\limits_0^\infty \frac{a}{t^2 + a^2}dt = \operatorname{arctg} \frac{t}{a}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

38. Гамма-функция

◊ Для изучения некоторых свойств преобразования Лапласа нам потребуется ввести гамма- и бета-функции. Гамма- и бета-функции являются представителями класса специальных функций, и их применение не ограничивается только приложением к преобразованиям Лапласа.

♦ В области $\operatorname{Re} z > 0$ гамма-функция (или эйлеров интеграл второго рода) определяется абсолютно сходящимся инте-

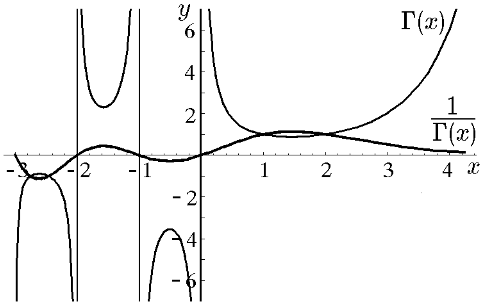

Рис. 98

гралом

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \qquad (38.1)$$

Здесь для функции $t^{z-1} = e^{(z-1)\,\mathrm{Ln}\,t}$ выбирается однозначная ветвь, такая что $\mathrm{Ln}\,t = \ln t$.

$\Diamond$ Характер аналитического продолжения функции (38.1) в область $\mathrm{Re}\,z < 0$ будет исследован ниже (см. свойство 4). Поведение функции $\Gamma(z)$ для действительного аргумента иллюстрирует рис. 98, а поведение модуля Γ-функции для комплексных z – рис. 99.

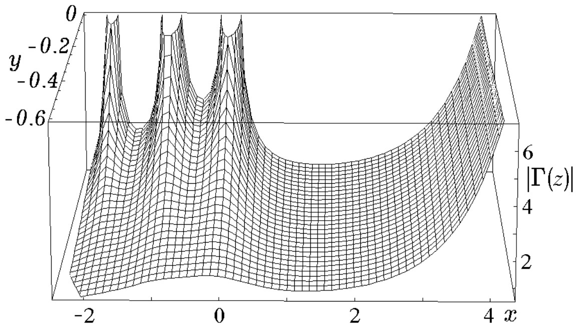

Рис. 99

$\Diamond$ Следует отметить, что иногда в качестве определения гамма функции вместо (38.1) используют интегральное представление вида

$$\Gamma(z) = 2\int\limits_0^\infty e^{-\tau^2} \tau^{2z-1} d\tau. \qquad (38.2)$$

Кроме того, Вейерштрассом было показано, что все свойства гамма функции, вытекающие из (38.1), (38.2) могут быть получены представлением $\Gamma(z)$ в виде бесконечного произведения

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^\infty \Big(1 + \frac{z}{n}\Big) e^{-z/n}, \qquad (38.3)$$

где

$$\gamma = -\lim_{z\to 1}\frac{d\Gamma(z)}{dz} = -\int\limits_0^\infty e^{-t}\ln t\,dt = \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\Big) \quad (38.4)$$

– постоянная Эйлера, приближенное значение которой равно 0,5772...

Если эквивалентность определений (38.1), (38.2) очевидна, поскольку переменные интегрирования связаны соотношением $\sqrt{t} = \tau$, то их эквивалентность представлению (38.3) будет показана ниже.

$\Diamond$ Набор определений $\Gamma(z)$ в виде (38.1), (38.2), (38.3) удобен в конкретных приложениях, использующих гамма-функцию.

Свойства гамма-функции

Свойство 1. Функция $\Gamma(z)$ аналитична в области $\operatorname{Re} z > 0$.

Доказательство. Представим интеграл (38.1) в виде

$$\Gamma(z) = P(z) + Q(z),$$

где

$$P(z) = \int\limits_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt, \qquad Q(z) = \int\limits_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt.$$

Так как в полосе $0 < \alpha < \operatorname{Re} z \leqslant A$ функции $|P(z)|$, $|Q(z)|$ мажорируются сходящимися интегралами

$$|P(z)| \leqslant \int\limits_0^1 t^{\alpha-1}dt, \qquad |Q(z)| \leqslant \int\limits_1^\infty e^{-t}t^{A-1}dt,$$

то интеграл $\Gamma(z)$ также сходится, причем равномерно.

Пусть C – произвольный кусочно-гладкий замкнутый контур в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$. Рассмотрим интеграл

$$J = \int\limits_C \Gamma(z)dz = \int\limits_C \left(\int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\right)dz.$$

Изменение порядка интегрирования возможно, так как интеграл $\int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ сходится равномерно в области Re $z \geqslant \alpha > 0$. Тогда

$$J = \int\limits_0^\infty e^{-t}\left(\int\limits_C t^{z-1}dz\right)dt.$$

По теореме Коши интеграл в скобках равен нулю, поэтому $J = 0$.

Интеграл $\int\limits_C \Gamma(z)dz$ не зависит от пути интегрирования. Следовательно, по теореме Морера 15.1 $\Gamma(z)$ аналитична в полуплоскости Re $z > 0$, что и требовалось доказать.

$\Diamond$ Следует отметить, что свойство 1 с достаточной очевидностью вытекает из определения (38.3).

Свойство 2 (основное функциональное соотношение). Для всех z, таких что Re $z > 0$, справедливо

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{38.5}$$

Доказательство. Действительно, воспользуемся определением (38.1)

$$\Gamma(z+1) = \int\limits_0^\infty t^z e^{-t}dt,$$

которое проинтегрируем один раз по частям, полагая $U = t^z$, $dU = zt^{z-1}dt$, $V = -e^{-t}$, $dV = e^{-t}dt$. Тогда

$$\Gamma(z+1) = -t^z e^{-t}\Big|_0^\infty + z\int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt = z\Gamma(z),$$

что и требовалось доказать.

Основное функциональное соотношение можно получить, если воспользоваться определением (38.3). Действительно, если $z \neq -j$, $j = \overline{0, \infty}$, то

$$\frac{\Gamma(1+z)}{\Gamma(z)} = \frac{ze^{\gamma z}\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+z/k)e^{-z/k}}{(1+z)e^{\gamma(1+z)}\prod\limits_{n=1}^{\infty}[1+(1+z)/n]e^{-(z+1)/n}} =$$

$$= \frac{1}{1+z}\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{(1+1/n)^{z+1}}{1+(1+z)/n}z\lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^{N}\frac{1+z/k}{(1+1/k)^z} =$$

$$= \frac{1}{1+z}\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{(1+1/n)(z+n)}{z+n+1} = z\lim_{N\to\infty}\frac{N+1}{N+1+z} = z,$$

что и доказывает эквивалентность определений (38.1) и (38.3).

Свойство 3. Для натуральных n справедливо соотношение

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (38.6)$$

Доказательство. Положим в (38.5) $z = n$. Тогда

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = \cdots = n!\Gamma(1).$$

Поскольку

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-t}dt = 1,$$

соотношение (38.6) доказано.

Свойство 4. Функцию $\Gamma(z)$ можно аналитически продолжить на всю комплексную плоскость z, кроме точек $z = -n$, $n = \overline{0, \infty}$, в которых $\Gamma(z)$ имеет полюсы первого порядка с вычетами, равными

$$\operatorname*{Res}_{z=-n}\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}. \qquad (38.7)$$

Доказательство. Действительно,

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt + \int\limits_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = P(z) + Q(z).$$

Функция $Q(z)$ – аналитическая, так как $t \neq 0$.

$$P(z) = \int\limits_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int\limits_0^1 t^{z-1+n} dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{t^{z+n}}{z+n}\Big|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}.$$

Следовательно, функция имеет простые полюсы в точках $z = -n$, причем

$$\lim_{z \to -n} (z+n) P(z) = \frac{(-1)^n}{n!},$$

откуда следует справедливость соотношения (38.7).

Свойство 5 (формула дополнения). Справедливо соотношение

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \tag{38.8}$$

Доказательство. Достаточно доказать справедливость формулы (38.8) для $z = x$ и произвольного интервала $a < x < b$, откуда по теореме о единственности аналитической функции получим требуемое утверждение.

Согласно формуле (38.2)

$$\Gamma(x) = 2 \int\limits_0^{\infty} e^{-u^2} u^{2x-1} du,$$

$$\Gamma(1-x) = 2 \int\limits_0^{\infty} e^{-v^2} v^{1-2x} dv.$$

Следовательно, при $0 < x < 1$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = 4 \int\limits_0^{\infty} u^{2x-1} e^{-u^2} du \int\limits_0^{\infty} v^{1-2x} e^{-v^2} dv =$$

$$= 4 \int\limits_0^{\infty} \int\limits_0^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} \left(\frac{u}{v}\right)^{2x-1} du dv.$$

Перейдем в полярную систему координат: $u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$, $dudv = \rho d\rho\, d\varphi$. Тогда

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = 4\int\limits_0^\infty e^{-\rho^2}\rho d\rho\int\limits_0^{\pi/2}(\text{ctg }\varphi)^{2x-1}d\varphi = 2\int\limits_0^{\pi/2}(\text{ctg }\varphi)^{2x-1}d\varphi.$$

Последний интеграл заменой $\text{tg }^2\varphi = \tau$ приводится к виду

$$I = 2\int\limits_0^{\pi/2}(\text{ctg }\varphi)^{2x-1}d\varphi = \int\limits_0^1 \frac{\tau^{(1-x)-1}}{1+\tau}d\tau,$$

соответствующему интегралу (23.58) с $\alpha = 1-x$, и, следовательно,

$$I = \frac{\pi}{\sin[\pi(1-x)]} = \frac{\pi}{\sin\pi x},$$

что и требовалось доказать (см. также пример 40.4).

◊ Формулу дополнения можно доказать проще, если воспользоваться определением (38.3). Действительно, для всех $z \neq n$, $n = \overline{-\infty,\infty}$, имеем

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{1}{z^2}\prod_{n=1}^\infty\Big[\Big(1+\frac{z}{n}\Big)e^{-z/n}\Big]^{-1}\prod_{k=1}^\infty\Big[\Big(1-\frac{z}{k}\Big)e^{z/k}\Big]^{-1} =$$
$$= -\frac{1}{z^2}\prod_{n=1}^\infty\Big(1-\frac{z^2}{n^2}\Big)^{-1}.$$

С помощью формулы (23.187) для разложения целой функции в виде произведения

$$\frac{\sin\pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^\infty\Big(1-\frac{z^2}{n^2}\Big)$$

найдем

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z\sin\pi z},$$

откуда с учетом основного функционального соотношения

$$-z\Gamma(-z) = \Gamma(1-z)$$

приходим к (38.8).

Свойство 6. Функция $\Gamma(z)$ не имеет нулей, т.е. для всех z

$$\Gamma(z) \neq 0. \tag{38.9}$$

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Пусть z_0 – нуль функции $\Gamma(z)$. Тогда $z_0 \neq -j$, $j = \overline{0, \infty}$, так как в этих точках $\Gamma(z)$ имеет полюсы 1-го порядка, и $z_0 \neq j$, $j = \overline{0, \infty}$, так как $\Gamma(n+1) = n!$. Рассмотрим предел

$$\lim_{z\to z_0} \Gamma(1-z) = \lim_{z\to z_0} \frac{\pi}{\Gamma(z)\sin \pi z} = \frac{\pi}{\sin \pi z_0 \lim\limits_{z\to z_0} \Gamma(z)} = \infty,$$

поскольку $\sin \pi z_0 \neq 0$. Следовательно, $\Gamma(1-z)$ имеет в точке z_0 полюс, что противоречит свойству 4. Полученное противоречие и доказывает свойство 6.

Свойство 7. Справедливы соотношения

$$\Gamma\Big(\frac{2n+1}{2}\Big) = \frac{1}{2^n}(2n-1)!!\sqrt{\pi} \tag{38.10}$$

и

$$\Gamma\Big(\frac{1-2n}{2}\Big) = \frac{(-1)^n\sqrt{\pi}2^n}{(2n-1)!!}. \tag{38.11}$$

для $n = \overline{0, \infty}$.

Доказательство. Положим в соотношении (38.5) $z = (2n - 1)/2$. Тогда

$$\begin{aligned}\Gamma\Big(\frac{2n+1}{2}\Big) &= \frac{2n-1}{2}\Gamma\Big(\frac{2n+1}{2} - 1\Big) = \\ &= \frac{2n-1}{2}\Gamma\Big(\frac{2(n-1)+1}{2}\Big) = \\ &= \frac{(2n-1)(2n-3)}{2^2}\Gamma\Big(\frac{2(n-2)+1}{2}\Big) = \dots = \\ &= \frac{1}{2^n}(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1\cdot \Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big).\end{aligned}$$

Положив в (38.8) $z = 1/2$, получим

$$\Gamma^2\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{\pi}{\sin \pi/2} = \pi$$

или

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi},$$

т.е. соотношение (38.10) справедливо. Подставив в (38.8) $z = n + 1/2$, с учетом (38.10) получим

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2} - n\Big) = \frac{\pi}{\Gamma(1/2+n)\sin(n\pi + \pi/2)} = \\ = \frac{(-1)^n\pi}{\Gamma(1/2+n)} = \frac{(-1)^n\pi 2^n}{(2n-1)!!\sqrt{\pi}},$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Справедливо соотношение

$$\Gamma\Big(n + \frac{1}{2}\Big)\Gamma\Big(-n + \frac{1}{2}\Big) = (-1)^n\pi. \tag{38.12}$$

Доказательство. Воспользовавшись соотношениями (38.10) и (38.11), получим

$$\Gamma\Big(n + \frac{1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{2} - n\Big) = \frac{1}{2^n}(2n-1)!!\sqrt{\pi}\frac{(-1)^n\sqrt{\pi}2^n}{(2n-1)!!} = (-1)^n\pi,$$

что и требовалось доказать.

Свойство 8 (формула Эйлера). Для натуральных n справедливо соотношение

$$\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big)\Gamma\Big(\frac{2}{n}\Big)\cdots\Gamma\Big(\frac{n-1}{n}\Big)\Gamma(1) = \frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{(n-1)/2}. \tag{38.13}$$

Соотношение (38.13) называется формулой Эйлера.

Доказательство. Обозначим

$$f(n) = \Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big)\Gamma\Big(\frac{2}{n}\Big)\cdots\Gamma\Big(\frac{n-1}{n}\Big)$$

и напишем это произведение в обратном порядке

$$f(n) = \Gamma\Big(\frac{n-1}{n}\Big)\Gamma\Big(\frac{n-2}{n}\Big)\cdots\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Составим

$$f^2(n) = \Big[\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big)\Gamma\Big(\frac{n-1}{n}\Big)\Big]\Big[\Gamma\Big(\frac{2}{n}\Big)\Gamma\Big(\frac{n-2}{n}\Big)\Big]\cdots\Big[\Gamma\Big(\frac{n-1}{n}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big].$$

Применим формулу $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$, тогда

$$f^2(n) = \frac{\pi}{\sin(\pi/n)} \frac{\pi}{\sin(2\pi/n)} \cdots \frac{\pi}{\sin[(n-1)\pi/n]} = \frac{\pi^{n-1}}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi/n)}.$$

Числа $e^{2i\pi k/n}$, $k = \overline{0, n-1}$, – корни n-ой степени из единицы. Поэтому можно записать

$$z^n - 1 = (z-1)(z - e^{2i\pi/n})(z - e^{4i\pi/n}) \cdots (z - e^{(n-1)2i\pi/n}).$$

Отсюда

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = \prod_{k=1}^{n-1} (z - e^{2ik\pi/n}).$$

Перейдя к пределу при $z \to 1$, найдем

$$n = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{ik\frac{2\pi}{n}}).$$

Но

$$\left| \prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{ik\frac{2\pi}{n}}) \right| = \prod_{k=1}^{n-1} \left| 1 - e^{ik\frac{2\pi}{n}} \right| =$$

$$= \prod_{k=1}^{n-1} \left| e^{ik\frac{\pi}{n}} \right| \left| e^{-ik\frac{\pi}{n}} - e^{ik\frac{\pi}{n}} \right| = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}.$$

Приходим к равенству

$$n = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n},$$

откуда

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Тогда

$$f^2(n) = \frac{\pi^{n-1} 2^{n-1}}{n}, \qquad f(n) = \frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi)^{(n-1)/2},$$

что и требовалось доказать.

Свойство 9 (формула удвоения). Справедливо соотношение

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}}\Gamma(2z).$$

Доказательство проведем позднее, используя свойства бета-функции [см. формулу (40.8)].

Свойство 10. Пусть z удовлетворяет условию $0 < \operatorname{Re} z < 1$. Тогда для гамма-функции справедливо следующее интегральное представление:

$$\Gamma(z) = e^{i\pi z/2}\int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-it}dt. \tag{38.14}$$

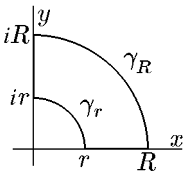

Рис. 100

Доказательство. Рассмотрим интеграл от $f(\zeta) = \zeta^{z-1}e^{-\zeta}$ вдоль замкнутого контура, изображенного на рис. 100. Согласно теореме Коши, он равен нулю. Имеем

$$\int\limits_{\gamma_R}\zeta^{z-1}e^{-\zeta}d\zeta + \int\limits_{iR}^{ir}\zeta^{z-1}e^{-\zeta}d\zeta +$$

$$+\int\limits_{\gamma_r^-}\zeta^{z-1}e^{-\zeta}d\zeta + \int\limits_r^R x^{z-1}e^{-x}dx = 0.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $R \to \infty$, $r \to 0$. Тогда по лемме Жордана

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R}\zeta^{z-1}e^{-\zeta}d\zeta = 0.$$

Действительно, $|\zeta^{z-1}| \leqslant R$, $\zeta \in \gamma_R$ и при условии $0 < \operatorname{Re} z < 1$ стремится к нулю при $R \to \infty$. Оценим интеграл

$$J_r = \int\limits_{\gamma_r}\zeta^{z-1}e^{-\zeta}d\zeta.$$

Имеем

$$|J_r| = \Big|\int\limits_{\gamma_r} \zeta^{z-1} e^{-\zeta} d\zeta\Big| \leqslant r^{x-1}\frac{\pi r}{2} = \frac{\pi}{2} r^x.$$

Следовательно, $\lim\limits_{r\to 0} J_r = 0$, если $x > 0$. Переходя к пределу, получим

$$\int\limits_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx + \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} \int\limits_{iR}^{ir} \zeta^{z-1} e^{-\zeta} d\zeta = 0$$

или

$$\Gamma(z) + i\int\limits_\infty^0 (iy)^{z-1} e^{-iy} dy = 0, \qquad \Gamma(z) = i^z \int\limits_0^\infty y^{z-1} e^{-iy} dy,$$

$$\Gamma(z) = e^{i\pi z/2} \int\limits_0^\infty y^{z-1} e^{-iy} dy, \quad 0 < \mathrm{Re}\, z < 1,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big)\sin\frac{\pi}{2n} &= \int\limits_0^\infty \sin t^n dt,\\ \frac{1}{n}\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big)\cos\frac{\pi}{2n} &= \int\limits_0^\infty \cos t^n dt. \end{aligned} \qquad (38.15)$$

Доказательство. Положим в (38.14) $z = n^{-1}$ $(n > 1)$ и сделаем замену переменных $t^{1/n} = y$. Тогда $dt = ny^{n-1}dy$ и

$$\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big) e^{-i\pi/(2n)} = n\int\limits_0^\infty e^{-it^n} dt.$$

Отделяя действительные и мнимые части, приходим к равенствам (38.15).

◊ При $n = 2$ из (38.15) получим соотношения

$$\int\limits_0^\infty \sin t^2 dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad \int\limits_0^\infty \cos t^2 dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

или $S(\infty) = C(\infty) = 1/2$, где

$$S(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{2\pi t}}dt, \qquad C(x) = \int\limits_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{2\pi t}}dt$$

– интегралы Френеля. Подстановка $t = u^2$ дает

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\sqrt{x}} \sin u^2 du, \qquad C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\sqrt{x}} \cos u^2 du.$$

Пример 38.1. Показать, что гамма-функцию можно определить интегралами

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^1 \Big[\ln\frac{1}{t}\Big]^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0. \tag{38.16}$$

Решение. Сделаем в интеграле (38.16) замену переменных $t = e^{-u}$. Тогда $dt = -e^{-u}du$, $\ln\frac{1}{t} = u$ и u будет пробегать значения от ∞ до нуля, в то время как t меняется от нуля до единицы. Следовательно,

$$\int\limits_0^1 \Big[\ln\frac{1}{t}\Big]^{z-1} dt = \int\limits_\infty^0 u^{z-1}(-e^{-u})du = \int\limits_0^\infty e^{-u}u^{z-1}du = \Gamma(z),$$

что и требовалось показать.

Пример 38.2. Показать, что

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^4} dx = \Gamma\Big(\frac{5}{4}\Big). \tag{38.17}$$

Решение. Сделаем в интеграле (38.17) замену переменных $x^4 = u$. Тогда $x = u^{1/4}$ и $dx = \frac{1}{4}u^{-3/4}du$. Следовательно,

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^4}dx = \int\limits_0^\infty e^{-u}\frac{1}{4}u^{-3/4}du = \frac{1}{4}\int\limits_0^\infty e^{-u}u^{\frac{1}{4}-1}du =$$
$$= \frac{1}{4}\Gamma\Big(\frac{1}{4}\Big) = \Gamma\Big(\frac{1}{4}+1\Big),$$

что и требовалось показать.

Пример 38.3. Используя гамма-функцию, показать, что

$$\int\limits_0^1 x^k \ln x dx = -\frac{1}{(k+1)^2}, \quad k > -1.$$

Решение. Подстановка $\ln x = t$ дает

$$\int\limits_0^1 x^k \ln x dx = \int\limits_{-\infty}^0 te^{(k+1)t}dt.$$

Полагаем $(k+1)t = -u$. При $k+1 > 0$ получим

$$\int\limits_0^1 x^k \ln x dx = -\frac{1}{(k+1)^2}\int\limits_0^\infty ue^{-u}du =$$
$$= -\frac{1}{(k+1)^2}\Gamma(2) = -\frac{1}{(k+1)^2},$$

что и требовалось показать.

Пример 38.4. Вычислить интеграл

$$J = \int\limits_{-\infty}^\infty x^{2n}e^{-ax^2}dx, \quad a > 0.$$

Решение. Используем четность подынтегральной функции и положим $ax^2 = t$ $(a > 0)$. Тогда

$$J = 2\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{a^{n+1/2}} \int_0^\infty t^{n-1/2} e^{-t} dt =$$
$$= \frac{1}{a^{n+1/2}} \Gamma\Big(n + \frac{1}{2}\Big) = \frac{(2n-1)!!}{2^n a^{n+1/2}} \sqrt{\pi}.$$

Пример 38.5. Доказать соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-x^n} dx = 1.$$

Доказательство. Сделаем в этом интеграле замену переменных $x = t^{1/n}$ и $dx = \frac{1}{n} t^{1/n-1} dt$. Получим

$$\int_0^\infty e^{-x^n} dx = \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{-t} t^{1/n-1} dt = \frac{1}{n} \Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big) = \Gamma\Big(\frac{1}{n} + 1\Big).$$

В силу непрерывности гамма-функции $\Gamma(x)$ при $x > 0$ найдем

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-x^n} dx = \lim_{n\to\infty} \Gamma\Big(\frac{1}{n} + 1\Big) = \Gamma(1) = 1.$$

39. Обобщенные оригиналы

Определение функции $f(t)$ как оригинала можно обобщить, если во втором условии определения конечные разрывы заменить бесконечными, но такими, чтобы интеграл (34.1) попрежнему оставался сходящимся. К числу таких обобщенных оригиналов можно отнести все функции $f(t)$, которые в точке t_0 удовлетворяют критерию сходимости интеграла (34.1) (см. Приложение «Несобственные интегралы. Сходимость и главное значение»):

$$\lim_{t\to t_0} (t - t_0)^\nu f(t) = 0 \qquad (39.1)$$

при некоторых $\nu < 1$, а вне точки t_0 удовлетворяют остальным условиям, при которых их можно считать оригиналами.

Здесь $\theta(t-\tau)$ – тета-функция Хевисайда (подробнее см. раздел, посвященный обобщенным функциям).

◊ Частные случаи теоремы Эфроса (см. формулы (39.14), (39.18), (39.20)–(39.23)) могут оказаться полезными, если известен оригинал функции $\varphi(p)$ и требуется найти оригиналы функций $\varphi(1/p)$, $\varphi(\sqrt{p})$, $\varphi(p+1/p)$, $\varphi(\sqrt{1+p^2})$.

Пример 39.5. Вычислить интеграл

$$g(t)=\int\limits_0^t J_0(\sqrt{t^2-\tau^2})d\tau.$$

Решение. Найдем изображение функции $g(t)$. Согласно частному случаю теоремы Эфроса (см. формулу (39.20)), получим

$$g(t) \risingdotseq \psi(p)=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Поскольку в нашем случае надо положить

$$f(t)=1, \qquad \varphi(p)=\frac{1}{p}, \qquad \varphi(\sqrt{p^2+1})=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}},$$

следовательно,

$$\psi(p)=\frac{1}{p^2+1} \fallingdotseq \sin t.$$

Таким образом, $g(t)=\sin t$.

◊ Примеры применения частных случаев теоремы Эфроса будут рассмотрены в разд. «Интегральные преобразования бесселевых функций» части III и в главе «Интегральные уравнения» части IV.

40. Бета-функция

♦ Бета-функцией (или эйлеровым интегралом первого рода) называется интеграл

$$\mathrm{B}(z,\omega)=\int\limits_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\omega-1}dt, \quad \mathrm{Re}\, z>0,\, \mathrm{Re}\,\omega>0. \qquad (40.1)$$

Наряду с определением (40.1) достаточно распространенным является представление бета-функции в виде

$$\mathrm{B}(z,w)=2\int\limits_0^{\pi/2}(\sin\tau)^{2z-1}(\cos\tau)^{2w-1}d\tau, \qquad (40.2)$$

следующем из (40.1) заменой $t=\sin^2\tau$.

Свойства бета-функции

Свойство 1. Справедливо соотношение

$$B(z,\omega)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)}. \qquad (40.3)$$

Доказательство. Вместо (40.1) рассмотрим интеграл

$$\varphi(\tau)=\int\limits_0^{\tau}t^{z-1}(\tau-t)^{\omega-1}dt=(\tau^{\omega-1}*\tau^{z-1}), \qquad (40.4)$$

который является сверткой функций τ^{z-1} и $\tau^{\omega-1}$ и при $\tau=1$ совпадает с (40.1). Проведем преобразование Лапласа правой и левой частей равенства (40.4). По теореме о свертке

$$\varphi(\tau)=(\tau^{\omega-1}*\tau^{z-1})\risingdotseq\Phi(p)=\frac{\Gamma(\omega)}{p^{\omega}}\frac{\Gamma(z)}{p^{z}}=\frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{p^{\omega+z}}$$

найдем оригинал правой части

$$\Phi(p)\fallingdotseq\Gamma(z)\Gamma(\omega)\frac{\tau^{\omega+z-1}}{\Gamma(\omega+z)}.$$

Таким образом,

$$(\tau^{\omega-1}*\tau^{z-1})=\int\limits_0^{\tau}t^{z-1}(\tau-t)^{\omega-1}dt=\frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(\omega+z)}\tau^{\omega+z-1}.$$

Положив $\tau=1$, получим (40.3).

$\Diamond$ Свойство 1 достаточно очевидно вытекает из формул (38.3) и (40.2). Действительно, используя представление (38.3), запишем произведение

$$\Gamma(z)\Gamma(\omega) = 4\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-(y^2+x^2)}y^{2z-1}x^{2\omega-1}dy\,dx$$

в виде двойного интеграла по первой четверти плоскости xOy в полярной системе координат $y = r\sin\varphi$, $x = r\sin\varphi$

$$\Gamma(z)\Gamma(\omega) = 4\int\limits_0^\infty e^{-r^2}r^{2(z+\omega)-1}dr\int\limits_0^{\pi/2}(\sin\varphi)^{2z-1}(\cos\varphi)^{2w-1}d\varphi.$$

Отсюда с учетом (38.3) и (40.2) найдем

$$\Gamma(z)\Gamma(\omega) = \Gamma(z+\omega)\mathrm{B}(z,\omega),$$

откуда и следует (40.3).

$\Diamond$ Если z и w – целые положительные числа ($z = n, \omega = m$), то формулу (40.3) можно записать в виде

$$\mathrm{B}(n,m) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m+1)}{m\Gamma(n+m)} = 1\Big/\Big[m\frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!}\Big] = \frac{1}{mC_{m+n-1}^{n-1}},$$

где

$$C_s^l = \frac{s!}{l!(s-l)!}$$

– биномиальные коэффициенты.

Таким образом, если гамма-функцию можно рассматривать как обобщение факториала на случай произвольного аргумента, то бета-функцию – как обобщение биномиальных коэффициентов (см. также разд. «Биномиальные коэффициенты»).

Свойство 2. Справедливо соотношение

$$\mathrm{B}(z,\omega) = \mathrm{B}(\omega,z). \qquad (40.5)$$

Доказательство следует непосредственно из (40.3).

Свойство 3. Справедливы соотношения

$$\mathrm{B}(z,\omega+1)=\frac{\omega}{z}\mathrm{B}(z+1,\omega)=\frac{\omega}{\omega+z}\mathrm{B}(z,\omega);\qquad(40.6)$$

$$\mathrm{B}(z,1)=\frac{1}{z};\qquad(40.7)$$

$$\mathrm{B}(z,z)=2^{1-2z}B\Big(\frac{1}{2},z\Big);\qquad(40.8)$$

$$\mathrm{B}(z,1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}.\qquad(40.9)$$

Доказательство следует из соотношений (38.5) и (40.3). Легко увидеть, что соотношение (40.7) является аналогом основного функционального соотношения; (40.8) – аналогом формулы удвоения, а (40.9) – аналогом формулы дополнения.

Проведем доказательство формулы удвоения, так как ранее она не была доказана. Рассмотрим интеграл

$$\mathrm{B}(z,z)=\int\limits_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}dt=\int\limits_0^1\Big[\frac{1}{4}-\Big(\frac{1}{2}-t\Big)^2\Big]^{z-1}dt.$$

Так как парабола $y=\frac{1}{4}-\Big(\frac{1}{2}-t\Big)^2$ симметрична относительно прямой $t=1/2$, можно записать

$$\mathrm{B}(z,z)=2\int\limits_0^{1/2}\Big[\frac{1}{4}-\Big(\frac{1}{2}-t\Big)^2\Big]^{z-1}dt.$$

Сделаем замену $1/2-t=\sqrt{u}/2$ и получим

$$\mathrm{B}(z,z)=\frac{2}{4^z}\int\limits_0^1 u^{-1/2}(1-u)^{z-1}du=\frac{1}{2^{2z-1}}B\Big(\frac{1}{2},z\Big).$$

Переходя к гамма-функции, найдем

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)}=\frac{1}{2^{2z-1}}\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(z)}{\Gamma(z+1/2)},$$

откуда

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}}\Gamma(2z).$$

Пример 40.1. Показать, что

$$\frac{e^{-\mu t}}{(1-e^{-bt})^{1-\nu}} \risingdotseq \frac{1}{b} B\Big(\frac{p+\mu}{b}, \nu\Big). \tag{40.10}$$

Решение. По определению преобразования Лапласа

$$\frac{e^{-\mu t}}{(1-e^{-bt})^{\nu-1}} \risingdotseq \int\limits_0^\infty e^{-(p+\mu)t} \frac{dt}{(1-e^{-bt})^{1-\nu}}.$$

Сделав в интеграле замену переменных

$$t = -\frac{1}{b}\ln\tau, \qquad dt = -\frac{1}{b}\frac{d\tau}{\tau},$$

получим

$$\frac{1}{b}\int\limits_0^1 \tau^{(p+\mu)/b}(1-\tau)^{\nu-1}\frac{d\tau}{\tau} = \frac{1}{b}B\Big(\frac{p+\mu}{b}, \nu\Big).$$

Пример 40.2. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} \quad (n > 1).$$

Решение. Сделаем в интеграле замену переменных $x = t^{1/n}$ $(t > 0)$ и получим

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \frac{1}{n}\int\limits_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{-1/n}dt = \frac{1}{n}B\Big(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\Big) =$$

$$= \frac{1}{n}\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big)\Gamma\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\frac{1}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{n\sin(\pi/n)}.$$

Здесь мы воспользовались формулой дополнения.

Пример 40.3. Доказать соотношение

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}. \tag{40.11}$$

Решение. Подстановкой $x^4 = t$ преобразуем интегралы к виду

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{4}\int_0^1 t^{-3/4}(1-t)^{-1/2}dt = \frac{1}{4}B\Big(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\Big) = \frac{\Gamma\Big(\frac{1}{4}\Big)\sqrt{\pi}}{4\Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big)},$$

$$\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{4}B\Big(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\Big) = \frac{\Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big)\sqrt{\pi}}{4\Gamma\Big(\frac{5}{4}\Big)} = \frac{\Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big)\sqrt{\pi}}{\Gamma\Big(\frac{1}{4}\Big)}.$$

Перемножив интегралы, получим формулу (40.11).

Пример 40.4. Вычислить интеграл

$$J = \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^{\alpha} x dx, \quad \alpha \neq n,\ n = \overline{-\infty,\infty}.$$

Решение. Сделаем в интеграле замену переменных $\operatorname{tg} x = \sqrt{t}$ $(t > 0)$ и получим

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{t^{(\alpha-1)/2}}{1+t}dt = \frac{1}{2}B\Big(\frac{\alpha+1}{2}, 1-\frac{\alpha+1}{2}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2\Gamma(1)}\Gamma\Big(\frac{\alpha+1}{2}\Big)\Gamma\Big(1-\frac{\alpha+1}{2}\Big) = \frac{\pi}{2\cos(\pi\alpha/2)}.$$

Заметим, что этот результат также можно получить непосредственно из формулы (40.12).

Пример 40.5. Показать, что

$$J = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{1}{2}B\Big(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\Big). \qquad (40.12)$$

Решение. Положим $\sin x = \sqrt{t}$ $(t > 0)$. Тогда

$$\frac{1}{2}\int_0^1 t^{(m-1)/2}(1-t)^{(n-1)/2}dt = \frac{1}{2}B\Big(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\Big).$$

Пример 40.6. Вычислить интеграл

$$J = \int\limits_{-1}^{1} (1+x)^a (1-x)^b dx, \quad a > -1, \quad b > -1. \tag{40.13}$$

Решение. Подстановкой $1 - x = 2t$ интеграл преобразуется к виду

$$J = 2^{a+b+1} \int\limits_{0}^{1} t^b (1-t)^a dt = 2^{a+b+1} \mathrm{B}(a+1, b+1).$$

$\Diamond$ Можно сделать в интеграле (40.13) замену переменных $x = \cos 2\varphi$.

Пример 40.7. Вычислить интеграл Дирихле

$$J = \iint\limits_{D} x^q y^p d\sigma,$$

где D – треугольник, ограниченный полуосями и прямой $x + y = 1$, $p > -1$, $q > -1$.

Решение. Перейдем от двойного интеграла к повторному

$$J = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x} x^p y^q dy.$$

Так как $q \neq -1$,

$$J = \frac{1}{q+1} \int\limits_{0}^{1} x^p (1-x)^{q+1} dx = \frac{1}{q+1} \mathrm{B}(p+1, q+2) =$$

$$= \frac{1}{q+1} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+2)}{\Gamma(p+q+3)} = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{(p+q+2)\Gamma(p+q+2)} =$$

$$= \frac{\mathrm{B}(p+1, q+1)}{p+q+2}.$$

Пример 40.8. Вычислить интеграл

$$J = \int\limits_0^a t^{2n}\sqrt{a^2 - t^2}dt, \quad a > 0.$$

Решение. Полагаем $t = a\sin x$, $a > 0$. Получим

$$J = a^{2n+2}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\cos^2 x\, dx.$$

Воспользовавшись соотношением (40.12), найдем

$$J = a^{2n+2}\frac{1}{2}B\Big(n + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\Big) = a^{2n+2}\frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(3/2)}{2\Gamma(n+2)} =$$
$$= \frac{(2n-1)!!a^{2n+2}}{2^{n+2}(n+1)!}\pi.$$

Пример 40.9. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $|x|^n + |y|^n = a^n$ ($n > 0$, $a > 0$).

Решение. Ввиду центральной симметрии кривой относительно начала координат будем рассматривать только ее часть, расположенную в первом квадранте ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$). В этом случае $y = (a^n - x^n)^{1/n}$, $0 \leqslant x \leqslant a$. Тогда для площади фигуры получим

$$S = 4\int\limits_0^a ydx = 4\int\limits_0^a (a^n - x^n)^{1/n}dx.$$

Сделаем в интеграле замену переменных

$$x = at^{1/n}, \qquad dx = (a/n)t^{1/n-1}dt.$$

Получим

$$S = \frac{4a^2}{n}\int\limits_0^1 (1-t)^{1/n}t^{1/n-1}dt = \frac{4a^2}{n}B\Big(\frac{1}{n}+1, \frac{1}{n}\Big) = \frac{2a^2}{n}\frac{\Gamma^2(1/n)}{\Gamma(2/n)}.$$