Линейные и нелинейные уравнения физики

Модифицированные функции Бесселя. Ряды Фурье-Бесселя и Дини. Задача Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя.

Старший преподаватель кафедры ВММФ

Левченко Евгений Анатольевич

6. Различные виды функций Бесселя

♦ Функции

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x), \quad H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x) \tag{6.1}$$

называются, соответственно, первой и второй функциями Ханкеля, или функциями Бесселя третьего рода.

Воспользовавшись определениями функции Неймана $N_\nu(x)$ (4.2), получим

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= \frac{J_{-\nu}(x) - e^{-i\pi\nu}J_\nu(x)}{i\sin\pi\nu}, \\ H_\nu^{(2)}(x) &= \frac{-J_{-\nu}(x) + e^{i\pi\nu}J_\nu(x)}{i\sin\pi\nu}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

♢ При $\nu \to n$ в формулах (6.2) возникает неопределенность типа $0/0$, которая может быть раскрыта, например, по правилу Лопиталя.

♢ Из (6.2), в частности, следует, что

$$H_{-\nu}^{(1)}(x) = e^{i\pi\nu}H_\nu^{(1)}(x) \qquad \text{и} \qquad H_{-\nu}^{(2)}(x) = e^{-i\pi\nu}H_\nu^{(2)}(x).$$

Пример 6.1. Выразить функции Ханкеля $H_{1/2}^{(1,2)}(x)$ и $H_{-1/2}^{(1,2)}(x)$ через элементарные функции.

Решение. Так так $\sin(\pi/2) = 1$ и $e^{i\pi/2} = i$, то из (6.2) с учетом (5.15) получим

$$\begin{aligned} H_{1/2}^{(1)}(x) &= -i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{ix}, \quad H_{-1/2}^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{ix}; \\ H_{1/2}^{(2)}(x) &= i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-ix}, \quad H_{-1/2}^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-ix}. \end{aligned}$$

♢ Сравнение формул (6.1) с формулами Эйлера показывает, что $J_\nu(x)$ – аналог функции $\cos x$, $N_\nu(x)$ – $\sin x$, $H^{(1)}(x)$ – e^{ix}.

♦ Функция

$$I_\nu(x) = i^{-\nu}J_\nu(ix) = e^{-i\pi\nu/2}J_\nu(ix) \tag{6.3}$$

называется модифицированной бесселевой функцией первого рода индекса ν (см. рис. 10).

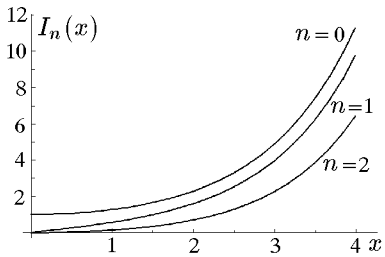

Рис. 10

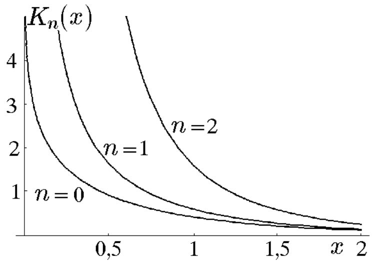

Рис. 11

♦ Функция

$$K_\nu(x) = i^{\nu+1}\frac{\pi}{2}H_\nu^{(1)}(ix) \tag{6.4}$$

называется модифицированной функцией Бесселя второго рода или функцией Макдональда (см. рис. 11).

◊ Из определения функции $J_\nu(x)$ следует, что функция $I_\nu(x)$ представима рядом Тейлора вида

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k+\nu}. \tag{6.5}$$

◊ Функции $K_\nu(x)$ и $I_\nu(x)$ связаны соотношением

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \pi\nu}.$$

Теорема 6.1. *Функции $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ являются линейно независимыми решениями уравнения*

$$x^2y'' + xy' - (x^2+\nu^2)y = 0. \tag{6.6}$$

Доказательство. Заменой переменной $z = ix$ уравнение (6.6) приводится к уравнению Бесселя

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} + (z^2-\nu^2)y = 0,$$

частными решениями которого являются функции

$$y(z) = C_1J_\nu(z) = C_1J_\nu(ix) \quad \text{и} \quad y(z) = C_2J_{-\nu}(z) = C_2J_{-\nu}(ix),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Выбрав, согласно (6.3), $C_1 = i^{-\nu}$, $C_2 = i^{\nu}$, убеждаемся, что $I_\nu(x)$, $I_{-\nu}(x)$ являются частными решениями уравнения (6.6).

Вронскиан функций $i^{-\nu}J_\nu(z)$ и $i^{\nu}J_{-\nu}(z)$, согласно (3.10), можно записать

$$W[i^{-\nu}J_\nu(z), i^{\nu}J_{-\nu}(z)] = W[J_\nu(z), J_{-\nu}(z)] = -\frac{2}{\pi z}\sin\pi\nu$$

или в развернутой форме

$$i^{-\nu}J_\nu(z)\frac{d}{dz}[i^{\nu}J_{-\nu}(z)] - i^{\nu}J_{-\nu}(z)\frac{d}{dz}[i^{-\nu}J_\nu(z)] = -\frac{2}{\pi z}\sin\pi\nu.$$

Последнее равенство с учетом определения (6.3) и соотношений

$$z = ix, \qquad \frac{d}{dz} = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}$$

запишется в виде

$$I_\nu(x)\frac{dI_{-\nu}(x)}{dx} - I_{-\nu}(x)\frac{dI_\nu(x)}{dx} = W[I_\nu(x), I_{-\nu}(x)] = -\frac{2}{\pi x}\sin\pi\nu.$$

Отсюда следует линейная независимость функций $I_\nu(x)$, $I_{-\nu}(x)$ при $\nu \neq n$.

Вычислим

$$W[I_\nu(x), K_\nu(x)] = W\Big[I_\nu(x), \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin\pi\nu}\Big] =$$
$$= \frac{\pi}{2\sin\pi\nu}W[I_\nu(x), I_{-\nu}(x)] = \frac{\pi}{2\sin\pi\nu}\Big(-\frac{2}{\pi x}\sin\pi\nu\Big) = -\frac{1}{x}.$$

Следовательно, $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ линейно независимы при любых ν, что и требовалось доказать.

Следствие. Функции $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (6.6), и общее решение уравнения (6.6) имеет вид

$$y(x) = C_1 I_\nu(x) + C_2 K_\nu(x). \tag{6.7}$$

Доказательство следует из того, что $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ линейно независимы при любых ν и являются решениями уравнения (6.6).

Теорема 6.2. *Для функций Бесселя мнимого аргумента справедливы следующие рекуррентные соотношения:*

$$\begin{aligned} &I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} I_\nu(x), \\ &I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) = 2I'_\nu(x). \end{aligned} \tag{6.8}$$

Доказательство. Заменив x на ix в рекуррентном соотношении

$$J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$$

и умножив равенство на $i^{-(\nu+1)}$, получим первую формулу. Для вывода второй формулы воспользуемся рекуррентным соотношением

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x).$$

Пример 6.2. Найти общее решение уравнения

$$y'' + \left(4 + \frac{1}{x}\right) y' + \left(3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}\right) y = 0. \tag{6.9}$$

Решение. Сделаем замену переменных

$$y(x) = e^{-2x} z(x). \tag{6.10}$$

Вычислим производные

$$\begin{aligned} &y'(x) = [e^{-2x} z(x)]' = e^{-2x}[-2z(x) + z'(x)]; \\ &y''(x) = \{e^{-2x}[-2z(x) + z'(x)]\}' = \\ &\quad = e^{-2x}[z''(x) - 4z'(x) + 4z(x)]. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Подставим (6.10) и (6.11) в (6.9)

$$e^{-2x}[z''(x) - 4z'(x) + 4z(x)] + \left(4 + \frac{1}{x}\right) e^{-2x}[z'(x) - 2z(x)] + \\ + \left(3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}\right) e^{-2x} z(x) = 0.$$

Разделив на экспоненту и приведя подобные, получим

$$x^2 z''(x) + x z'(x) + (-x^2 - 5) z(x) = 0. \tag{6.12}$$

Уравнение (6.12) — уравнение Бесселя (6.6) с $\nu = \sqrt{5}$, общее решение которого, согласно (6.7), имеет вид

$$z(x) = C_1 I_{\sqrt{5}}(x) + C_2 K_{\sqrt{5}}(x).$$

Окончательно получим

$$y(x) = C_1 e^{-2x} I_{\sqrt{5}}(x) + C_2 e^{-2x} K_{\sqrt{5}}(x)$$

13. Ряды Фурье–Бесселя и Дини

Здесь мы рассмотрим ряды Фурье–Бесселя и Дини, играющие важную роль в приложениях.

Теорема 13.1. *Последовательность функций*

$$J_\nu\Big(\alpha_1^\nu \frac{x}{l}\Big), J_\nu\Big(\alpha_2^\nu \frac{x}{l}\Big), \ldots, J_\nu\Big(\alpha_k^\nu \frac{x}{l}\Big) \ldots, \qquad \nu > -1, \tag{13.1}$$

в которой α_k^ν, $k = \overline{1, \infty}$ *– корни уравнения*

$$J_\nu(x) = 0, \tag{13.2}$$

образует ортогональную систему функций с весом $\rho(x) = x$, *т.е.*

$$\int\limits_0^l x J_\nu\Big(\alpha_k^\nu \frac{x}{l}\Big) J_\nu\Big(\alpha_j^\nu \frac{x}{l}\Big) dx = \frac{l^2}{2}[J_\nu'(\alpha_k^\nu)]^2 \delta_{kj}. \tag{13.3}$$

Здесь δ_{kj} *– символ Кронекера.*

Доказательство. Положим в интеграле Ломмеля (11.1) $\zeta = 1$, $\alpha = \alpha_k^\nu$, $\beta = \alpha_j^\nu$ для $k \neq j$. Так как $J_\nu(\alpha_k^\nu) = J_\nu(\alpha_j^\nu) = 0$, получим

$$\int_0^1 t J_\nu(\alpha_k^\nu t) J_\nu(\alpha_j^\nu t) dt = 0. \tag{13.4}$$

Положив в интеграле Ломмеля (11.4) $\zeta = 1$ и $\alpha = \alpha_k^\nu$, получим

$$\int\limits_0^1 t J_\nu^2(\alpha_k^\nu t) dt = \frac{1}{2}[J_\nu'(\alpha_k^\nu)]^2. \tag{13.5}$$

Объединив (13.4) и (13.5) и сделав в них замену переменных $t = x/l$, получим (13.3). Таким образом, теорема доказана.

Теорема 13.2. *Пусть некоторую функцию* $f(x)$ *вещественного переменного* x *можно представить равномерно сходящимся функциональным рядом*

$$f(x) = \sum_{k=1}^\infty a_k J_\nu\Big(\alpha_k^\nu \frac{x}{l}\Big), \qquad \nu > -1, \tag{13.6}$$

где через α_k^ν *обозначены положительные корни уравнения* $J_\nu(\alpha) = 0$, *пронумерованные в порядке их возрастания. Тогда*

$$a_k = \frac{2}{[lJ'_\nu(\alpha_k^\nu)]^2}\int\limits_0^l xf(x)J_\nu\Big(\alpha_k^\nu\frac{x}{l}\Big)dx. \tag{13.7}$$

Ряд (13.6) *с коэффициентами* (13.7) *называется рядом Фурье–Бесселя.*

Доказательство. Так как ряд (13.6) сходится равномерно, его можно интегрировать почленно. Домножим равенство (13.6) на $xJ_\nu(\alpha_n^\nu x/l)$ и проинтегрируем в пределах $[0, l]$. Получим

$$\int\limits_0^l xf(x)J_\nu\Big(\alpha_n^\nu\frac{x}{l}\Big)dx = \sum_{k=1}^\infty a_k\int\limits_0^l xJ_\nu\Big(\alpha_n^\nu\frac{x}{l}\Big)J_\nu\Big(\alpha_k^\nu\frac{x}{l}\Big)dx$$

и, используя (13.3), найдем

$$\int\limits_0^l xf(x)J_\nu\Big(\alpha_n^\nu\frac{x}{l}\Big)dx = \sum_{k=1}^\infty a_k\frac{l^2}{2}[J'_\nu(\alpha_k^\nu)]^2\delta_{kn} = \frac{l^2}{2}[J'_\nu(\alpha_n^\nu)]^2a_n,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 13.3 (Гобсона). *Если для функции* $f(x)$ *выполняются следующие условия:*

1) *существует интеграл*

$$\int\limits_0^l t^{1/2}|f(t)|dt < \infty;$$

2) $|f(x)| < \infty$ *для* $x \in [0, l]$,

тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^\infty a_kJ_\nu(\alpha_k^\nu x/l)$ *сходится для* $\nu > -1/2$, $x \in]0, l[$, *и сумма его равна*

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

Доказательство см., например, [11], гл. XVIII.

♦ Если γ_k^ν – положительные корни уравнения

$$xJ'_\nu(x) + HJ_\nu(x) = 0, \tag{13.8}$$

где $H = \mathrm{const}$, не зависящая от x и ν, то ряд

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m J_\nu\Big(\gamma_m^\nu \frac{x}{l}\Big), \tag{13.9}$$

где

$$\begin{gathered} b_m = \frac{2(\gamma_m^\nu)^2}{[(\gamma_m^\nu)^2 - \nu^2]J_\nu^2(\gamma_m^\nu) + [\gamma_m^\nu J'_\nu(\gamma_m^\nu)]^2}\times \\ \times\frac{1}{l^2}\int\limits_0^l xf(x)J_\nu\Big(\gamma_m^\nu\frac{x}{l}\Big)dx, \end{gathered} \tag{13.10}$$

называется рядом Дини функции $f(x)$.

Теорема 13.4. *Функции* $J_\nu(\gamma_m^\nu x/l)$, $m = \overline{1,\infty}$, $\nu > -1$, *где* γ_m^ν *— корни уравнения* (13.8), *обладают на интервале* $]0, l[$ *свойством ортогональности с весом* $\rho(x) = x$, *т.е.*

$$\begin{gathered} \int\limits_0^l xJ_\nu\Big(\gamma_m^\nu\frac{x}{l}\Big)J_\nu\Big(\gamma_k^\nu\frac{x}{l}\Big)dx = \\ = \frac{l^2}{2}\Big\{\Big[1 - \frac{\nu^2}{(\gamma_m^\nu)^2}\Big]J_\nu^2(\gamma_m^\nu) + [J'_\nu(\gamma_m^\nu)]^2\Big\}\delta_{km}. \end{gathered} \tag{13.11}$$

Доказательство дословно повторяет доказательство соотношения (13.3).

Пример 13.1. Разложить на интервале $]0, 1[$ в ряд Фурье–Бесселя $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\alpha_k^0 x)$ функцию $f(x) = x^0 = 1$, α_k^0 — корни бесселевой функции $J_0(x)$.

Решение. Запишем

$$a_k = \frac{2\int\limits_0^1 x^0 xJ_0(\alpha_k^0 x)dx}{[J'_0(\alpha_k^0)]^2}.$$

Поскольку $J_0'(x) = -J_1(x)$, то, проведя замену переменных $t = \alpha_k^0 x$, получим

$$a_k = \frac{2\int\limits_0^{\alpha_k^0} tJ_0(t)dt}{(\alpha_k^0)^2 J_1^2(\alpha_k^0)}.$$

Используя рекуррентное соотношение

$$\frac{d}{dz}[z^{\nu+1}J_{\nu+1}(z)] = z^{\nu+1}J_\nu(z),$$

при $\nu = 0$ найдем

$$a_k = \frac{2}{(\alpha_k^0)^2 J_1^2(\alpha_k^0)} tJ_1(t)\Big|_0^{\alpha_k^0} = \frac{2}{\alpha_k^0 J_1(\alpha_k^0)}.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2J_0(\alpha_k^0 x)}{\alpha_k^0 J_1(\alpha_k^0)} = 1, \quad x \in]0,1[.$$

Пример 13.2. Разложить в ряд Фурье–Бесселя функцию $f(x) = x^2 + 1$ на интервале]0,1[при $\nu = 0$.

Решение. Условия разложимости выполнены. Имеем ряд

$$x^2 + 1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\alpha_n^0 x), \qquad 0 < x < 1$$

с коэффициентами

$$a_n = \frac{2}{J_1^2(\alpha_n^0)} \int\limits_0^1 x(x^2+1)J_0(\alpha_n^0 x)dx, \quad n = \overline{1,\infty}.$$

Вычислим интеграл

$$I = \int\limits_0^1 (x^3 + x)J_0(\alpha_n^0 x)dx = \int\limits_0^1 x^3 J_0(\alpha_n^0 x)dx + \int\limits_0^1 xJ_0(\alpha_n^0 x)dx.$$

Сделаем в нем замену $t = \alpha_n^0 x$. Тогда

$$I = \frac{1}{(\alpha_n^0)^4} \int\limits_0^{\alpha_n^0} t^3 J_0(t) dt + \frac{1}{(\alpha_n^0)^2} \int\limits_0^{\alpha_n^0} t J_0(t) dt = I_1 + I_2.$$

Проведем в I_1 интегрирование по частям, положив $t^2 = U$, $tJ_0(t)dt = dV$. Тогда $dU = 2tdt$, $V = tJ_1(t)$. Получим

$$I_1 = \int\limits_0^{\alpha_n^0} t^3 J_0(t) dt = t^3 J_1(t)\Big|_0^{\alpha_n^0} - 2\int\limits_0^{\alpha_n^0} t^2 J_1(t) dt =$$

$$= \big[t^3 J_1(t) - 2t^2 J_2(t)\big]\Big|_0^{\alpha_n^0} = (\alpha_n^0)^3 J_1(\alpha_n^0) - 2(\alpha_n^0)^3 J_2(\alpha_n^0).$$

С учетом рекуррентного соотношения (5.6)

$$J_2(\alpha_n^0) = \frac{2}{\alpha_n^0} J_1(\alpha_n^0) - J_0(\alpha_n^0) = \frac{2}{\alpha_n^0} J_1(\alpha_n^0),$$

так как $J_0(\alpha_n^0) = 0$, найдем

$$a_n = \frac{2}{J_1^2(\alpha_n^0)} \Big[\frac{(\alpha_n^0)^3 J_1(\alpha_n^0) - 4\alpha_n^0 J_1(\alpha_n^0)}{(\alpha_n^0)^4} + \frac{1}{(\alpha_n^0)^2}\alpha_n^0 J_1(\alpha_n^0)\Big]$$

или

$$a_n = \frac{2}{\alpha_n^0 J_1(\alpha_n^0)}\Big(1 - \frac{2}{(\alpha_n^0)^2}\Big), \qquad n = \overline{1,\infty}.$$

Итак,

$$x^2 + 1 = 4\sum_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{2}{(\alpha_n^0)^2}\Big)\frac{J_0(\alpha_n^0 x)}{\alpha_n^0 J_1(\alpha_n^0)}, \qquad 0 < x < 1.$$

Пример 13.3. Разложить функцию $f(x) = x^\nu$ $(\nu > -1)$ в ряд Дини по системе функций $\{J_\nu(\gamma_n^\nu x)\colon n = \overline{1,\infty}\}$ на $]0,1[$, если γ_n^ν – положительные нули функции $J'_\nu(x)$, $\nu > 0$.

Решение. Разложение имеет вид (13.9)

$$x^\nu = \sum_{n=1}^{\infty} b_n J_\nu(\gamma_n^\nu x), \qquad 0 < x < 1,$$

где, согласно (13.10),

$$b_n = \frac{2}{[1-\nu^2/(\gamma_n^\nu)^2]J_\nu^2(\gamma_n^\nu)} \int\limits_0^1 x^{\nu+1} J_\nu(\gamma_n^\nu x)dx, \quad n = \overline{1,\infty}.$$

Сделав замену переменных $\gamma_n^\nu x = t$, вычислим интеграл

$$\int\limits_0^1 x^{\nu+1} J_\nu(\gamma_n^\nu x)dx = \frac{1}{(\gamma_n^\nu)^{\nu+2}} \int\limits_0^{\gamma_n^\nu} t^{\nu+1} J_\nu(t)dt =$$

$$= \frac{1}{(\gamma_n^\nu)^{\nu+2}} \left[t^{\nu+1} J_{\nu+1}(t)\right]\Big|_0^{\gamma_n^\nu} = \frac{1}{\gamma_n^\nu} J_{\nu+1}(\gamma_n^\nu).$$

Окончательно получим

$$x^\nu = 2\sum_{n=1}^\infty \frac{\gamma_n^\nu J_{\nu+1}(\gamma_n^\nu)}{[(\gamma_n^\nu)^2 - \nu^2] J_\nu^2(\gamma_n^\nu)} J_\nu(\gamma_n^\nu x), \quad 0 < x < 1.$$

Пример 13.4. Разложить в ряд Фурье–Бесселя функцию $f(x) = x^{-\nu}$ $(0 < x < 1)$ по системе $\{J_\nu(\alpha_n^\nu x) : n = \overline{1,\infty}\}$, где α_n^ν — положительные нули функции $J_\nu(x)$.

Решение. Согласно (13.7), имеем

$$x^{-\nu} = \sum_{n=1}^\infty a_n J_\nu(\alpha_n^\nu x), \quad 0 < x < 1,$$

где, согласно (13.10),

$$a_n = \frac{2}{J_{\nu+1}^2(\alpha_n^\nu)} \int\limits_0^1 x^{-\nu+1} J_\nu(\alpha_n^\nu x)dx, \quad n = \overline{1,\infty}.$$

Вычислим $\int\limits_0^1 x^{-\nu+1} J_\nu(\alpha_n^\nu x)dx$. Из рекуррентного соотношения

$$-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}[x^{-\nu} J_\nu(x)] = x^{-(\nu+1)} J_{\nu+1}(x)$$

найдем

$$\int x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)dx = -x^{-\nu} J_\nu(x) + C.$$

Заменим ν на $\nu-1$. Тогда

$$\int x^{-\nu+1}J_\nu(x)dx = -x^{-\nu+1}J_{\nu-1}(x)+C.$$

В нашем случае

$$\int\limits_0^1 x^{-\nu+1}J_\nu(\alpha_n^\nu x)dx = \frac{1}{(\alpha_n^\nu)^{\nu-2}}\int\limits_0^{\alpha_n^\nu} t^{-\nu+1}J_\nu(t)dt =$$

$$= -\frac{1}{(\alpha_n^\nu)^{\nu-2}}t^{-\nu+1}J_{\nu-1}(t)\Big|_0^{\alpha_n^\nu} =$$

$$= \frac{1}{\alpha_n^\nu}J_{\nu-1}(\alpha_n^\nu) + \frac{1}{(\alpha_n^\nu)^{\nu-2}}t^{-\nu+1}J_{\nu-1}(t)\Big|_{t=0}.$$

Найдем

$$t^{-\nu+1}J_{\nu-1}(t)\Big|_{t=0} = \sum_{k=0}^\infty(-1)^k\frac{t^{2k}}{2^{\nu-1+2k}k!\Gamma(\nu+k)}\Big|_{t=0} = \frac{1}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}.$$

Тогда

$$a_n = \frac{2}{J^2_{\nu+1}(\alpha_n^\nu)}\Big[\frac{(\alpha_n^\nu)^{\nu-2}}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)} - \frac{J_{\nu-1}(\alpha_n^\nu)}{\alpha_n^\nu}\Big],\qquad n=\overline{1,\infty}.$$

Окончательно получим

$$x^{-\nu} = \sum_{n=0}^\infty\frac{2}{J^2_{\nu+1}(\alpha_n^\nu)}\Big[\frac{(\alpha_n^\nu)^{\nu-2}}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)} - \frac{J_{\nu-1}(\alpha_n^\nu)}{\alpha_n^\nu}\Big]J_\nu(\alpha_n^\nu x).$$

14. Задача Штурма–Лиувилля для уравнения Бесселя

Задача Штурма–Лиувилля для уравнения Бесселя играет важную роль при решении широкого класса уравнений в частных производных. Ее стандартная формулирировка имеет вид

Найти собственные значения и собственные функции задачи

$$x^2y'' + xy' + (\lambda x^2-\nu^2)y = 0,\qquad \nu>0, \tag{14.1}$$

$$\lim_{x\to0}|y(x)|<\infty,\qquad ly'(l)+Hy(l)=0,\quad H>0,\quad l>0.$$

Записать соотношение ортогональности для собственных функций задачи.

Решение проведем по схеме, использованной ранее для других обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Пусть $\lambda = \omega^2$, $\omega > 0$. Общее решение уравнения (14.1) имеет вид

$$y(x) = C_1 J_\nu(\omega x) + C_2 N_\nu(\omega x).$$

Из явного вида функции

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

следует, что

$$J_\nu(0) = \begin{cases} 0 & \nu > 0, \\ 1 & \nu = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $|J_\nu(0)| < \infty$ при $\nu > 0$. Поскольку

$$\lim_{x\to 0} |N_\nu(x)| = \infty,$$

то $C_2 = 0$.

Рассмотрим второе условие

$$C_1[\omega l J'_\nu(\omega l) + H J_\nu(\omega l)] = 0.$$

Выражение в квадратных скобках равно нулю, если $\omega l = \gamma_k^\nu$, $k = \overline{1,\infty}$, где γ_k^ν – корни уравнения $\gamma J'_\nu(\gamma) + H J_\nu(\gamma) = 0$. Следовательно,

$$\lambda_k = \left(\frac{\gamma_k^\nu}{l}\right)^2, \qquad y_k(x) = A_k J_\nu\left(\gamma_k^\nu \frac{x}{l}\right). \tag{14.2}$$

2. Пусть $\lambda = -\omega^2$, $\omega > 0$. Тогда общее решение уравнения

$$x^2 y'' + x y' - (\omega^2 x^2 + \nu^2) y = 0$$

имеет вид

$$y(x) = C_1 I_\nu(\omega x) + C_2 K_\nu(\omega x).$$

Аналогично предыдущему случаю

$$|\lim_{x\to 0} I_\nu(x)| < \infty, \qquad \text{а} \qquad |\lim_{x\to 0} K_\nu(x)| = \infty.$$

Следовательно,
$$C_2 = 0.$$

По определению,

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k+\nu}.$$

Тогда

$$\omega l I'(\omega l) + HI(\omega l) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+\nu+H}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \Big(\frac{l\omega}{2}\Big)^{2k+\nu} = 0.$$

Это равенство невозможно, так как его левая часть положительна при $\omega l \neq 0$. Тогда

$$C_1 = 0 \qquad \text{и} \qquad y(x) = 0, \tag{14.3}$$

т.е. существуют только тривиальные решения.

3. Пусть $\lambda = 0$. В этом случае

$$x^2 y'' + xy' - \nu^2 y = 0,$$

и необходимо рассмотреть две возможности: $\nu = 0$ и $\nu \neq 0$.

а) Положим $\nu = 0$ и преобразуем уравнение к виду

$$xy'' + y' = \frac{d}{dx}[xy'(x)] = 0,$$

откуда
$$xy' = C_1,$$

и для общего решения получим

$$y(x) = C_1 \ln x + C_2.$$

Из первого условия $C_1 = 0$, из второго – $C_2 = 0$.

б) Положим $\nu > 0$. Частное решение ищем в виде $y = x^\alpha$, подстановка которого дает

$$\alpha(\alpha-1)x^\alpha + \alpha x^\alpha - \nu^2 x^\alpha = 0.$$

Следовательно, $\alpha = \pm\nu$. Тогда

$$y(x) = C_1 x^\nu + C_2 x^{-\nu}.$$

Из первого условия (14.1) найдем

$$C_2 = 0,$$

из второго

$$C_1(\nu l^\nu + H l^\nu) = 0$$

и

$$C_1 = 0.$$

Резюмируя все сказанное выше, запишем окончательное решение задачи Штурма–Лиувилля (14.1):

$$\lambda_k = \left(\frac{\gamma_k^\nu}{l}\right)^2, \qquad y_k(x) = C_1 J_\nu\left(\gamma_k^\nu \frac{x}{l}\right).$$

4. Соотношение ортогональности для функций (14.2) с учетом (13.11) примет вид

$$\int\limits_0^l x y_n(x) y_k(x) dx = C_m C_k \int\limits_0^l x J_\nu\left(\gamma_m^\nu \frac{x}{l}\right) J_\nu\left(\gamma_k^\nu \frac{x}{l}\right) dx =$$
$$= C_m^2 \frac{l^2}{2}\left\{\left[1 - \frac{\nu^2}{(\gamma_m^\nu)^2}\right] J_\nu^2(\gamma_m^\nu) + [J_\nu'(\gamma_m^\nu)]^2\right\}\delta_{km}. \quad (14.4)$$

15. Интегральные преобразования бесселевых функций

Рассмотрим несколько примеров интегральных преобразований бесселевых функций.

Пример 15.1. Найти преобразование Лапласа функции Бесселя нулевого индекса $J_0(t)$.

Решение. По определению,

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k} t^{2k},$$

где

$$C_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}.$$