КАФЕДРА

В М М Ф

Вариант 24

В Ы С Ш А Я МАТЕМАТИКА

Сборник индивидуальных домашних заданий

для студентов
технических специальностей ТПУ

Таблица эквивалентных бесконечно малых

Если $\alpha(x) \to 0$, то справедливо:

1. $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$
2. $\arcsin\alpha(\mathrm{x}) \sim \alpha(\mathrm{x})$
3. $\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$
4. $\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$
5. $1-\cos\alpha(x) \sim \dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$
6. $\ln[1+\alpha(x)] \sim \alpha(x)$
7. $\log_a[1+\alpha(x)] \sim \frac{\alpha(x)}{\ln a}$
8. $e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)$
9. $a^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)\cdot\ln a$
10. $\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{n}$

1. $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x) - \dfrac{(\alpha(x))^3}{6}$
2. $\arcsin\alpha(\mathrm{x}) \sim \alpha(\mathrm{x}) + \dfrac{(\alpha(\mathrm{x}))^3}{6}$
3. $\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x) + \dfrac{(\alpha(x))^3}{3}$
4. $\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x) - \dfrac{(\alpha(x))^3}{3}$
5. $1-\cos\alpha(x) \sim \dfrac{(\alpha(x))^2}{2} - \dfrac{(\alpha(x))^4}{24}$
6. $\ln[1+\alpha(x)] \sim \alpha(x) - \dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$
7. $e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x) + \dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$
8. $\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{n} + \dfrac{1-n}{2n^2}(\alpha(x))^2$

Второй замечательный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad \lim_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e,$$

$$e = 2,7182818284590...$$

Сумма n членов арифметической прогрессии

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$$

Сумма n членов геометрической прогрессии со знаменателем q

$$S_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

При $|q|<1$ $\qquad S = \dfrac{b_1}{1-q}$

Факториалы

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots(n-1)\cdot n, \qquad \begin{array}{l} 0! = 1 \\ 1! = 1 \\ 2! = 1\cdot 2 = 2 \\ 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6 \\ 4! = 24, \qquad 5! = 120, \ldots \end{array}$$

$$(2n)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)\cdot\ldots(2n-1)\cdot 2n, \qquad (2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots(2n-2)\cdot 2n$$

$$(2n+1)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot 2n\cdot(2n+1), \qquad (2n+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n-1)\cdot(2n+1)$$

Формула Стирлинга

При больших значениях n $\qquad n! \approx \left(\dfrac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{2\pi n}$

Если C–константа, а $U(x)$ и $V(x)$ – дифференцируемые функции, то

Основные правила дифференцирования

1. $(C)' = 0$
2. $(C \cdot U)' = C \cdot U'$
3. $(U \pm V)' = U' \pm V'$
4. $(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'$
5. $\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V - U\,V'}{V^2}$
6. $[y(U(x))]' = y'_u \cdot U'_x$
7. $x'_y(y) = \dfrac{1}{y'_x(x)}$
8. $y'(x) = y(x) \cdot (\ln\ y(x))'$
9. $\left(U^V\right)' = V \cdot U^{V-1} \cdot U' + U^V \cdot \ln U \cdot V'$
10. $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} \qquad y''(x) = \dfrac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t))^3}$

Таблица производных

1. $\left(U^k\right)' = k\,U^{k-1} \cdot U'$
2. $\left(\sqrt{U}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{U}} \cdot U'$
3. $\left(\dfrac{1}{U}\right)' = -\dfrac{1}{U^2} \cdot U'$
4. $\left(a^U\right)' = a^U \cdot \ln\ a \cdot U'$
5. $\left(e^U\right)' = e^U \cdot U'$
6. $(\log_a U)' = \dfrac{1}{U\ \ln a} \cdot U'$
7. $(\ln U)' = \dfrac{1}{U} \cdot U'$
8. $(\sin U)' = \cos U \cdot U'$
9. $(\cos U)' = -\sin U \cdot U'$
10. $(\mathrm{tg}\ U)' = \dfrac{1}{\cos^2 U} \cdot U'$
11. $(\mathrm{ctg}\ U)' = -\dfrac{1}{\sin^2 U} \cdot U'$
12. $(\arcsin \mathrm{U})' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\mathrm{U}^2}} \cdot \mathrm{U}'$
13. $(\arccos\ U)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot U'$
14. $(\mathrm{arctg}\ U)' = \dfrac{1}{1+U^2} \cdot U'$
15. $(\mathrm{arcctg}\ U)' = -\dfrac{1}{1+U^2} \cdot U'$
16. $(\mathrm{sh}\ U)' = \mathrm{ch}\ U \cdot U'$
17. $(\mathrm{ch}\ U)' = \mathrm{sh}\ U \cdot U'$
18. $(\mathrm{th}\ U)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2\ U} \cdot U'$

Основные неопределенные интегралы

1. $\int U^k\,dU = \dfrac{U^{k+1}}{k+1} + C, \quad (k \neq -1)$

2. $\int dU = U + C$

3. $\int \dfrac{dU}{\sqrt{U}} = 2\sqrt{U} + C$

4. $\int \dfrac{dU}{U^2} = -\dfrac{1}{U} + C$

5. $\int \dfrac{dU}{U} = \ln|U| + C$

6. $\int a^U\,dU = \dfrac{a^U}{\ln a} + C$

7. $\int e^U\,dU = e^U + C$

8. $\int \sin U\,dU = -\cos U + C$

9. $\int \cos U\,dU = \sin U + C$

10. $\int \dfrac{dU}{\cos^2 U} = \mathrm{tg}\ U + C$

11. $\int \dfrac{dU}{\sin^2 U} = -\mathrm{ctg}\ U + C$

12. $\int \mathrm{tg}\ U\,dU = -\ln|\cos U| + C$

13. $\int \mathrm{ctg}\ U\,dU = \ln|\sin U| + C$

14. $\int \dfrac{dU}{\sin U} = \ln\left|\ \mathrm{tg}\dfrac{U}{2}\ \right| + C$

15. $\int \dfrac{dU}{\cos U} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\dfrac{U}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$

16. $\int \dfrac{dU}{a^2 + U^2} = \dfrac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\dfrac{U}{a} + C$

17. $\int \dfrac{dU}{U^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{U-a}{U+a}\right| + C$

18. $\int \dfrac{dU}{\sqrt{a^2 - U^2}} = \arcsin\dfrac{\mathrm{U}}{\mathrm{a}} + \mathrm{C}$

19. $\int \dfrac{dU}{\sqrt{U^2 \pm a^2}} = \ln|U + \sqrt{U^2 \pm a^2}| + C$

20. $\int \mathrm{sh}\ U\,dU = \mathrm{ch}\ U + C$

21. $\int \mathrm{ch}\ U\,dU = \mathrm{sh}\ U + C$

22. $\int \dfrac{dU}{\mathrm{ch}^2\ U} = \mathrm{th}\ U + C$

23. $\int \dfrac{dU}{\mathrm{sh}^2\ U} = -\mathrm{cth}\ U + C$

24. $\int \sqrt{U^2 \pm a^2}\,dU = \dfrac{1}{2}\left(U\ \sqrt{U^2 \pm a^2} \pm a^2\ \ln|U + \sqrt{U^2 \pm a^2}|\ \right) + C$

25. $\int \sqrt{a^2 - U^2}\,dU = \dfrac{1}{2}\left(U\ \sqrt{a^2 - U^2} + a^2 \arcsin\dfrac{\mathrm{U}}{\mathrm{a}}\right) + C$

26. $\int e^{\alpha U}\sin\beta U\ dU = \dfrac{e^{\alpha U}}{\alpha^2 + \beta^2}(\alpha\sin\beta U - \beta\cos\beta U) + C$

27. $\int e^{\alpha U}\cos\beta U\ dU = \dfrac{e^{\alpha U}}{\alpha^2 + \beta^2}(\alpha\cos\beta U + \beta\sin\beta U) + C$

Ряды Маклорена элементарных функций

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$

2. $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$

3. $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},$

4. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$

5. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$

6. $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots,$

7. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,$

8. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1},$

9. $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)},$

10. $\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}\frac{x^7}{7} + \ldots$

11. $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \ldots$

12. $\operatorname{th} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \ldots$

Ряд и интеграл Фурье (основные формулы)

1. Ряд Фурье функции, заданной на интервале $[-\pi;\ \pi]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx$$

2. Ряд Фурье функции, заданной на интервале $[-l;\ l]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\ dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\ dx$$

3. Ряд Фурье функции, заданной на интервале $[0;\ l]$

По синусам

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\ dx$$

По косинусам

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\ dx$$

4. Ряд Фурье $f(x),\ x \in (-l;\ l)$ в комплексной форме

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n(\omega_n)e^{i\omega_n x}, \quad \text{где} \quad \omega_n = \frac{n\pi}{l}, \quad S_n(\omega_n) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\omega_n x}dx$$

5. Интеграл Фурье функции $f(x),\ x \in (-\infty;\ \infty)$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\ dt\right)\ d\omega$$

Для четной функции $\quad f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty}\cos\omega x\ d\omega\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t\ dt$

Для нечетной функции $\quad f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty}\sin\omega x\ d\omega\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\omega t\ dt$

6. Преобразование Фурье функции $f(x),\ x \in (-\infty;\ \infty)$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

7. Косинус и синус преобразования Фурье функции $f(x),\ x \in (0;\ \infty)$

$$F_c(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\omega x\ dx, \qquad F_s(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\sin\omega x\ dx$$

Таблица изображений и оригиналов

	$f(t)$	$F(p)$
1	1	$\dfrac{1}{p}$
2	t	$\dfrac{1}{p^2}$
3	t^2	$\dfrac{2}{p^3}$
4	e^{-at}	$\dfrac{1}{p+a}$
5	$t\ e^{-at}$	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$
6	$t^2 e^{-at}$	$\dfrac{2}{(p+a)^3}$
7	$\begin{cases} f(t), & 0 \le t \le \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}$	$F(p)(1-e^{-p\tau})$
8	$\sin at$	$\dfrac{a}{p^2+a^2}$
9	$\cos at$	$\dfrac{p}{p^2+a^2}$

	$f(t)$	$F(p)$
10	$t \sin at$	$\dfrac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$
11	$t \cos at$	$\dfrac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$
12	$\mathrm{sh}\ at$	$\dfrac{a}{p^2-a^2}$
13	$\mathrm{ch}\ at$	$\dfrac{p}{p^2-a^2}$
14	$e^{-at} \sin bt$	$\dfrac{b}{(p+a)^2+b^2}$
15	$e^{-at} \cos bt$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$
16	$e^{-at}\mathrm{sh}\ bt$	$\dfrac{b}{(p+a)^2-b^2}$
17	$e^{-at}\mathrm{ch}\ bt$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2-b^2}$
18	$\delta(t)$	1
19	$\delta(t-\tau)$	$e^{-p\tau}$

1. Вычислить определители

$$a)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 7 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & -6 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

2. Найти матрицу **X** из уравнения. Сделать проверку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Решить системы линейных уравнений:

a) методом Крамера, b) матричным методом

$$a)\ \begin{cases} 2x - y + 6z = 25 \\ 3x + 2y + 4z = 12 \\ x - y + 3z = 14 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} -x + 2y + 3z = 13 \\ 5x - y + 4z = 2 \\ x + 3y = -6 \end{cases}$$

4. Решить системы методом Гаусса

$$a)\ \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 16 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 = 23 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 10 \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = -5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -4 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

5. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad b)\ B = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Точка делит диагональ AC в отношении $|\, AM \,| : |\, MC \,| = 2/7$. Выразить векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{MB}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

2. Определить координаты точки C, лежащей на прямой, проходящей через точки A и B, если $A(-2;3;1)$, $B(5;-2;-4)$ и $|AC| : |CB| = 0,5 : 3$

3. В треугольнике с вершинами $A(0;3;-2)$, $B(-1;3;4)$, $C(0;2;3)$.
Найти: a) вектор медианы AM,
b) вектор высоты BD,
c) любой по модулю вектор биссектрисы угла C.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$:
$A(1;3;-3)$, $B(-2;3;-4)$, $C(-3;-1;5)$. Найти:
a) координаты четвертой вершины D,
b) длину высоты, опущенной на сторону AB,
c) косинус острого угла между диагоналями AC и BD.

5. Параллелограмм построен на векторах $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}$ и $\vec{b} = 2\vec{p} - 5\vec{q}$, где $|\,\vec{p}\,| = 5$, $|\,\vec{q}\,| = 2$, $(\vec{p}\,{}^\wedge \vec{q}) = 60^o$. Определить:
a) косинус угла между его диагоналями;
b) длину высоты, опущенной на сторону $\vec{b}$.

6. Найти единичный вектор $\vec{e}$, который одновременно перпендикулярен векторам $\vec{a} = \{7;4;6\}$ и $\vec{b} = \{2;1;1\}$, если $(\vec{e}\,{}^\wedge \vec{i}) \le \pi/2$.

7. В пирамиде $ABCD$ с вершинами в точках
$$A(1;-1;2),\ B(2;1;2),\ C(1;1;4),\ D(6;-3;8)$$
найти объем и длину высоты, опущенной на грань ABC.

8. Доказать, что векторы $\vec{p} = \{0;2;1\}$, $\vec{q} = \{0;1;-1\}$, $\vec{r} = \{5;-3;2\}$ образуют базис и найти разложение вектора $\vec{x} = \{15;-20;-1\}$ в этом базисе.

Аналитическая геометрия на плоскости

1. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(7;-2)$:

a) параллельно прямой $\dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{7}=1$

b) перпендикулярно прямой $\begin{cases} x=2t-10 \\ y=-2t-3 \end{cases}$

c) под углом 45^0 к прямой $3x+8y-12=0$

2. Даны вершины треугольника $A(-14;10)$, $B(10;3)$, $C(-8;27)$.
Составить: a) уравнение стороны AC,
b) уравнение медианы BM,
c) уравнение высоты CH и найти ее длину.

3. Даны две прямые $l_1:\dfrac{x}{-4}=\dfrac{y+8}{2}$, $l_2:\dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{5}=1.$

Найти:

a) точку пересечения прямых,

b) косинус угла между прямыми,

c) составить уравнения биссектрис углов между прямыми.

4. Привести уравнения линий к каноническому виду и построить:

1) $x^2+y^2+3x=0$ 2) $2x^2-4x+y^2-10y+15=0$

3) $y=6-\sqrt{x^2+6x+13}$ 4) $x=-y^2+7y+1$

5) $x^2-4xy+y^2-8x+14y+15=0$ 6) $3x^2+4xy+3y^2+8x+12y+1=0$

5. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой находится вчетверо дальше к точке $M(6;-2)$, чем к точке $B(0;-2)$.

6. Построить линии, заданные в полярных координатах:

1) $\rho=\cos^3\varphi$, 2) $\rho=\cos\varphi-\sqrt{3}\sin\varphi$, 3) $\rho=\dfrac{4}{2+5\cos\varphi}$.

7. Построить линии, заданные параметрическими уравнениями:

1) $\begin{cases} x=4\cos t \\ y=-2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=5\sin t \\ y=4\cos t \end{cases}$

8. Построить фигуру, ограниченную линиями

1) $\left| \begin{array}{l} y=x^2, \\ y=1+3x^2/4. \end{array} \right.$ 2) $\left| \ \rho=3\cos 2\varphi. \right.$

Аналитическая геометрия в пространстве

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_1(1;9;-4)$, $M_2(5;7;1)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{3;6;-4\}$ Найти расстояние от начала координат до этой плоскости и объем пирамиды, отсекаемой плоскостью от координатного угла.

2. Из общих уравнений прямой

$$\begin{cases} 6x - 7y - z - 2 = 0 \\ x + 7y - 4z - 5 = 0 \end{cases}$$

получить ее канонические и параметрические уравнения.

3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;0;1)$ и пересекающую прямую

$$\begin{cases} x = t + 3 \\ y = -4t + 5.5 \\ z = -5t \end{cases}$$

под прямым углом.

4. Найти расстояние от точки $M(3;4;-1)$ до прямой, проходящей через две точки $A_1(1;3;-6)$ и $A_2(2;2;1)$.

5. Построить поверхности

1) $x^2 + z^2 = y^2$ 2) $x^2 + y^2 = 8 - 2z$

3) $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{6} + z^2 = 12$ 4) $x - 4 = y^2$

5) $6 = 3x^2 + 2z^2$ 6) $z = 3\sqrt{y} - 3$

6. Построить тело, ограниченное поверхностями

$a)\ \left|\begin{array}{l} z = 0, \\ x = 1, \\ y = 4x, \\ z = \sqrt{y}. \end{array}\right.$ $b)\ \left|\begin{array}{l} x^2 + y^2 + 1 = z, \\ x + y = 3, \\ x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0. \end{array}\right.$

Предел. Непрерывность

1. Найти пределы

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+3n)^3-27n^3}{(1+5n)^2+7n^2}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[4]{7n^2}+\sqrt[3]{4n^6+2}}{(3n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+2n^2}}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(\sqrt{9+\mathrm{x}^3}-3)}{\ln(1+\sin\sqrt{x^5})}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{3n^2+4n-1}{3n^2+5n-1}\right]^{2-5n^2}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+3)!}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot 4^n-5\cdot 8^{n-2}}{3\cdot 8^{2n+1}+4\cdot 4^{n-3}}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-8x+3}{3x-5x^2+1}$

8. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x^3-2x^2}{\sin^2 5x}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}^2\sqrt{5x}}{3^{-4x}-1}$

11 . $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(5x^2+1)}{1-\sqrt{3x^2+1}}$

12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos 3\pi x}{\operatorname{tg}^2\pi x}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 5x}{7x}\right)^{1+3x}$

14. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x-2}{x}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin 2x}}$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\sqrt[3]{1-2n^3}\right)$

2. Сравнить две бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to 0$, если

1) $\alpha(x)=\ln\cos 2x,\qquad \beta(x)=\sqrt{6x^2+1}-1$

2) $\alpha(x)=e^{\mathrm{tg2x}}-1,\qquad \beta(x)=\mathrm{shx}-\sin 3\mathrm{x}$

3. Для данных бесконечно малых при $x\to x_0$ величин записать эквивалентнные в виде $A(x-x_0)^k$

1. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{2x}+1}-1,\quad x_0=0$

2. $\dfrac{x^2+3x^5}{7x+1},\quad x_0=0$

3. $\ln^2(5-x),\quad x_0=4$

4. $\sqrt{\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)},\quad x_0=-\dfrac{\pi}{3}$

4. Исследовать на непрерывность функции

1. $y=\dfrac{2x-1}{x^2-4}$

2. $y=\dfrac{2}{3+4^{\frac{1}{x-3}}}$

3. $y=\begin{cases}2x, & x\le 0\\ 4x-10, & 0<x\le 3\\ \sqrt{x+1}, & x>3\end{cases}$

Производные

1. Найти производные $y'(x)$ данных функций

1) $y=(2x-3)\cdot\sqrt{4x^2-12x+5}$

2) $y=\sin\dfrac{1}{2x+3}-(2x+3)^2$

3) $y=\dfrac{2}{3}\cdot\cos^3(5x+4)\cdot e^{3x^2}$

4) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}+\dfrac{x-1}{(7x+5)^6}$

5) $y=4^{\sqrt{\sin 2x}}+3^{\ln \arcsin x}$

6) $y=\dfrac{\operatorname{ctg}(x-1)}{\ln(x-1)}-\dfrac{1}{\operatorname{tg}\sqrt{3x}}$

7) $y=\ln\sqrt[5]{\dfrac{(1+\operatorname{tg}x)\cdot\cos^3 7x}{(4x^3-x)^2\cdot\ln 6x}}$

8) $y=\sqrt[3]{\dfrac{e^{\sin x+\cos x}\cdot 2x}{(9x-2)^5}}$

9) $y=\sqrt[x]{(x\cdot\cos^2 x+3)^4}$

10) $y=(\operatorname{arctg}3^x)^{\frac{1}{\ln x}}$

11) $\begin{cases} x=\cos t+\sin t\\ y=\sin 2t\end{cases}$

12) $\begin{cases} x=\dfrac{\operatorname{tg}t}{t^2}\\ y=\dfrac{e^{2t}}{t^2-1}\end{cases}$

13) $\operatorname{arctg}2y-5^{(2x+3y)}=\dfrac{y}{x}$

14) $\sqrt{x}\cdot(y+4)^2=y^3+7y-2$

2. Найти вторую производную y'' функции

1) $y=\dfrac{2x-3}{(x+4)^2}$

2) $\begin{cases} x=\sqrt{t^3-1}\\ y=\ln t\end{cases}$

3. Вычислить значение производной функции в точке

1) $y=e^{x\cdot\ln(x+2)}$, $x_o=0$

2) $\begin{cases} x=\sin t\\ y=\cos 2t\end{cases}$ $t_o=\dfrac{\pi}{6}$

4. Найти первый dy и второй d^2y дифференциалы функции

1) $y=\dfrac{2x+3}{5x^2+x+4}$

2) $y=5^{-\ln x}$

5 Доказать, что функция $y=-\sqrt{x^4-x^2}$
удовлетворяет уравнению $x\cdot y\cdot y'-y^2=x^4$

Приложения производной

1. Исследовать на экстремум функции

$$1)\ \ y = \frac{1}{5}(4x^3 - x^4) \qquad 2)\ \ y = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$$

$$3)\ \ y = \sin 2x + 2\cos x$$

2. Составить уравнения всех асимптот следующих кривых

$$1)\ \ y = \frac{x^2}{x^2 - 1} \qquad 2)\ \ y = \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$$

$$3)\ \ y = (x^2 - 4x + 3) \cdot e^{x-1}$$

3. Провести полное исследование и построить графики функций

$$1)\ \ y = \frac{4x^3}{x^3 - 1} \qquad 2)\ \ y = (x-1) \cdot e^{3x+1}$$

$$3)\ \ y = \ln(x^2 + 1)$$

4. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой $x = x_o$, или соответствующей значению параметра $t = t_o$

$$1)\ \ y = 8\sqrt[4]{x} - 70 \qquad x_0 = 16.$$

$$2)\ \ \begin{cases} x = 5\cos^3 t \\ y = 5\sin^3 t \end{cases} \qquad t_0 = \pi/3$$

5. Сумма двух положительных чисел равна a . Найти эти числа при наименьшем значении их произведения.

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = 2\sin 2x + \cos 4x \quad \text{в интервале} \quad [0;\ \pi/3]$$

7. Используя правило Лопиталя, найти пределы

$$1)\ \ \lim_{x\to 1} \frac{1 + \cos\pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x} \qquad 2)\ \ \lim_{x\to+0} [\ln(x+e)]^{\frac{1}{x}} \qquad 3)\ \ \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x\sqrt{\cos x}}{x^2}$$

1. Найти и изобразить области определения функций:

1) $z = \dfrac{4xy}{x^2 - y^2}$ 2) $z = \arcsin\dfrac{1}{\mathrm{y}} + \sqrt{9 - \mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2}$

2. Найти частные производные z_x' и z_y' функций

1) $z = \left(\dfrac{y}{x}\right)^3 - e^{-\sqrt{x}}$ 2) $z = \arcsin(\ln \mathrm{y} + \mathrm{x}^5) + \ln(\mathrm{arctg}\ \mathrm{xy})$

3) $z = \dfrac{x^3}{\sqrt[5]{x^2 - y^2}} - y^{-x} \sin\dfrac{y^2}{x^3}$ 4) $z = \dfrac{1}{(3x^2 + 7y)^4}$

3. Найти частные производные z_x' и z_y' сложной функции

$z = u^3 v^4 + \dfrac{v^3}{u^2}$, где $u = (\cos 3y)^{x^3}$, $v = \dfrac{1}{\sqrt{3x - \ln y}}$

4. Найти производную z_t', если

$z = \ln(5x - \mathrm{tg}\ (y^3))$, $x = \sqrt{t + 6}$, $y = t \cdot e^{-t^3}$

5. Найти производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{d\ z}{d\ x}$, если

$$z = \ln\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}, \quad \text{где} \quad y = \sin\frac{3}{x^2}$$

6. Найти производную y' неявной функции $y(x)$, заданной выражением

1) $\mathrm{arctg}\ 2y - 5^{(2x + 3y)} = \dfrac{y}{x}$, 2) $\sqrt{x} \cdot (y + 4)^2 = y^3 + 7y - 2$

7. Найти частные производные z_x' и z_y' неявной функции $z(x, y)$,

заданной выражением $5(x^2 - 5y^4 + 9z^7) = 2(xyz - 3x^y + 2yz) + \dfrac{2}{z - y}$

8. Найти первый dz и второй d^2z дифференциалы функции

$$z = \sin(x + 2y)$$

9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y - 148$ в точке $M_o(-2;\ 3;\ z_o)$

10. Исследовать на экстремум функцию $z = e^{x^2 - y}(5 - 2x + y)$

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 y$ в замкнутой области $D : \{x^2 + y^2 \le 1\}$

Неопределенный интеграл

1. $\int \frac{dx}{x \cdot \cos^2(2\ln x - 5)}$

2. $\int \frac{\operatorname{ctg}\, x\, dx}{\ln(\sin x)}$

3. $\int \frac{dx}{(5x+6)^9}$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(2-x)}$

5. $\int \frac{5^{\operatorname{tg}\,(1/x)}}{x^2 \cdot \cos^2(1/x)}\, dx$

6. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{5\sin x - 2}}$

7. $\int \frac{(5x-4)\, dx}{x^2+9}$

8. $\int (1 - \operatorname{tg}\, x)^2\, dx$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$

10. $\int x \cdot \sqrt[3]{7+9x^2}\, dx$

11. $\int x^2 \cdot \ln(1+x^3)\, dx$

12. $\int (7x+6) \cdot \cos 3x\, dx$

13. $\int \sqrt{1-x}\, \arcsin\sqrt{\mathrm{x}}\, \mathrm{dx}$

14. $\int x \cdot \operatorname{arctg}\, 5x\, dx$

15. $\int e^{5x} \cdot \sin x\, dx$

16. $\int x^7 \cdot e^{-x^4}\, dx$

17. $\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}$

19. $\int \frac{(x-9)\, dx}{3x^2-x-4}$

20. $\int \frac{(1-2x)\, dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$

21. $\int \frac{x^4\, dx}{(x^2-1)\,(x+2)}$

22. $\int \frac{(2x^3+3x-1)\, dx}{(x+1)^2\,(x^2+9)}$

23. $\int \frac{dx}{x^4+x^3}$

24. $\int \frac{dx}{8x^3+1}$

25. $\int \frac{\sqrt{2x+1}\, dx}{x^2}$

26. $\int \frac{\sqrt{x}\, dx}{1-\sqrt[3]{x}}$

27. $\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x \cdot \sqrt[5]{x^2}}\, dx$

28. $\int \sqrt{1-4x-x^2}\, dx$

29. $\int \frac{\sqrt{x^2-8}}{x^4}\, dx$

30. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$

31. $\int \frac{dx}{3+2\cos x+5\sin x}$

32. $\int \frac{dx}{4-3\sin^2 x}$

33. $\int \cos^5 x\, dx$

34. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^4 x}$

35. $\int \sin 3x \cdot \cos^2 5x\, dx$

36. $\int \frac{dx}{1-\operatorname{ctg}\, x}$

37. $\int \frac{e^x\, \sqrt{1+e^x}\, dx}{e^x-1}$

38. $\int \operatorname{arctg}\,(1+\sqrt{x})\, dx$

Определенный интеграл

1. Вычислить определённые интегралы

1) $\int\limits_{1}^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ 2) $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx$ 3) $\int\limits_{0}^{1} x^3 \operatorname{arctg} x\,dx$

4) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{1-\sin x}$ 5. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{x\,(x^2-1)}$ 6. $\int\limits_{2/3}^{7/3} \frac{x\,dx}{\sqrt{2+3x}}$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

1) $y = \frac{x}{\sin^2 x}$, $[\pi/3;\ \pi/2]$ 2) $y = \frac{x}{x^2+3x-1}$, $[1;\ 3]$

3. Оценить значения интегралов

1) $\int\limits_{-1}^{2} \left(x^2 + 2^{-x^2}\right)\,dx$ 2) $\int\limits_{-1}^{1} (1+\sqrt{1-x^6})\,dx$

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

1) $\int\limits_{-\infty}^{0} x\cdot\sin(x^2)\,dx$ 2) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{1-e^x}$

3) $\int\limits_{1}^{\infty} x^3 \operatorname{arctg}^5 \frac{\pi}{x}\,dx$ 4) $\int\limits_{0}^{3} \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(x^4-81)^5}}$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $\left|\begin{array}{l} y = 5/x, \\ x+y=6, \\ x=6. \end{array}\right.$ 2) $\left|\begin{array}{l} \rho = \sqrt{2}\cos(\varphi-\pi/4), \\ \rho = \sqrt{2}\sin(\varphi-\pi/4). \end{array}\right.$ 3) $\left|\begin{array}{l} x = e^t, \\ y = e^{-t}, \quad y = 0, \\ x = 1/2, \quad x = 2. \end{array}\right.$

6. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной
указанными линиями: 1) – вокруг оси OX, 2) – вокруг оси OY:

1) $\left|\begin{array}{l} y^2 = (x-1)^3, \\ x = 2. \end{array}\right.$ 2) $\left|\begin{array}{l} y = e^x, \quad y = 0, \\ x = 0, \quad x = 2. \end{array}\right.$

7. Вычислить длины дуг кривых:

1) $L: \left|\begin{array}{l} y = \frac{2}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{2}{3}\sqrt[4]{x^3}, \\ y = 0. \end{array}\right.$ 2) $L: \left|\begin{array}{l} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \\ \pi/6 \le t \le \pi/4. \end{array}\right.$

8. Коническая емкость с радиусом основания R и высотой H, обращенная вершиной вниз, заполнена водой. Найти силу давления воды на стенку емкости.

Кратные интегралы

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\,dx\,dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

1) $y=\sqrt{12-x^2}, \quad y=2\sqrt{3}-\sqrt{12-x^2}, \quad x=0, \quad (x\geq 0).$
2) $y=|\ln x|, \quad y=5.$

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$J=\int\limits_0^{1/2}dx\int\limits_0^{\sqrt{2x}}f(x,y)\,dy+\int\limits_{1/2}^{\sqrt{2}}dx\int\limits_0^{1}f(x,y)\,dy+\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}dx\int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}}f(x,y)\,dy.$$

3. Перейти к полярным координатам и вычислить

$$\iint\limits_{(D)} x\;dx\,dy, \qquad D:\{x^2+y^2\leq bx, \quad x\geq 0\}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

1) $y=2; \quad y=x^2+5, \quad x=1, \quad x=3.$
2) $(x^2+y^2)^{5/2}=x\cdot y^2.$

5. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной
поверхностной плотности $\delta(x;y)$

1) $D: \ \{y=4x+6, \quad x-2y-1=0, \quad x=-1\}, \qquad \delta(x;y)=x.$
2) $D: \ \{y\leq x^2+y^2\leq 2y\}, \qquad \delta(x;y)=3y.$

6. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$
в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V),
ограниченной поверхностями:

1) $z=x^2, \quad 2x=y, \quad x=4, \quad y\geq 0, \quad z\geq 0.$
2) $x^2+y^2=4, \quad y=\sqrt{x^2+z^2}, \quad y\geq 0.$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

1) $x^2+y^2+z^2=1, \quad x^2+y^2+z^2=9, \quad y\leq x, \quad y\geq 0, \quad z\geq 0.$
2) $z=4-x^2-y^2, \quad x+y=2, \quad x\geq 0, \quad y\geq 0, \quad z\geq 0.$

8. Вычислить массу тела, занимающего область

$$V: \ \{x^2+y^2=2x, \quad x+z=2, \quad y\geq 0, \quad z\geq 0\},$$

если задана объемная плотность $\gamma(x;y;z)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

Криволинейный и поверхностный интегралы

1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{(L)} y^2\, dl$, где L – дуга линии $x = \ln y$ между точками $A(0,1)$ и $B(1,e)$.

2. Найти массу линии $\rho = \sin 2\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi/2$, если линейная плотность $\delta(x;y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

3. Вычислить интеграл $\int\limits_{(L)} \dfrac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где L : отрезок прямой, соединяющий точки $A(1;\ 1;\ 1)$ и $B(2;\ 2;\ 2)$.

4. Вычислить $\iint\limits_{(S)} (x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) d\sigma$, где (S)– поверхность, отсекаемая от конуса $z = \sqrt{x^2+y^2}$ цилиндром $y^2 + x^2 = 2x$.

5. Найти площадь части конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$.

6. Вычислить массу части плоскости $3x + 2y = 6$, лежащей в первом октанте и обрезанной плоскостями $z = 0$, $z = 10$, если поверхностная плотность $\delta(x;y;z) = x$.

7. Вычислить $\int\limits_{(L)} (x-2y)\ dx + (x-y)\ dy$, где L – окружность $x^2 + y^2 = 2y$, обходимая в положительном направлении.

8. Доказать, что выражение $\dfrac{y + \sin x\ \cos^2(xy)}{\cos^2(xy)}\, dx + \left(\dfrac{x}{\cos^2(xy)} + \sin y\right)\ dy$ является полным дифференциалом функции $U(x;y)$, и найти эту функцию.

9. Вычислить $\iint\limits_{(S)} y\ dxdz$, где (S)– внешняя сторона поверхности $x^2 + y^2 = 1 - 4z$, расположенной в первом октанте.

10. Вычислить $\iint\limits_{(S)} (z^2-y^2)\ dydz + (x^2-z^2)\ dxdz + (y^2-x^2)\ dxdy$, где (S)– внешняя сторона поверхности полусферы $x^2+y^2+z^2 = 4$, $z \ge 0$.

1. Найти работу силового поля
$\vec{F}(x;\ y) = \{x + \sqrt{x^2+y^2});\ (y - \sqrt{x^2+y^2})\}$ вдоль дуги плоской кривой $L:\ x = 4\cos t,\ \ y = 4\sin t,\ \ (x \geq 0;\ \ y \geq 0)$
между точками $(4;\ 0)$ и $(0;\ 4)$.

2. Найти работу силового поля $\vec{F} = y\cdot\vec{i} + z\cdot\vec{j} + x\cdot\vec{k}$ вдоль дуги кривой $L:\ x = \cos t,\ \ y = -\sin t,\ \ z = 2t,\ \ t \in [0;\ \pi/2]$.

3. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали

1) $\vec{A} = \{0;\ \ y;\ \ 3z\}$, где $S-$ часть плоскости $x + 2y + 2z = 2$, вырезанной координатными плоскостями.

2) $\vec{A} = (\sqrt{2z-y} + 7x)\cdot\vec{i} + (\cos z^2 + y)\cdot\vec{j} + (\sqrt{\ln x + y} - 5z)\cdot\vec{k}$, где $S-$ полная поверхность
усечённого конуса $z^2 + y^2 = (x-5)^2,\ \ x = 1,\ \ x = 4$.

3) $\vec{A} = 3xz\cdot\vec{i} - 2x\cdot\vec{j} + y\cdot\vec{k}$, где $S-$ полная поверхность тела, ограниченного поверхностями $x+y+z = 2,\ x = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

4. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L

1) $\vec{A} = \{(y - \ln(x+1));\ \ (2x - \cos y)\}$,
$L -$ замкнутая линия $y = x^2,\ \ x = y^2$.

2) $\vec{A} = y\,z\cdot\vec{i} - x\,z\cdot\vec{j} + x\,y\cdot\vec{k}$, $\quad L - \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 9, \\ x^2+y^2 = 9. \end{cases}$

5. Проверить, будет ли векторное поле $\vec{A} = \dfrac{x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал.

6. Построить поверхности уровня скалярного поля $U(x;y;z) = \dfrac{\sqrt{y}}{2(x-1)}$.

7. Найти производную скалярного поля $U(x;\ y;\ z) = x\,y - x/z$
в точке $M_0(-4;\ 3;\ 1)$ в направлении вектора $l = 5\,\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

8. В точке $M_0(1;1/3;1/\sqrt{6})$ найти угол между векторами – градиентами скалярных полей

$$U(x;y;z) = \frac{1}{xyz}, \qquad V(x;y;z) = x^2 + 9y^2 + 6\,z^2$$

Дифференциальные уравнения и системы

1. Найти общие решения уравнений первого порядка

1) $[\ \sin(xy) + x\,y\ \cos(xy)\ ]\,dx + x^2\ \cos(xy)\,dy = 0.$
2) $xy' - y = y\ \ln\dfrac{x+y}{x}.$
3) $(1+x^2)\,y' = x\,y + x^2y^2.$
4) $(1+x^2)\,y' + y\,\sqrt{1+x^2} = x\,y.$
5) $(xy'-1)\,\ln x = 2y.$
6) $\cos y\,dx = (x + 2\cos y)\ \sin y\,dy.$

2. Найти частные решения уравнений

1). $x\,y' - 2\sqrt{x^3y} = y,\qquad y(1) = 4.$
2). $x\,y' = x - y,\qquad y(0) = 0.$
3). $\left(\dfrac{y}{x^2+y^2} + e^x\right)\,dx - \dfrac{x\,dy}{x^2+y^2} = 0,\qquad y(1) = 2.$
4). $(x^2y - y)^2 \cdot y' = x^2y - y + x^2 - 1,\qquad y(0) = 0.$

3. Найти решения уравнений высшего порядка

1) $y'' = y' + (y')^2,\quad \begin{matrix} y(0)=0, \\ y'(0)=1 \end{matrix}.$ 2) $y'' - x\,y''' + (y''')^3 = 0.$
3) $x\,(y''+1) + y' = 0.$ 4) $x^3\,y^{(4)} = 4.$

5) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{3+e^{-x}}.$ 6) $y'' + y = \dfrac{2}{\sin^2 x}.$

7) $y'' + 2y' - 15y = x\ \sin 5x.$ 8) $y'' - 8y' + 17y = 10e^{2x}.$
9) $y''' - 5y'' + 6y' = (x-1)^2,$ 10) $y''' + 4y'' + 3y' = 4(1-x)\ e^{-x}.$

11) $x^2\ y'' + 7x\ y' + 9y = 0,$ 12) $x^2\ y'' - 3x\ y' = x^2 - 4x.$

13) $\ddot{x} - 9x = (2t^2 - 5t)\,e^{3t},\qquad x(0) = 2,\quad \dot{x}(0) = 1.$
14) $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 2t^4 + t,\qquad x(0) = 0,\quad \dot{x}(0) = 2.$

4. Найти решения линейных систем

1) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y \\ \dot{y} = x + 5y \end{cases}.$ 2) $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 4y \\ \dot{y} = 4x - 2y \end{cases},\quad \begin{matrix} x(0) = 0 \\ y(0) = 1. \end{matrix}$

3) $\begin{cases} \dot{x} = -5x + 4y \\ \dot{y} = -4x + 3y \end{cases}.$ 4) $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - 5t + 1 \\ \dot{y} = x + 2y + t - 1 \end{cases}.$

Числовые и функциональные ряды.

1. Найти суммы числовых рядов

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{2}{7}\right)^{n}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5}{25n^2-5n-6}$ 3) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n-2}{(n-1)n(n+1)}$

2. Исследовать ряды на сходимость

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\cdot\ln n}$ 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{4}{n+1}\right)^{n/2}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{7n-2}}{(2n+1)!}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\cdot 4\cdots(2n-2)}{1\cdot 4\cdots(3n-2)}$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^{3n}(5n^2+1)}$ 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n^2+5-3n}{5n^2+n+1}\right)^n$

7) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln^2 n}}$ 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{-1/n}}{n^2}$

3. Найти интервалы сходимости функциональных рядов

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n^2}(x+2)^{n^2}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x^2-5x+11)^n}{5^n(n^2+5)}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\operatorname{tg}^n x$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)^n 4^{-n/x}$

4. Найти суммы функциональных рядов

1) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-2}x^{n-1}}{(n-1)(n-2)}$ 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n^2+n-1)x^n$

5. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-x_0)$ функции

1) $y=\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$, $x_0=0$. 2) $y=e^{3x}$, $x_0=1$

3) $y=\frac{4}{x^2-4x-12}$ $x_0=0$, 4) $y=7x^3+9x+2$ $x_0=-2$.

6. Вычислить интегралы с точностью до 0,001

1) $\int\limits_0^{0,5}\ln(1+x^3)\,dx$ 2) $\int\limits_0^{0,5}\cos\sqrt[3]{x}\,dx$

Ряды Фурье. Интеграл Фурье

1. Заданную на интервале $(-l;\ l)$ функцию разложить в тригонометрический ряд Фурье. Построить график суммы полученного ряда.

$$1)\ f(x) = 3x + 2, \quad x \in (-\pi;\ \pi),$$

$$2)\ f(x) = 1 - \cos x, \quad x \in (-2;\ 2)$$

$$3)\ \ f(x) = \begin{cases} -2x, & -3 < x < 0, \\ 0, & 0 \le x < 3 \end{cases}$$

2. Функцию $f(x) = \begin{cases} x - 1, & 0 < x < 2, \\ x - 3, & 2 \le x < 4 \end{cases}$ разложить в ряд Фурье по ортогональной системе функций $\left\{\sin\dfrac{n\pi x}{4}, \quad n = 1, 2, ...\infty\right\}$. Построить график суммы полученного ряда.

3. Функцию $f(x) = \begin{cases} 1 + x, & 0 < x < 2, \\ 0, & 2 \le x < 3 \end{cases}$ разложить в ряд Фурье по ортогональной системе $\left\{\cos\dfrac{n\pi x}{3}, \quad n = 0, 1, 2, ...\infty\right\}$. Построить график суммы полученного ряда.

4. Функцию $f(x) = 2x - 4, \quad -4 < x < 4$ представить тригонометрическим рядом Фурье в комплексной форме. Записать:

a) спектральную функцию $S(\omega_n)$,
b) амплитудный спектр $A(\omega_n) = |S(\omega_n)|$
c) фазовый спектр $\varphi(\omega_n) = \arg S(\omega_n)$.

5. Функцию $f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ представить интегралом Фурье.

6. Найти преобразование Фурье $F(\omega)$ функции

$$f(x) = \{\ xe^{-|x|},\ x \in (-\infty; \infty)$$

7. Найти косинус преобразование Фурье $F_c(\omega)$ функции

$$f(x) = \begin{cases} \text{ch } 2x, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Комплексные числа и функции

1. Даны числа $z_1 = 3 - 8i$, $z_2 = 1 + 5i$. Вычислить:

1) $2z_1 - 3z_2$, 2) $(z_2)^2$, 3) $\dfrac{\overline{z}_1 - z_2}{z_2}$, 4) $\dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2}$,

5) $\sqrt[3]{z_1 z_2^2}$, 6) $\ln z_1$, 7) $\cos z_2$, 8) $\operatorname{sh} \overline{z}_1$.

Результаты вычислений представить в показательной и алгебраической формах.

2. Определить и построить на комплексной плоскости семейства линий, заданных уравнениями

$$1)\ \ \frac{1}{\sin(\arg z)} = C, \qquad 2)\ \ |\, z\,| = C(1 - \cos(\arg z)).$$

3. Решить уравнения

$$1)\ \ 1 + \cos^2 z = \sqrt{3}, \qquad 2)\ \ z^4 - 16i = 0.$$

4. На комплексной плоскости заштриховать области, в которых при отображении функцией $f(z) = iz^2 + (6 - 3i)\, z + 2i$ имеет место

a) сжатие $k \leq 1$;

b) поворот на угол $0 \leq \alpha \leq 90^o$.

5. Доказать, что функция $v(x;y) = y - \dfrac{y}{x^2 + y^2}$ может служить мнимой частью аналитической функции $f(z) = u + iv$ и найти ее.

6. Вычислить интегралы

1) $\displaystyle\int_{(L)} z^2\, |z|\, dz$, где $L : \{ \ |\, z\,| = 2, \ \ \operatorname{Re} z < 0 \ \}$;

2) $\displaystyle\int_{(L)} z^2 \operatorname{Im} z\, dz$, где $L :$ отрезок прямой между точками $z_1 = 0$, $z_2 = 1 - 2i$.

7. Вычислить, используя интегральную формулу Коши

$$\oint_{(L)} \frac{z^2 - z}{z^2(z+1)^2}\, dz, \qquad \text{где } L : \begin{cases} 1)\ \ |z| = 0,5; \\ 2)\ \ |z+1| = 1; \\ 3)\ \ |z| = 2. \end{cases}$$

Вычеты и их приложения

1. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1+2ni} \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

2. Найти и построить область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{3^n(i+n)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(z+i)^n}(n+i).$$

3. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z - z_0$

а) $\dfrac{5z-100}{z^4-5z^3-50z^2}, \quad z_0 = 0;$ б) $z \exp\left(\dfrac{\pi}{z-a}\right)^2, \quad z_0 = a.$

4. Для функции $[\exp(1/z)]/(z^4-1)$ найти изолированные особые точки и определить их тип.

5. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

а) $\dfrac{\exp 6z - \cos 8z}{\text{sh } 4\text{z}}, \quad z = 0;$ б) $\dfrac{\cos(\pi z/3)}{(z-3)^2(z-5)}, \quad z = 3;$

в) $\dfrac{1}{z}(z^2 e^{1/z^2} - 1), \quad z = 0;$ г) $\dfrac{\text{ch } 3z - \cos 4iz}{z^2 \sin 5z}, \quad z = 0;$

д) $\dfrac{2z-1}{(z+1)^2} \cos^2 \pi z - 23z + 3i,$ $z = \infty;$ е) $(z+2i) \cos^2 \dfrac{z\pi - 1}{2z},$ $z = \infty.$

6. Вычислить интегралы

а) $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=2} z \,\text{ch}\, \frac{3}{z-2} dz;$ б) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=2} \frac{\pi i}{\exp(\pi z/2) - i} dz;$

в) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+11)^2} dx;$ г) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2-x+1)^2} dx;$

д) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1}{5+2\sqrt{6}\sin t} dt;$ е) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}\cos t)^2} dt.$

Операционный метод

1. Найти изображения следующих функций

1) $f(t)=\dfrac{1}{2}\,(\mathrm{ch}t\ \sin t+\mathrm{sh}t\ \cos t)\,.$ 3) $f(t)=\int\limits_0^t \tau e^{\pi\tau}d\tau.$

2) $f(t)=t^2\ \sin 5t.$ 4) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ e^{-t}, & 0\le t<1,\\ 0, & t\ge 2.\end{cases}$

2. Найти оригиналы функций по заданным изображениям

1) $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2}+\dfrac{6e^{-3p}}{p^4}.$ 2) $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+1)(p^2-4)}.$

3. Найти решение задачи Коши операционным методом

1) $7\dot{x}-3x=t\,e^{-t},$ $x(0)=0.$

2) $\ddot{x}-4x=3t+e^{t},$ $x(0)=0,$ $\dot{x}(0)=0.$

3) $\ddot{x}+2\dot{x}-15x=4\cos t,$ $x(0)=0,$ $\dot{x}(0)=-2.$

4) $4\ddot{x}+25x=t^2-12,$ $x(0)=3,$ $\dot{x}(0)=2.$

4. Решить уравнения, используя формулу Дюамеля

1) $\ddot{x}-x=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^3 t},$ $x(0)=0,$ $\dot{x}(0)=0.$

2) $\ddot{x}+9x=\begin{cases}0, & t\le 0,\\ 2, & 0<t\le 2,\\ -6, & 2<t<4,\\ 0, & t\ge 4,\end{cases}$ $x(0)=0,$ $\dot{x}(0)=0.$

5. Найти решение систем операционным методом

1) $\begin{cases}\dot{x}=2x+y\\ \dot{y}=8x+4y\end{cases},$ $x(0)=-4,$ $y(0)=0.$ 2) $\begin{cases}\dot{x}=7x-2y\\ \dot{y}=10x+3y\end{cases},$ $x(0)=0,$ $y(0)=1.$

Теория вероятностей

1. В первой коробке 6 белых и 5 черных шаров, во второй коробке 4 белых и 8 черных шаров. Из первой коробки во вторую наугад переложено 5 шаров, а затем из второй коробки извлекают 2 шара. Какова вероятность, что оба они черные ?

2. В квадрат со стороной 0,1 м вписан круг. В квадрат наудачу вбрасывается 5 точек. Какова вероятность, что:

1) 4 точки попадут внутрь круга;
2) не менее 2-х точек попадут внутрь круга.

3. Батарея из трех орудий произвела залп, причем два снаряда попали в цель. Найти вероятность того, что первое орудие дало попадание, если вероятность попадания в цель первым, вторым и третьим орудием соответственно равны 0.4, 0.3, 0.5.

4. В некотором городе в среднем рождается 24 ребенка в неделю. Какова вероятность того, что в ближайший день родится 6 детей ?

5. На перекрестке установлен автоматический светофор, в котором 50 секунд горит зеленый свет, 5 секунд - желтый и 30 секунд красный свет. Найти вероятность того, что подъехавшему в случайный момент времени к перекрестку автомобилю будет гореть зеленый свет.

6. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ a\,(2x - x^2), & 0 \le x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

1) найти постоянную a,
2) найти функцию распределения $F(x)$,
3) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$,
4) вычислить математическое ожидание $M(X)$,
5) вычислить дисперсию $D(X)$,
6) вычислить вероятность $P\,(1.5 < X < 2.5)$.

Математическая статистика

1. Обследовано 30 партий изделий по 100 штук в каждой. В каждой из партий обнаружено бракованных изделий

$$N = \begin{cases} 1 & 7 & 8 & 6 & 7 & 1 & 9 & 3 & 4 & 2 & 4 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 8 & 2 & 8 & 1 & 3 & 5 & 5 & 7 & 4 & 9 & 3 \end{cases}$$

Каков, в среднем, процент брака и его стандартное отклонение?

2. В результате проведенных случайных измерений абсолютных значений тока (I A) в электрической цепи получены следующие значения:

$$I = \begin{cases} 0,23 & 1,98 & 2,87 & 3,22 & 3,03 & 4,08 & 4,49 & 4,58 & 4.76 & 5,15 \\ 5,73 & 6,25 & 6,33 & 7,37 & 7,58 & 8,32 & 8,44 & 8,98 & 9,04 & 9,65 \end{cases}$$

Определить среднюю мощность тока в цепи, если ее активное сопротивление составляет 5 Ом.

3. По условиям задач 1 и 2

a) составить статистическую таблицу распределения относительных частот случайной величины,

b) построить полигон и гистограмму распределения.

4. Дана статистическая таблица распределения частот в случайной выборке.

a) Построить полигон и гистограмму распределения.

b) Найти величины $\overline{x}$ и s^2 выборки.

c) Записать теоретический закон распределения. Найти теоретические значения вероятностей и сравнить их с величинами относительных частот.

d) Использовать критерий Пирсона для установления правдоподобности выбранной гипотезы о законе распределения.

1)

x_i	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
n_i	8	10	7	12	9	13	6	13	14	8

(использовать закон равномерного распределения)

2)

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	13	27	25	17	10	3	2	1	1	1

(использовать закон распределения Пуассона)

3)

x_i	[5;6]	[6;7]	[7;8]	[8;9]	[9;10]	[10;11]	[11;12]	[12;13]
n_i	6	23	38	27	4	1	1	0

(использовать закон нормального распределения)

5. Для нормально распределенной случайной величины (табл.3, задача 4) определить доверительный интервал, в который с надежностью $p = 0,95$ попадает истинное значение (математическое ожидание) случайной величины.

6. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью 0.95, зная выборочную среднюю $\overline{x} = 75.16$, объем выборки $n = 49$ и средне-квадратическое отклонение $\sigma = 7$.

7. По данным корреляционной таблицы значений $x_i; y_i$ случайных величин X и Y

a) нанести точки $(x_i; y_i)$ на координатную плоскость, и соединить их ломаной,

b) подобрать функциональную зависимость $y = f(x)$, наиболее хорошо описывающую данную корреляционную. Линеаризовать, если требуется, эту зависимость, используя новые переменные,

c) составить уравнение линии регрессии и определить коэффициент корреляции. Оценить тесноту связи между величинами X и Y.

1)

x_i	0	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75
y_i	–0,31	1,04	2,38	3,83	5,04	6,41	7,85	9,15

2)

x_i	10	20	30	40	50	60	70	80
y_i	1,10	2,62	3,41	4,03	4,55	4,90	5,27	5,51