ИРКУТСК 2008–2014

(*без решений; в обратном хронологическом порядке*)

III тур Всероссийской математической олимпиады студентов
г. Иркутск, ИрГТУ, 2014 год
I курс

Задача 1. Найти все решения системы уравнений (*3 балла*)

$$\frac{x-y}{x+y} = \frac{y+z}{y-z} = \frac{x+z}{x-z}$$

Задача 2. Дан эллипс $x^2 + y^2 + xy = 3$. Провести на плоскости прямую так, чтобы сумма квадратов расстояний от вершин эллипса до неё была а) минимальной, б) максимальной. (*7 баллов*)

Задача 3. Вычислить $\displaystyle\int_0^1 \ln^n x\,dx$. (*5 баллов*)

Задача 4. С отвесной скалы высотой 300 м одна за другой упали две капли. Вторая начала падать, когда первая успела пролететь 0,001 мм. На каком расстоянии одна от другой будут капли, когда первая достигнет подножия скалы? Сопротивлением воздуха пренебречь. (*6 баллов*)

Задача 5. Доказать, что решение $y(x)$ задачи Коши

$$y' = \frac{0{,}5 + \sqrt{xy}}{1 + x + y} + \frac{\sin^2(xy+1)}{2}, \qquad y(0) = 0$$

при $x > 0$ удовлетворяет неравенству $0 \leqslant y(x) < x$. (*5 баллов*)

Задача 6. Дядька Черномор каждый вечер из 33 богатырей назначает на дежурство 9 или 10 по своему усмотрению. Через какое наименьшее число дней может оказаться, что каждый богатырь выходил на дежурство одинаковое число раз? (*4 балла*)

II курс

Задача 1. 6 ниточек девушка зажимает в руке так, чтобы концы торчали кверху и книзу; подруга связывает концы сверху попарно и снизу попарно. Найти вероятность того, что связанные нити образуют кольцо. (*5 баллов*)

Задача 2. Какой интеграл больше: $\displaystyle\int_0^1 x^x dx$ или $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 (xy)^{xy} dxdy$? (*6 баллов*)

Задача 3. Вычислить сумму ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$ (*5 баллов*)

Задача 4. Найти площадь области на комплексной плоскости, заданной неравенством $|z+1| + |z-i| < 2$. (*3 балла*)

Задача 5. См. задачу 1-2.

Задача 6. См. задачу 1-6.

III–V курсы

Задача 1. Найти $y(x)$ из уравнения $x\int_0^x y\,dx = (x+1)\int_0^x xy\,dx$. (*6 баллов*)

Задача 2. См. задачу 2-3.

Задача 3. См. задачу 2-1.

Задача 4. См. задачу 2-4.

Задача 5. См. задачу 1-2.

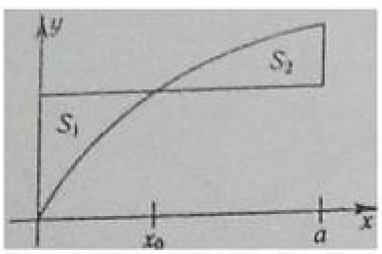
Задача 6. См. задачу 1-6.

III тур Всероссийской математической олимпиады студентов
г. Иркутск, ИрГТУ, 2013 год
I курс

Задача 1. При каких n система совместна $\begin{cases} x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 1 \\ -x_1 + x_3 + x_4 + \ldots + x_n = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_4 + \ldots + x_n = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -x_1 - x_2 - x_3 - \ldots - x_{n-1} = 1 \end{cases}$

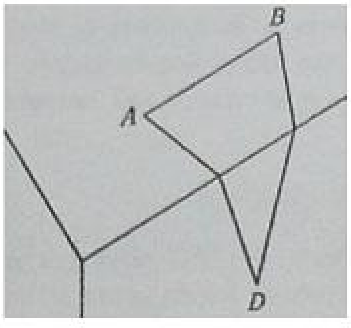
Задача 2. Пусть матрицы A и B таковы, что матрица $E - AB$ имеет обратную матрицу. Доказать, что матрица $E - BA$ также имеет обратную.

Задача 3. На отрезке $[0; a]$ задана функция $y = f(x)$, непрерывная и дважды дифференцируемая, причем $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$ на $[0; a]$. Проведена прямая $l = \{y = f(x_o)\}$, $0 \leq x_o \leq a$; пусть S_1 и S_2 – площади, ограниченные l, графиком и прямыми $x = 0$, $x = a$. При каком значении x_0 сумма площадей $S_1 + S_2$ имеет наименьшее и наибольшее значения?



Задача 4. Вычислить $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{3\pi} \displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \dfrac{x\,dx}{\operatorname{arctg} nx} \right)^n$.

Задача 5. Треугольный лоскут съезжает со стола под действием силы тяжести так, что сторона AB параллельна краю стола. Определить скорость лоскута в момент, когда сторона AB окажется на краю стола. В начале движения лоскут был неподвижен и со стола свешивалась половина его высоты. Все размеры лоскута заданы, $AD = BD$, трения нет. Размеры лоскута меньше высоты стола.



Задача 6. По трем прямолинейным дорогам с постоянными скоростями идут три пешехода. В начальный момент времени они не находились на одной прямой. Какое максимальное число раз они могут оказаться на одной прямой?

II курс

Задача 1. В урне находится n белых и m черных шаров, рядом с урной – ящик с достаточно большим количеством шаров. Производится следующая операция: Из урны наугад вынимается пара шаров и убирается: если они оказались одноцветными, то черный шар из ящика перекладывается в урну; если же они оказались разноцветными то белый шар возвращается в урну. Операция повторяется до тех пор, пока в урне не останется один шар. С какой вероятностью он будет белым?

Задача 2. При каких значениях $m > 0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}\right)^m$ сходится?

Задача 3. Найдите все непрерывные функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, если

$$\iint\limits_D xf\Big(\frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big)dxdy = \frac{a^2(f(a)+\sin a - 1)}{3} \forall a \geq 0,$$

где $D = \{x^2 + y^2 \leq a^2,\ |y| \leq x/\sqrt{3},\ x \geq 0\}$.

Задача 4. Найти $\max|az^n + bz^k|$, где k и n – натуральные числа, a и b – комплексные числа, а наибольшее значение берется по множеству комплексных чисел z таких, что $|z| \leq 1$.

Задача 5. См. задачу 1-5.

Задача 6. См. задачу 1-6.

III–V курсы

Задача 1. Пусть p – натуральное число. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1-0}(1-x)^{p+1}\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^p x^n$.

Задача 2. См. задачу 1-3.

Задача 3. См. задачу 2-4.

Задача 4. См. задачу 2-1.

Задача 5. См. задачу 1-5.

Задача 6. См. задачу 1-6.

III тур Всероссийской математической олимпиады студентов
г. Иркутск, ИрГТУ, 2012 год
I курс

Задача 1. Доказать, что при любых векторах a, b уравнение $x = a \times x + b$ имеет единственное решение. Найти это решение и записать в векторной форме.

Задача 2. Решить уравнение $X^{2012} = X^2$, где $X = \begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{bmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 > 0$.

Задача 3. Доказать, что для $0 < \varphi < \pi/2$ выполняется $2 < \dfrac{1}{\sqrt{\varphi}} \int\limits_0^{\varphi} \dfrac{dx}{\sqrt{\sin x}} < \sqrt{2\pi}$.

Задача 4. Вычислить $\dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} + \dfrac{\partial \theta}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta}$, где $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

Задача 5. Шар переменного радиуса касается двух данных перпендикулярных непересекающихся прямых. Найти геометрическое место центров шаров.

Задача 6. Несколько человек сидят по кругу так, что у каждого из них по 1 соседу справа и слева. Каждый из сидящих имеет несколько монет. У 1-го на 1 монету больше, чем у 2-го, у 2-го на 1 монету больше, чем у 3-го, и т.д. Первый отдаёт 1 монету 2-му, 2-ой 2 монеты 3-му, и т.д., каждый отдаёт на 1 монету больше, чем получил, пока это возможно. В результате у одного из играющих оказывается в 4 раза больше монет, чем у его соседа. Сколько было игроков и сколько монет было сначала у самого бедного?

II курс

Задача 1. Случайная величина x равномерно распределена на $(0; 1)$. Какова вероятность, что из отрезков, имеющих длины x, $1 - x$, $1/2$ можно составить остроугольный треугольник?

Задача 2. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)2^n}$

Задача 3. Найти все решения уравнения $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}(1 - e^{-x})^n = x$.

Задача 4. Решить дифференциальное уравнение $(3y' - y'')\sin y + (2 - (y')^2)\cos y = 0$.

Задачи 5 и 6 — те же, что для 1 курса.

III–V курсы

Задача 1 — та же, что для 2 курса. Задачи 2 и 3 — те же, что для 1 курса.

Задача 4. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=r} z^n e^{2/z} dz, \qquad n \in \mathbb{Z}.$

Задачи 5 и 6 — те же, что для 1 курса.

III тур Всероссийской математической олимпиады студентов г. Иркутск, ИрГТУ, 2011 год I курс

Задача 1. Коэффициенты системы из n уравнений с n неизвестными ($n \geq 2$)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

образуют арифметическую прогрессию: $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, b_1, a_{21}, \ldots, a_{2n}, b_2, \ldots, a_{nn}, b_n$. При каких условиях система имеет единственное решение? Найдите его. (5 баллов)

Задача 2. Найти все решения уравнения $(ix+1)^{100} = (x+i)^{100}$, где $i = \sqrt{-1}$. (6 баллов)

Задача 3. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{k^2+3k+1}{(k+2)!}$ (3 балла)

Задача 4. Найти треугольник с наибольшей площадью, если известно, что произведение длин его сторон равно 1. *(3 балла)*

Задача 5. Пусть $r \in \mathbb{N}$. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\sin(2r+1)\varphi}{\sin\varphi} d\varphi$ *(6 баллов)*

Задача 6. Куб со стороной a вращается вокруг своей диагонали. Вычислить объём тела, получающегося при этом. *(7 баллов)*

II курс

Задача 1. Оценить интеграл $\iint\limits_D (x^2-y^2)dxdy$, где D – область, ограниченная окружностью $x^2+y^2=2x$. *(5 баллов)*

Задача 2. Вдоль прямого шоссе, на расстоянии 500 м друг от друга стоят 2 дома, в каждом из них можно поселить до 20 чел. Как следует расселить 30 чел. и где выбрать на шоссе место для остановки автобуса, чтобы минимизировать суммарную ходьбу жильцов до неё ? *(4 балла)*

Задача 3. Случайно выбраны три числа $a \geq b \geq c \geq 0$. С какой вероятностью[1] уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет действительные корни? *(4 балла)*

[1] Задача некорректна, ибо в неограниченной области $a \geq b \geq c \geq 0$ не существует равномерное распределение.

Задача 4. Вычислить интеграл $\oint\limits_L \frac{z}{z^4+1}dz$, где контур $L: \quad 4x^2+y^2+8x+4y=0$. *(6 баллов)*

Задача 5. Найти область сходимости ряда $(x \in \mathbb{R}) \quad \sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\Big(1+\frac{(-1)^n}{n^x}\Big)$ *(4 балла)*

Задача 6. Куб со стороной a вращается вокруг своей диагонали. Вычислить объём тела, получающегося при этом. *(7 баллов)*

III–V курсы

Задача 1. Оценить интеграл $\iint\limits_D (x^2-y^2)dxdy$, где D – область, ограниченная окружностью $x^2+y^2=2x$. *(5 баллов)*

Задача 2. Куб со стороной a вращается вокруг своей диагонали. Вычислить объём тела, получающегося при этом. *(7 баллов)*

Задача 3. Найти область сходимости ряда $(x \in \mathbb{R}) \sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\Big(1+\frac{(-1)^n}{n^x}\Big)$ *(4 балла)*

Задача 4. Случайно выбраны три числа $a \geq b \geq c \geq 0$. С какой вероятностью[2] уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет действительные корни? *(4 балла)*

Задача 5. Шарообразная капля падает без трения под действием силы тяжести в атмосфере, насыщенной паром. В начале движения радиус c, скорость V_0. Вследствии конденсации масса капли растёт со скоростью $\alpha \cdot S_{\text{поверх}}$ (следовательно, $dr/dt = const$). Найти зависимость скорости капли V от радиуса r. *(6 баллов)*

Задача 6. Вдоль прямого шоссе, на расстоянии 500 м друг от друга стоят 2 дома, в каждом из них можно поселить до 20 чел. Как следует расселить 30 чел. и где выбрать на шоссе место для остановки автобуса, чтобы минимизировать суммарную ходьбу жильцов до неё ? *(4 балла)*

III тур Всероссийской математической олимпиады студентов
г. Иркутск, ИрГТУ, 2010 год
I курс

Задача 1. Коэффициенты системы n уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

удовлетворяют условиям: а) a_{11}, $a_{22}, \ldots$, $a_{nn} > 0$; б) остальные $a_{ij} < 0$,
в) в каждом уравнении сумма коэффициентов положительна.
Доказать, что $(0, 0, \ldots, 0)$ – единственное решение системы. (5 *баллов*)

Задача 2. Первый член последовательности $a_1 = 3^{2010}$; $\forall\ n \geq 1 \quad a_{n+1}$ равен сумме цифр числа a_n. Найдите a_{10}. (3 балла)

Задача 3. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принадлежат отрезку $[a; b]$, $0 < a < b$. Доказать неравенство

$$(x_1 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \leq \frac{(a+b)^2}{4ab} n^2.$$

(5 баллов)

Задача 4. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin\sin x - x\sin x + x^2 \sin 2x - \cos x}{x^2 + \cos^2 x} dx$. (2 балла)

Задача 5. На поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ заданы точки $M_1(2; 0; 2)$ и $M_2(0; 7; 7)$. Найти наименьшее расстояние между точками по данной поверхности. (5 баллов)

Задача 6. Найти предел $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \prod_{k=1}^{2n} \left(n^2 + k^2\right)^{1/n}$. (7 баллов)

Задача 7. Решить уравнение $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. *(3 балла)*

II курс

Задача 1. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{(x^2 + 1/2)^2} dx$. (*3 балла*)

Задача 2. Получить дифференциальное уравнение парабол, пересекающих ось абсцисс только однажды. (*3 балла*)

Задача 3. Определите характер сходимости и найдите сумму $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

(*5 баллов*)

Задача 4. Внутри области, ограниченной непрерывной выпуклой замкнутой кривой, взята точка O и через неё проведены хорды. Доказать, что если хорда отсекает сегмент min или max площади, то O является серединой хорды. Справедливо ли обратное утверждение ? Какие результаты вытекают из данного утверждения для окружности ? (*5 баллов*)

Задача 5. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0;1]$. Докажите, что

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 = 2\int_0^1 dx \int_0^x f(x)f(y)dy.$$

(*2 балла*)

Задача 6. Доказать тождество

$$\cos^n \frac{\pi}{n} - \cos^n \frac{2\pi}{n} + \ldots + (-1)^n \cos^n \frac{(n-1)\pi}{n} = 1 - \frac{n}{2^{n-1}}.$$

(6 баллов)

Задача 7. Имеются две монеты со смещёнными центрами: на первой герб выпадает в 2/3 случаях, на второй – в 1/4 случаев. Какова вероятность того, что игрок, подбрасывая по очереди обе монеты (начиная с первой), увидит два герба подряд прежде, чем две решки подряд ? *(6 баллов)*

III–V курсы

Задача 1. Найти все решения в целых числах уравнения $y^2 + y = x^4 + x^3 + x^2 + x$. (5 баллов)

Задача 2. Преподавателю и студентам некоторой группы задают вопросы (ответ „да" или „нет"). Вероятность правильного ответа преподавателя равна α, студента-парня β, девушки γ. Вероятность того, что ответ слдучайно выбранного студента совпадёт с ответом преподавателя, равна 1/2. Найти отношение числа парней к числу девушек в группе. (5 баллов)

Задача 3. Пусть $\Phi(x)$ – сумма ряда Фурье функции $f(x) = \dfrac{|x^3-1|}{x-1}$ на интервале $(-2;2)$. Постройте график $\Phi(x)$. (2 балла)

Задача 4. Найти область сходимости ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\ln^n x}$. (2 балла)

Задача 5. Тяжёлый шар осторожно кладут в наполненную водой вазу, имеющую форму сегмента параболоида вращения. Размеры вазы заданы. Определить радиус шара, чтобы он вытеснил как можно больше воды. (6 баллов)

Задача 6. У грузовика передние покрышки (по одной на колесе) стираются через 15000 км пути, задние (по две на колесе) – через 25000 км. Как нужно менять покрышки на колёсах, чтобы проехать на одних и тех же покрышках наибольшее расстояние ? Найдите это расстояние. (4 балла)

Задача 7. Вычислить $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{e^{x/11}}{e^x + 1} dx$. (6 баллов)

III тур Всероссийской математической олимпиады студентов
г. Иркутск, ИрГТУ, 2009 год
I курс

Задача 1. Дана квадратная матрица A порядка n. Пусть $P(\lambda)$ – её характеристический полином и $P(0) \neq 0$. Характеристический полином $R(\lambda)$ обратной матрицы A^{-1} выразить через λ, $P(\lambda)$ и $P(0)$. (*6 баллов*)

Задача 2. Составить уравнение параболы, касающейся эллипса $4x^2+y^2=5$ в точках с $y=-1$. (*4 балла*)

Задача 3. Решить уравнение $f(x) = x + 2\int_0^1 (xy^2 + x^2y)f(y)dy$. (*4 балла*)

Задача 4. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{a}{n}\right)^n$ при любом значении a. (*3 балла*)

Задача 5. При каком значении n величина $\dfrac{\lg 2 \cdot \lg 3 \cdot \ldots \cdot \lg n}{10^n}$ принимает наименьшее значение ? (*3 балла*)

Задача 6. Решить уравнение $y(x) = \int_0^x y(t)\cos(x-t)dt + \sin x$. (*6 баллов*)

Задача 7. На плоскости заданы гипербола $xy = a^2 = const$ и окружность $x^2 + y^2 = R^2$. Найти предел отношения площади фигуры, содержащей начало координат и ограниченной дугами гиперболы и окружности, к площади круга при $R \to \infty$. (*4 балла*)

II курс

Задача 1. Вычислить $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3dx}{e^x-1}$ (*7 баллов*)

Задача 2. Вычислить сумму $S = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + \ldots$. (*3 балла*)

Задача 3. Первый блок работает без сбоев период x, дальше выходит из строя, второй блок работает период y и выходит из строя. Оба блока входят в прибор, который выходит из строя, если не работает хоть один блок. Известны $P(x=T)$, $P(y=T)$, $P(\max(x,y)=T)$. Найти вероятность того, что прибор проработает T часов. (*3 балла*)

Задача 4. Отрезок нормали к поверхности $z^2 = 2a\sqrt{x^2+y^2}+b$, заключённый между поверхностью и плоскостью xOy, проецируется на плоскость xOy. Доказать, что величина проекции постоянна. (*5 баллов*)

Задача 5. Вычислить $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}dx}{1+x^2}$. (*3 балла*)

Задача 6. Решить уравнение $z + a|z+1| + i = 0$, если z комплексное, дано $a \geq 1$. (6 баллов)

Задача 7. Малыш может съесть торт за 10 минут, банку варенья за 13 минут и выпить кастрюльку молока за 14 минут. Карлсон может это за 6, 6 и 7 минут, соответственно. За какое наименьшее время они могут покончить с завтраком ? *(3 балла)*

III–V курсы

Задача 1. Задано уравнение $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ при $x > 0$, $y > 0$. Показать, что решением уравнения является $f(x,y) = g(y/x)$, где $g(t)$ – произвольная дифференцируемая функция, и что других решений нет. (4 балла)

Задача 2. Найти преобразование Лапласа от $f(t) = \begin{cases} B, & \text{если } 0 < t \leq \tau, \\ 2B, & \text{если } \tau < t \leq 2\tau, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ nB, & \text{если } (n-1)\tau < t \leq n\tau, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$

(3 балла)

Задача 3. Решить уравнение $(1-x^3)y'' - 6x^2y' - 6xy = 0$ при условии $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (7 баллов)

Задача 4. Вычислить интеграл

$$\int_{AO} (e^x \sin y - by)dx + (e^x \cos y - b)dy,$$

где дуга AO – верхняя часть окружности $x^2 + y^2 = ax$, $A(a;0)$, $O(0;0)$. (5 баллов)

Задача 5. Каждая из двух урн содержит белые и чёрные шары, причём общее число шаров в обеих урнах равно 25. Из каждой урны наугад вынимают по одному шару. Зная, что вероятность того, что оба шара окажутся белыми, равна 0,54, найти вероятность того, что оба шара окажутся чёрными. (5 баллов)

Задача 6. Вычислить интеграл $\oint\limits_{\mathcal{L}} \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, где $\mathcal{L}$ – граница односвязной области.

(3 балла)

Задача 7. Пусть события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — независимые, а вероятность каждого $P(A_k) = p_k$. Оценить вероятность непоявления ни одного из событий A_k. (3 балла)

III тур Всероссийской математической олимпиады студентов
г. Иркутск, ИрГТУ, 2008 год
I курс

Задача 8. Пусть $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)$ скалярные произведения линейно зависимых векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) & \dots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_n) \\ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) & \dots & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_2) & \dots & (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_n) \end{vmatrix}$$

(2 балла)

Задача 9. Доказать, что для любых трчх точек параболы с вертикальной осью симметрии выполняется: $k_1 = k_{12} + k_{13} - k_{23}$, где k_1 — угловой коэффициент касательной к параболе в произвольной точке x_1, k_{ij} — угловой коэффициент хорды, проходящей через точки на параболе с абсциссами x_i и x_j.

(4 балла)

Задача 10. К дуге окружности проведены касательные в еч концах и середине. Получается два треугольника, один образован хордой дуги и двумя касательными к еч концам, другой образован тремя касательными. Найти предел отношения площади большего треугольника к площади меньшего, если длина дуги стремится к нулю.

(4 балла)

Задача 11. Вычислить предел

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}.$$

(5 баллов)

Задача 12. Точка двигается по прямой OA с постоянной скоростью v. Вне этой прямой точка движется со скоростью kv. Точка B не лежит на прямой OA. Под каким углом к прямой OA надо свернуть, чтобы попасть в точку В, двигаясь по двум отрезкам прямых, за наименьшее время?

(5 баллов)

Задача 13. Найти объчм тела, в основании которого лежит равнобедренный треугольник с высотой h и с основанием a. Поперечное сечение тела — сегмент параболы с хордой, равной высоте сегмента.

(7 баллов)

Задача 14. В большом бочонке 8 вчдер кваса. Требуется разлить этот квас пополам в две чмкости, если имеется ещч два пустых бочонка, в один входит 5 вчдер, в другой 3 ведра. Как разлить квас не больше чем за 7 переливаний?

(3 балла)

II курс

Задача 1. Вычислить и сравнить интегралы $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$ и $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^4}$.

(3 балла)

Задача 2. Доказать, что если $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi(x, y, C_1)$ — первый интеграл уравнения $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = f(x, y)$, то общий интеграл уравнения примет вид

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial C_1}(\mathrm{d}y - \varphi \mathrm{d}x) = C_2,$$

где C_1, C_2 — постоянные.
(4 балла)

Задача 3. Вычислить

$$\oint\limits_C \left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^2+y^2}(x\cos y + y\sin y)\mathrm{d}y + \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+y^2}(x\sin y - y\cos y)\mathrm{d}x \right),$$

где C — замкнутая кривая, окружающая начало координат и не пресекающая себя.
(5 баллов)

Задача 4. Найти все непрерывные $f(x)$, если $x \in \mathbb{R}$, и

$$\iint\limits_{\mathfrak{D}} x f\Big(\frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a^2(f(a) + \sin a - 1)/3,$$

$$a \geqslant\ 0,\ \mathfrak{D}:\ x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ \mid\ y\ \mid \leqslant x/\sqrt{3},\ x \geqslant 0.$$

(6 баллов)

Задача 5. Подводная лодка атакует корабль, выпуская по нему последовательно и независимо одна от другой n торпед. Каждая торпеда попадает в корабль с вероятностью p с одинаковой вероятностью в каждый из k отсеков подводной части корабля. Корабль идет ко дну, если поражено не менее двух отсеков. Найти вероятность того, что корабль будет пущен ко дну.
(4 балла)

Задача 6. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, если $a_0 = 1$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{4} + (-1)^n \frac{1}{2}$

(2 балла).

Задача 7. Однажды, в старые времена двое пастухов продали стадо волов, получив при этом за каждого вола столько рублей, сколько в стаде волов. На вырученные деньги купили стадо овец по 10 рублей за овцу и одного ягненка. При дележе поровну одному досталась лишняя овца, другой же взял ягненка и получил с товарища доплату. Как велика доплата (она выражается целым числом рублей)? *(6 баллов)*

III–V курсы

Задача 1. Имеются две урны. В одной из них находится шар, о котором известно, что он либо белый, либо черный. В другой урне находится 1 белый шар и 2 черных шара. В первую урну кладут белый шар, после чего ее хорошенько встряхивают и извлекают из нее один шар, который оказывается белым. Как следует действовать, чтобы вероятность извлечь шар после проделанных операций была наибольшей: вытаскивать шар, не зная из какой урны мы его извлекаем, или сначала пересыпать содержимое одной урны в другую и лишь затем тащить шар?

(5 баллов)

Задача 2. По известному общему решению линейного дифференциального уравнения $y = C_1 x + C_2 \operatorname{ch} x + C_3 \operatorname{sh} x - \alpha(x^2+2)$, где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а α — параметр, восстановить само уравнение.

(4 балла)

Задача 3. Вычислить $\int\limits_0^{\pi} \dfrac{d\varphi}{a + b\cos\varphi}$, если $a > b > 0$.

(6 баллов)[2]

Задача 4. Найти геометрический образ области сходимости ряда на комплексной плоскости: $1 + (z^2+1) + (z^2+1)^2 + (z^2+1)^3 + \dots + (z^2+1)^n + \dots$ *(3 балла)*

Задача 5. Найти $y = y(x)$, если $y(0) = 0, y'(1) = 1$, а интеграл $F(y) = \int\limits_0^1 \left(y^2 + y'^2\right) dx$ принимает наименьшее значение. *(3 балла)*

Задача 6. Вычислить $\dfrac{2}{\sqrt{2}} \dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \dots$ *(3 балла)*

Задача 7. Вычислить

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \prod_{m=1}^{n} (n^2+m^2)^{1/n}$$

(6 баллов)

[2] За что так много? Первокурсники могут вычислить этот интеграл, сделав подстановку $t = \operatorname{tg}(x/2)$.