ПЕРВЫЙ КУРС. РЕШЕНИЯ.

Задача 1.

Задача. Существуют ли матрица A из 3 строк и 2 столбцов и матрица B из 2 строк и 3 столбцов такие, что $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$? Ответ обоснуйте.

Ответ: нет, не существуют.

Решение. Если даны матрицы $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$, то для матриц

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } D = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

как нетрудно видеть, выполнено $AB = CD$. Следовательно, $|AB| = |CD| = |C| \cdot |D| = 0 \cdot 0 = 0$. Однако единичная матрица имеет определитель 1 и, значит, не может быть представлена в виде произведения AB.

ПЕРВЫЙ КУРС. РЕШЕНИЯ.

Задача 2.

Задача. Известно, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{A_1x^{k_1}}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{A_2x^{k_2}}=1$, где A_1, A_2, k_1, k_2 – фиксированные вещественные числа, такие, что $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$ и выражение $A_1x^{k_1}+A_2x^{k_2}$ не равно тождественному нулю. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{A_1x^{k_1}+A_2x^{k_2}}=1$.

Решение. а) Если $k_1=k_2$, то $A_1+A_2 \neq 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{A_1x^{k_1}+A_2x^{k_2}}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{(A_1+A_2)x^{k_1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{A_1x^{k_1}}+\frac{g(x)}{A_1x^{k_1}}}{\frac{A_1+A_2}{A_1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{A_1x^{k_1}}}{\frac{A_1+A_2}{A_1}}+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{g(x)}{A_2x^{k_1}}}{\frac{A_1(A_1+A_2)}{A_1A_2}}=$$

$$=\frac{A_1}{A_1+A_2}+\frac{A_2}{A_1+A_2}=1.$$

б) Пусть теперь $k_1>k_2, k_1-k_2>0, k_2-k_1<0.$ Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{A_1x^{k_1}+A_2x^{k_2}}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{A_1x^{k_1}+A_2x^{k_2}}+\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{A_1x^{k_1}+A_2x^{k_2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{A_1x^{k_1}\left(1+\frac{A_2}{A_1}x^{(k_2-k_1)}\right)}+\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{A_2x^{k_2}\left(1+\frac{A_1}{A_2}x^{(k_1-k_2)}\right)}=0+1=1.$$

ПЕРВЫЙ КУРС. РЕШЕНИЯ.

Задача 3.

Задача. Студент Иван Недалёкий полагает, что $\operatorname{arctg} x = \dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$. Докажите, что существует $x \in (0; 1)$, для которого это равенство является справедливым.

Решение. Заметим, что $\arccos x \in [0; \pi]$, отсюда $\dfrac{\pi}{2} - \arccos x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Тогда из равенств $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x$ следует, что $\arcsin x = \dfrac{\pi}{2} - \arccos x$. Это позволяет переписать исходное равенство в виде $g(x) = 0$, где $g(x) = \dfrac{\pi}{2\arccos x} - 1 - \operatorname{arctg} x$. Имеем $g'(x) = \dfrac{\pi}{2(\arccos x)^2\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{1+x^2}$; так как $g'(0) = \dfrac{2}{\pi} - 1 < 0$, то существует $\varepsilon > 0$ с тем свойством, что при $x \in (0; \varepsilon]$ выполнено $0 > \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \dfrac{g(x)}{x}$ и, значит, $g(x) < 0$. С другой стороны, $g(1-0) = \dfrac{\pi}{+0} - 1 - \dfrac{\pi}{4} = +\infty$. Поскольку $g(\varepsilon) < 0$, а при значениях x, близких к 1, справедливо неравенство $g(x) > 0$, то ввиду непрерывности функции $g(x)$ найдётся $x \in (\varepsilon; 1)$ такое, что $g(x) = 0$.

ПЕРВЫЙ КУРС. РЕШЕНИЯ.

<u>Задача 4.</u>

Задача. Решите уравнение $\left|\left|x+[x]\right|-1\right|=x$, где $[x]$ – целая часть числа x.

Решение. Если $\left|x+[x]\right|-1>0$, т.е. $\left|x+[x]\right|>1$ и, далее, $\left[\begin{array}{l} x+[x]>1, \\ x+[x]<-1, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 1, \\ x<0 \end{array}\right.$, то имеем уравнение $\left|x+[x]\right|=1+x$. Из этого уравнения в случае $x\ge 1$ следует уравнение $x+[x]=1+x$, или $[x]=1$, решение которого есть промежуток $[1,2)$. Если же $x<0$, то имеем уравнение $-x-[x]=1+x$, или $2x+[x]=-1$, которое не имеет решения (действительно, при $x<0$ будет $x=n+r$, $0\le r<1$, $n=-1;-2;\ldots$; тогда имеем $[x]=n$, $2x+[x]=3n+2r=-1$, что невозможно, так как $3n+2r<3\cdot(-1)+2\cdot 1=-1$).

Если теперь $\left|x+[x]\right|-1<0$, т.е. $\left|x+[x]\right|<1$, что эквивалентно $0\le x<1$, то получим уравнение $1-\left|x+[x]\right|=x$, или $\left|x+[x]\right|=1-x$. В силу того, что $0\le x<1$ и $[x]=0$, данное уравнение принимает вид $x=1-x$, т.е. $x=\dfrac{1}{2}$. Таким образом, решениями уравнения являются $x=\dfrac{1}{2}$ и $x\in[1,2)$.

ПЕРВЫЙ КУРС. РЕШЕНИЯ.

Задача 5.

Задача. Найдите наименьшее расстояние между параболой $y = x^2$ и окружностью $(x-18)^2 + y^2 = 1$.

Решение. Пусть $d(x)$ – это расстояние от центра окружности, т.е. точки $C(18; 0)$, до произвольной точки параболы $M(x; x^2)$. Тогда $d^2(x) = (x-18)^2 + x^4$. Найдем наименьшее значение этой функции с помощью производной $\left(d^2(x)\right)' = 2(x-18) + 4x^3 = 0$. Получим уравнение $2x^3 + x - 18 = 0$. Проверкой убеждаемся, что $x = 2$ является корнем уравнения, а поделив на $(x - 2)$, придем к уравнению $(x-2)(2x^2 + 4x + 9) = 0$, которое имеет единственное решение $x = 2$. С помощью второй производной $\left(d^2(x)\right)'' = 2 + 12x^2 > 0$ убеждаемся, что $x = 2$ является единственной точкой минимума, а значит, в ней функция достигает своего наименьшего значения. Таким образом, наименьшее расстояние от центра окружности до параболы равно $d(2) = \sqrt{(2-18)^2 + 2^4} = 4\sqrt{17}$, а значит, наименьшее расстояние между параболой и окружностью равно $4\sqrt{17} - 1$.

ПЕРВЫЙ КУРС. РЕШЕНИЯ.

Задача 6.

Задача. Пусть n – фиксированное натуральное число, отличное от единицы. Запишите (аналитически) пример функции $y = f(x)$, удовлетворяющей следующим условиям:

1) f – вещественная функция, определенная на всей вещественной прямой;
2) функция дифференцируема во всей области определения;
3) функция имеет ровно n максимумов и n минимумов на промежутке (0;1);
4) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Решение. Зададим функцию $f_1(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{2n+1})$, $x \in [0,+\infty)$, где $a_k = \dfrac{1}{k}$, $k = 1;2;..;(2n+1)$. Эта функция имеет $(2n + 1)$ нуль на промежутке (0,1], поэтому она имеет не менее $2n$ экстремумов на интервале (0;1). Так как, кроме того, производная $f_1'(x)$ представляет собой многочлен степени $2n$, имеющий не более $2n$ корней, то функция $f_1(x)$ имеет ровно $2n$ экстремумов. Точки a_k разбивают промежуток (0,1] на промежутки знакопостоянства функции $f_1(x)$, причем соблюдается знакочередование этих промежутков. Следовательно, также чередуются максимумы и минимумы функции, а значит, функция имеет ровно n максимумов и n минимумов на интервале (0;1).

Положим $f_2(x) = e^{-\alpha x}(x + f_1(0))$ на промежутке $(-\infty, 0]$. Тогда если $\alpha < 0$, то $\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = 0$. Определим функцию $f(x) = \begin{cases} f_1(x), x \in [0,+\infty); \\ f_2(x), x \in (-\infty, 0]; \end{cases}$ так, чтобы она была дифференцируема в нуле (в остальных точках она, очевидно, дифференцируема). Так как $f_2'(x) = e^{-\alpha x}\left(-\alpha(x + f_1(0)) + 1\right)$ и $f_2'(0) = -\alpha f_1(0) + 1$, то из условия равенства производных в нуле $f_2'(0) = f_1'(0)$ получим $\alpha = \dfrac{1 - f_1'(0)}{f_1(0)}$.

Покажем, что α отрицательно. Действительно, $f_1(0) = -a_1 a_2 \cdots a_{2n+1} = -\dfrac{1}{(2n+1)!} < 0$,

$$f_1'(0) = \frac{a_1 a_2 \cdots a_{2n+1}}{a_1} + \frac{a_1 a_2 \cdots a_{2n+1}}{a_2} + \cdots + \frac{a_1 a_2 \cdots a_{2n+1}}{a_{2n+1}} = \frac{1 + 2 + \cdots + (2n+1)}{(2n+1)!} = \frac{n+1}{(2n)!} < 1 \text{ при } n \geq 2.$$

СТАРШИЕ КУРСЫ. РЕШЕНИЯ.

Задача 1.

Задача. Докажите, что любое натуральное число является частичной суммой ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$, где a_n — это целое число, ближайшее к $\sqrt{n}$.

Решение. Заметим, что в последовательности $\{a_n\}$ встречаются все натуральные числа, причем каждое из них — несколько раз. Посмотрим, сколько раз в последовательности повторяется число k. Пусть $a_n = k$. Тогда k является ближайшим к $\sqrt{n}$,что эквивалентно условию $\left|\sqrt{n}-k\right| < 0,5$, т.е. $k-0,5<\sqrt{n}<k+0,5$. Возведя все части неравенства в квадрат и учитывая, что числа n и k целые, получим $k^2-k<n\le k^2+k$. Таким образом, если $n\in(k^2-k;k^2+k]$, то $a_n=k$. Осталось заметить, что в данный промежуток входит ровно $2k$ целых чисел. Итак, последовательность $\{a_n\}$ состоит из всех натуральных чисел k, каждое из которых повторяется $2k$ раз.

Рассмотрим сумму слагаемых ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$, равных $\frac{1}{k}$. Так как ряд содержит $2k$ таких слагаемых, то их сумма равна $2k\cdot\frac{1}{k}=2$. Следовательно, частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$, состоящая из первых m групп равных слагаемых, равна $2m$. Если же к этой сумме добавить $(m + 1)$ слагаемое из следующей группы слагаемых, равных $\frac{1}{m+1}$, то сумма будет равняться $2m + 1$. Таким образом, любое натуральное (как четное, так и нечетное) число является некоторой частичной суммой ряда исходного ряда.

СТАРШИЕ КУРСЫ. РЕШЕНИЯ.

Задача 2.

Задача. Найти все числа $\lambda > 0$ и решения $y(x) \neq 0$ дифференциального уравнения $y''(x) + \lambda y(x) = 0$, удовлетворяющие условиям $y'(0) = 0$, $y(0) = (1-\lambda)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)\cos t dt$.

Решение. Общее решение уравнения имеет вид $y(x) = C_1\cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$.

Решим задачу Коши. Составим систему для определения постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 = (1-\lambda)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(C_1\cos(\sqrt{\lambda}t) + C_2\sin(\sqrt{\lambda}t)\right)\cos t dt \\ C_2\sqrt{\lambda} = 0 \end{cases}.$$

Из второго равенства системы находим, что $C_2 = 0$. Первое равенство системы примет вид $C_1 = (1-\lambda)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} C_1\cos(\sqrt{\lambda}t)\cos t dt$. Заметим, что C_1 отлично от нуля.

Найдем $\lambda > 0$, используя равенство $(1-\lambda)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sqrt{\lambda}t)\cos t dt = 1$. Вычислим интеграл:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sqrt{\lambda}t)\cos t dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos(\sqrt{\lambda}-1)t + \cos(\sqrt{\lambda}+1)t\right)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\sqrt{\lambda}-1)t}{\sqrt{\lambda}-1} + \frac{\sin(\sqrt{\lambda}+1)t}{\sqrt{\lambda}+1}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$= \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)}{1-\lambda}$. Следовательно, имеем $\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right) = 1$, откуда $\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} = 2\pi n$ и $\lambda = 16n^2$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $y(x) = C\cos(\sqrt{\lambda}x)$, $\lambda = 16n^2$, $n \in \mathbb{Z}$

СТАРШИЕ КУРСЫ. РЕШЕНИЯ.

Задача 3.

Задача. При каких положительных значениях параметра a сходится интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^a\cos^2 x}$?

Решение. Сходимость данного интеграла равносильна сходимости следующего числового ряда: $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \int\limits_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{dx}{1+x^a\cos^2 x}$. В интеграле $\int\limits_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{dx}{1+x^a\cos^2 x}$ сделаем замену $t = x-\pi k$, $dx = dt$, $\cos x = \cos(t+\pi k) = (-1)^k \cos t$; получим $\int\limits_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{dx}{1+x^a\cos^2 x} = \int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{1+(t+\pi k)^a\cos^2 t}$.

Для интеграла $\int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{1+(t+\pi k)^a\cos^2 t}$ справедлива следующая оценка:

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{1+(k+1)^a\pi^a\cos^2 t} < \int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{1+(t+\pi k)^a\cos^2 t} < \int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{1+k^a\pi^a\cos^2 t} .$$

Вычисляя теперь интегралы: $\int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{1+k^a\pi^a\cos^2 t} = \int\limits_0^{\pi/2} \ldots + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \ldots = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d(\operatorname{tg} t)}{1+k^a\pi^a+\operatorname{tg}^2 t} + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \ldots =$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+k^a\pi^a}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+k^a\pi^a}}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} + \frac{1}{\sqrt{1+k^a\pi^a}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+k^a\pi^a}}\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{1+k^a\pi^a}},$$

$\int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{1+(k+1)^a\pi^a\cos^2 t} = \frac{\pi}{\sqrt{1+(k+1)^a\pi^a}}$, мы получим окончательно двойное неравенство $\frac{\pi}{\sqrt{1+(k+1)^a\pi^a}} < \int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{1+(t+\pi k)^a\cos^2 t} < \frac{\pi}{\sqrt{1+k^a\pi^a}}$. Ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{\pi}{\sqrt{1+k^a\pi^a}}$ сходится при $a>2$ $\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+k^a\pi^a}} \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{\pi}{k^{a/2}}\right)$, поэтому и рассматриваемый ряд по признаку сравнения сходится при $a>2$, а так как ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{\pi}{\sqrt{1+(k+1)^a\pi^a}}$ расходится при $a \le 2$, то расходится и данный ряд. Следовательно, несобственный интеграл сходится при $a>2$ и расходится при $a \le 2$.

СТАРШИЕ КУРСЫ. РЕШЕНИЯ.

Задача 4.

Задача. Найдите все действительные решения уравнения $(ix+1)^{100}=(x+i)^{100}$.

Решение. Разделим обе части равенства на $(x+i)^{100}$, получим $\left(\frac{ix+1}{x+i}\right)^{100}=1$.

Поскольку $\left|\frac{ix+1}{x+i}\right|=1,$ то дробь можно представить в виде $\frac{ix+1}{x+i}=e^{i\varphi}$. Выражая *x*, получим

$$x=\frac{1}{i}\cdot\frac{ie^{i\varphi}-1}{ie^{i\varphi}+1}=\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{i\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}-1}{e^{i\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}+1}=\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}-e^{-i\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}{e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}+e^{-i\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}=tg\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right),\text{ где }\varphi\neq\frac{\pi}{2}.$$

Исходное уравнение принимает вид $e^{i100\varphi}=e^{i2\pi n}$, $n\in\mathbb{Z}$, отсюда мы находим, что $\frac{\varphi}{2}=\frac{\pi n}{100}$, $n=0;1;\ldots;99$, а значит, $x=tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{100}\right)$, $n=0;1;\ldots;99$ (кроме *n*, равного 25).

СТАРШИЕ КУРСЫ. РЕШЕНИЯ.

Задача 5.

Задача 5. В ромбе $ABCD$ угол A составляет 120°, $AB = 1$. Прямые BC и CD пересекают окружность ω_1, описанную вокруг треугольника ABD, в точках K и L, отличных от точек B и D соответственно. Введем декартову систему координат с началом в центре окружности ω_2, описанной вокруг треугольника CKL, и осью ординат, направленной в сторону центра окружности ω_1. Вычислите $\iint\limits_{\Omega} y\,dxdy$, где Ω – область, ограниченная окружностями ω_1 и ω_2.

Решение. Так как $CB = CD = CA = 1$, то точка C является центром окружности ω_1, а значит, $CL = CK = 1$. Достроив треугольник CKL до ромба $CKML$, получим, что $MK = ML = MC = 1$, а значит, точка M – центр окружности ω_2 и M лежит на окружности ω_1. В полярной системе координат уравнение окружности ω_1 имеет вид $\rho = 2\sin\varphi$, а ω_2 – уравнение $\rho = 1$. Получаем

$$\iint\limits_{\Omega} y\,dxdy = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} \rho^2 \sin\varphi\, d\rho + \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} d\varphi \int\limits_0^{1} \rho^2 \sin\varphi\, d\rho = \frac{16}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^4\varphi\, d\varphi + \frac{1}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

СТАРШИЕ КУРСЫ. РЕШЕНИЯ.

Задача 6.

Задача. Вычислите $\int_0^2 \left(\left[x^2\right]-[x]^2\right)dx$, где $[x]$ – это целая часть числа x.

Решение. Рассмотрим функции $[x]^2$ и $\left[x^2\right]$ на отрезке $[0; 2]$. Получим $\left[x^2\right]=\begin{cases}0, & 0\le x<1\\ 1, & 1\le x<\sqrt{2}\\ 2, & \sqrt{2}\le x<\sqrt{3}\\ 3, & \sqrt{3}\le x<2\\ 4, & x=2\end{cases}$ и $[x]^2=\begin{cases}0, & 0\le x<1\\ 1, & 1\le x<2\\ 4, & x=2\end{cases}$. Следовательно, $\left[x^2\right]-[x]^2=\begin{cases}0, & 0\le x<\sqrt{2}\\ 1, & \sqrt{2}\le x<\sqrt{3}\\ 2, & \sqrt{3}\le x<2\\ 0, & x=2\end{cases}$ и

$$\int_0^2 \left(\left[x^2\right]-[x]^2\right)dx=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx+2\int_{\sqrt{3}}^{2} dx=4-\sqrt{2}-\sqrt{3}.$$