Задачи всероссийской студенческой олимпиады по математике
ЮРГТУ(НПИ), Новочеркасск,
19 апреля 2000

Задача 1 Найти $y(x)$ из уравнения $y(y''+y') = (y')^2(xy^2-1)$,
$y(0) = y'(0) = 1$.

Задача 2 Найти все числа $\lambda > 0$ и решения $\varphi(x) \not\equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$, дифференциального уравнения $\varphi''(x) + \lambda\varphi(x) = 0$, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi'(0) = 0, \qquad \varphi(0) = (1-\lambda)\int_0^\pi \varphi(t)\sin t\, dt.$$

Задача 3 Точка $M(x; y; z)$ движется по закону: $x'_t = z - y$, $y'_t = x - z$, $z'_t = y - x$. Найти траекторию точки M, если в начальный момент $M(0) = (1; -1; 1)$.

Задача 4 Вычислить $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 nx}{4n^2-1}\right)dx$.

Задача 5 Найти сумму ряда $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{f^{(2k-1)}(0)}$, где $f(x) = x \cdot e^{-x}$.

Задача 6 Найти x из уравнения $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a^n\dfrac{\cos nx}{n} = 0$,
где $-1 < a < 1$.

Задача 7 Найти среднее значение квадрата расстояния точки круга $x^2+y^2 \leq 2(x+y)$ до начала координат.

Задача 8 Найти непрерывную функцию $f(x)$, если известно, что

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(2x_0,y_0)} f\left(\frac{y}{x}\right)\frac{ydx - xdy}{x^2} = -\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2, \qquad (x_0 \neq 0).$$

Задача 9 Изобразить на плоскости $Oab = \mathbb{R}^2$ множество точек $(a; b)$, для которых имеет решение уравнение

$$\left(\frac{i\cos x + \sin x}{\cos x + i\sin x}\right)^n = a + bi \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

и найти это решение.

Задача 10 Точка $(\alpha; \beta)$ равномерно распределена в квадрате $|\alpha| \leq 1$, $|\beta| \leq 1$. Определить плотность вероятностного распределения коэффициента p квадратного трёхчлена $x^2 + px + q = (x-\alpha)(x-\beta)$.

Задача 11 Случайная величина ξ принимает значения из $\mathbb{N}$, причём вероятности $P(\xi = n) = 2^{-n}$. Найти распределение, матожидание и дисперсию случайной величины $\eta = \cos\frac{\pi\xi}{2}$.

Задачи всероссийской студенческой олимпиады по математике
ЮРГТУ(НПИ), Новочеркасск, 18 октября 2006

Задача 1 Пусть C – центр равносторонней гиперболы на плоскости, S – множество точек плоскости, симметричных точке C относительно касательных, проведённых в каждой точке гиперболы. Найти уравнение линии L, множество точек которой состоит из точки C и множества S. Пользуясь этим уравнением, построить L.

Задача 2 Доказать, что если $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ на $[0;1]$, то справедливо неравенство:

$$\int_0^1 x^n f(x)dx \le \frac{1}{n+1}\int_0^1 f(x)dx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Задача 3 Найти x из уравнения:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\pi^n}{n!} \cos\Big(\pi\big(x+\frac{n}{2}\big)\Big) = 1.$$

Задача 4 Доказать, что не существует функции $y(x)$, непрерывно дифференцируемой на интервале $(\alpha;\beta)$, включающем интервал $(0;\pi/2)$, и удовлетворяющей на $(\alpha;\beta)$ уравнению:

$$y' = (2+\sin x)\cdot y^2 + \frac{2x+4}{x+1}.$$

Задача 5 Пусть D – односвязное квадрируемое замкнутое множество в $\mathbb{R}^2$ с известной площадью S, симметричное относительно прямой $y = x$. Для функции $f : D \to \mathbb{R}$, непрерывной и положительной в D, вычислить интеграл:

$$\iint_D \frac{f(x,y)}{f(x,y)+f(y,x)} dx\ dy.$$

Задача 6 Найти все непрерывные на $\mathbb{R}$ функции, удовлетворяющие соотношению:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

<u>Замечание</u>: Все непрерывные на $\mathbb{R}$ функции, удовлетворяющие соотношению Коши: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, имеют вид: $f(x) = cx$, $c = const$.

Задача 7 Для последовательности $\{a_n, n \ge 1\}$ действительных чисел ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, и $a_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$, $\forall n \ge 1$. Найти последовательность $\{a_n, n \ge 1\}$.

Задачи всероссийской студенческой олимпиады по математике
ЮРГТУ(НПИ), Новочеркасск,
24 сентября 2007

Задача 1 Можно ли изменить порядок перехода к пределу в выражении:

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}\right)\right]?$$

Задача 2 Чему равно число k в равенстве: $\sum\limits_{i=1}^{4} p(z_i) = kp(s)$, если известно, что:
1) $p(z) = z^2 + az + b, \quad z, s, a, b \in \mathbb{C}$;
2) точки, изображающие числа
$z_1, \ldots, z_4 \in \mathbb{C}$, расположены в вершинах квадрата с центром в точке s.

Задача 3 Решить уравнение:

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2-2y+6z+10}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-4x-8y-6z+29}=7, \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Задача 4 Как выбрать точку C на графике строго возрастающей дифференцируемой функции f, чтобы сумма площадей фигур, лежащих между графиком и горизонтальной прямой, проведённой через C, была наименьшей?

Задача 5 Найти все $x \in \mathbb{R}$, при которых сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(1 - e^{sin(kx)}\right)\operatorname{arctg}(kx)$.

Задача 6 Для того, чтобы уравнение $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ имело действительный корень, достаточно, чтобы уравнение $ax^2+(c-b)x+e-d=0$ имело действительный корень, больший 1. Доказать.

Задача 7 Решить уравнение:

$$\int\limits_0^x (x-t)y(t)dt = 2x + \int\limits_0^x y(t)dt.$$

Задачи всероссийской студенческой олимпиады по математике
ЮРГТУ(НПИ), Новочеркасск, 2 октября 2009

Задача 1 Доказать, что для любых натуральных $m \neq 1 \neq n$ хотя бы одно из чисел $\sqrt[m]{n}$, $\sqrt[n]{m}$ не превосходит $\sqrt[3]{3}$.

Задача 2 Длина вектора, равного сумме 10 данных ненулевых векторов, больше длины суммы любых девяти из них. Доказать, что существует ось, на которую проекция каждого из данных 10 векторов положительна.

Задача 3 Функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, дифференцируема на $(a; b)$ и $f(a) = f(b) = 0$. Доказать, что найдётся такая точка $c \in (a; b)$, что $f(c) = f'(c)$.

Задача 4 Существует ли 4-угольная пирамида, две противолежащие боковые грани которой препендикулярны плоскости основания пирамиды?

Задача 5 Последовательность задана такими равенствами:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 1; \qquad \frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}, \quad n \geq 2.$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Задача 6 Найти все возможные значения аргумента комплексного числа z, удовлетворяющего условию $\left|z + \dfrac{1}{z}\right| = \sqrt{2}$.

Задача 7 Найти все решения бесконечной системы линейных уравнений

$$x\Big(1 - \frac{1}{2^n}\Big) + y\Big(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\Big) + z\Big(1 - \frac{1}{2^{n+2}}\Big) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Задачи всероссийской студенческой олимпиады по математике
ЮРГТУ(НПИ), Новочеркасск, 30 сент. 2010

Задача 1 Решить уравнение $X^{2011} = X$, где $X = \begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{bmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0, y \neq 0$.

Задача 2 На плоскости Π даны точки A и B. Два шара S_A и S_B касаются Π в точках A и B и касаются между собой в точке M. Для всех таких пар шаров (S_A, S_B) найти множество точек M в пространстве.

Задача 3 Найти

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{1}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n^2}\Big)$$

Задача 4 Найти дифференцируемую функцию $f(x)$ при $|x| < 1$, если:

$$\frac{df(\sin t)}{dt} = -\sin 2t, \qquad f(\sin t) + f(\cos t) = 1.$$

Задача 5 Исследовать ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ на сходимость, если $a_0 = a \neq 0$, и для $n > 0$: $a_n = \dfrac{1}{a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}}$.

Задача 6 Что является образом окружности $x^2+y^2 = y/3$ при отображении $w = 1/z$, $z = x + iy$, $w = u + iv$?

Задача 7 Решить задачу Коши: $xy'' - y' - x^2yy' = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$.

Всероссийская студенческая олимпиада по математике для студентов технических вузов (ЮРГТУ (НПИ)) 11.10.2011

Задача 1 Существует ли целочисленная матрица размера 3×3 с определителем, равным 1, все элементы которой по абсолютной величине больше 1000 ?

Задача 2 Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} y' = y^2 + z \\ z' = z^2 + y \end{cases}$
с начальным условием $y(0) = z(0) = 1$.

Задача 3 Существует ли в трехмерном пространстве треугольник с площадью $\sqrt{3}$, вершины которого имеют целочисленные координаты ?

Задача 4 Известно, что функция $y(x) = e^{(1-\sqrt[3]{2})x}$ является решением линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными целыми коэффициентами. Найти хотя бы одно такое уравнение.

Задача 5 Изобразить множество точек на плоскости, координаты x, y которых удовлетворяют соотношению $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n} - |y|^n}{x^{2n} + |y|^n} < 0$.

Задача 6 Докажите, что положительный корень уравнения
$x(x+1)(x+2)\dots(x+n) = 1$ меньше, чем $1/n!$

Задача 7 Найти непрерывную кусочно-гладкую функцию, для которой интеграл $\displaystyle\int_{-3}^{3} \sqrt{1+(y')^2}dx$ принимает min значение, если: $y(\pm 3) = 0$; $y(x) \geq 1$ при $|x| \leq 1$.

Всероссийская студенческая олимпиада по математике для студентов технических вузов (ЮРГТУ (НПИ)) 23.4.2013

Задача 1 Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на $[0;1]$ и удовлетворяет условиям: $f'(1) < 2f(1)$, $f''(x) > 0\ \forall x \in (0;1)$. Доказать: $\int_0^1 f(x)dx > 0$.

Задача 2 Доказать, что уравнение $x^6 - 6x - C = 0$ имеет не более двух действительных корней.

Задача 3 Доказать, что на окружности, центр которой имеет иррациональные координаты, не существует трёх различных точек с рациональными координатами.

Задача 4 Какова точная верхняя оценка для суммы s косинусов двугранных углов произвольного тетраэдра?

Задача 5 При каких $p, q \in \mathbb{R}$ сходится последовательность: $x_0 = p$, $x_n = 1 + qx_{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$? В случае существования предела найти его.

Задача 6 Найти все пары действительных чисел x, y, удовлетворяющих неравенству $y^2 + y^3 + \sqrt[4]{y^3 - x^2 - 3xy} \leq 5xy$.

Задача 7 Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет уравнению $f^3(x) + 2f(x) - x = 0$. Вычислить интеграл $S = \int_0^3 f(x)dx$.

Всероссийская студенческая олимпиада по математике для студентов технических вузов (ЮРГТУ (НПИ)) 16.4.2014

Задача 1 Найти отношение

$$\frac{1 + e^{-2}/3 + e^{-4}/5 + e^{-6}/7 + \dots}{1/2 + e^{-2}/4 + e^{-4}/6 + e^{-6}/8 + \dots}$$

Задача 2 Решить уравнение

$$1 + \left(\int_0^x y(t)dt \right)^2 = y(x)$$

Задача 3 Сколько различных пар (x, y) целых чисел удовлетворяет уравнению

$$\prod_{k=0}^{n} \Big(1 - (x - 5k - 1)^2 - y^2\Big) \Big(1 - (x - 5k - 3)^2 - y^2\Big) = 0 \quad ?$$

Задача 4 Доказать или опровергнуть утверждение: „в сечении некоторой плоскостью поверхности куба может получиться правильный пятиугольник”.

Задача 5 Изобразить на плоскости kOp множество точек $(k; p)$ таких, что прямая $y = kx$ не пересекает параболу $p^2x^2 + y + 1 = 0$.

Задача 6 Известно, что три различных корня уравнения $x^5+px+q = 0$ действительны. Что можно сказать о знаке коэффициента p ?

Задача 7 Доказать, что при любом расположении 7 точек в прямоугольнике 3×4 найдётся круг радиуса $6/5$, накрывающий хотя бы две из данных точек.