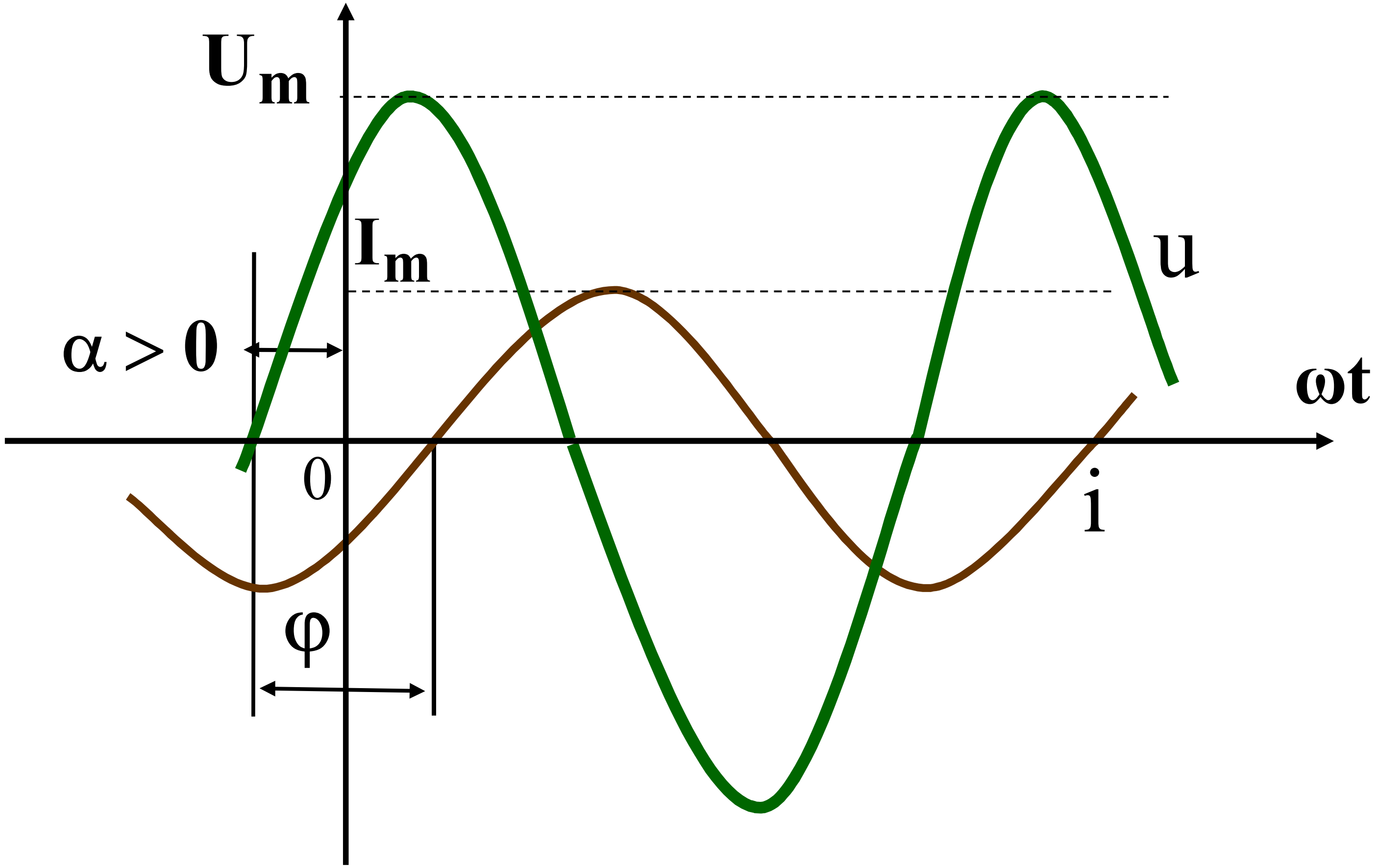
Однофазные цепи синусоидального тока

Напряжения, токи и ЭДС называются ***переменными***, если их значения изменяются во времени.

Их значения в любой данный момент времени называются ***мгновенными*** (i, u, e).

Представление синусоидальных величин в виде графиков

$$u = U_m \sin(\omega t + \alpha) \qquad i = I_m \sin(\omega t + \alpha - \varphi)$$



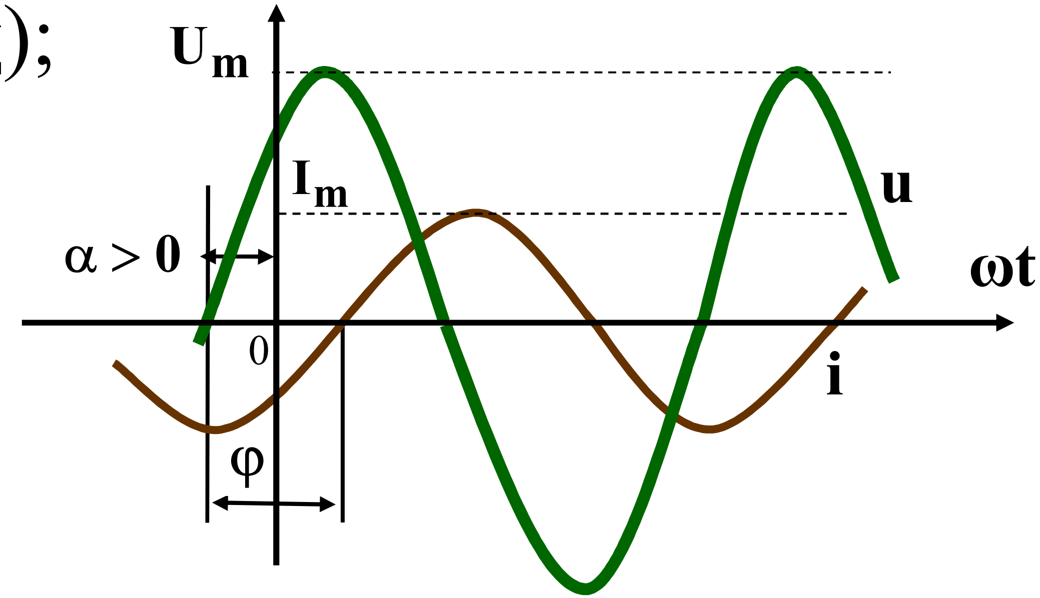
где:

$\mathbf{I_m}$ и $\mathbf{U_m}$- максимальные значения тока и напряжения;

α - начальная фаза напряжения (град или рад);

φ - угол сдвига фаз между напряжением и током (град или рад);

t - время (с)



$f = 50$ Гц - частота

$\omega = 2\pi f = 314$ рад/с – угловая частота

Действующее значение гармонического тока i численно равно такому постоянному току I, который за время T в том же сопротивлении R выделяет такое же количества тепла W

Действующее значение тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt} = I_m \big/ \sqrt{2}$$

Действующее значение напряжения

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2 dt} = U_m \big/ \sqrt{2}$$

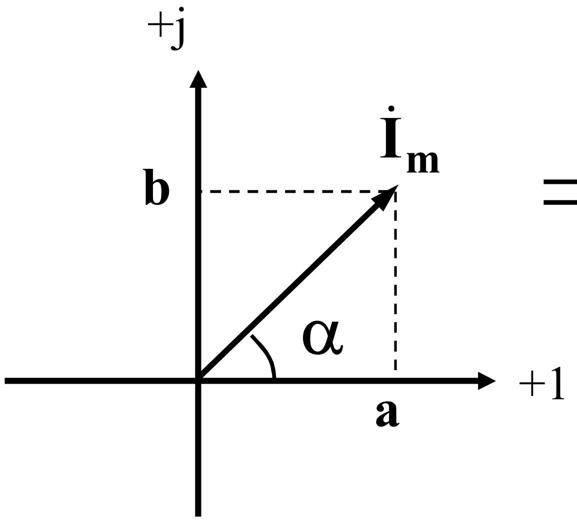
Действующие значения тока и напряжения не зависят от угловой частоты и начальной фазы

$$\mathbf{i} = \mathbf{I_m} \sin(\omega \mathbf{t} + \alpha) =$$

$$= \sqrt{2}\mathbf{I} \sin(\omega \mathbf{t} + \alpha)$$

Представление синусоидальных величин комплексными числами

$\mathbf{j} = \sqrt{-1}$ – мнимая единица



$$\mathbf{i} = \mathbf{I_m \sin(\omega t + \alpha)}$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{I}}_\mathbf{m} = \mathbf{I_m e^{j\alpha} = I_m \cos\alpha + jI_m \sin\alpha =}$$
$$\mathbf{= a + jb}$$

$\dot{\mathbf{I}}_\mathbf{m} = \mathbf{I_m e^{j\alpha}}$ – комплексная амплитуда

+1 – ось действительных чисел; +j – ось мнимых чисел

$$\mathbf{i = I_m \sin(\omega t + \alpha) = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t + \alpha)}$$

$\Rightarrow \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{I\, e^{j\alpha}}$ – комплекс действующего значения

Например: току

$$i = 2.82 \cdot \sin(\omega t - 30^\circ), A$$

соответствует

$\dot{I} = \underline{I} = \dfrac{2.82}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j30^\circ}$ - комплекс действующего значения

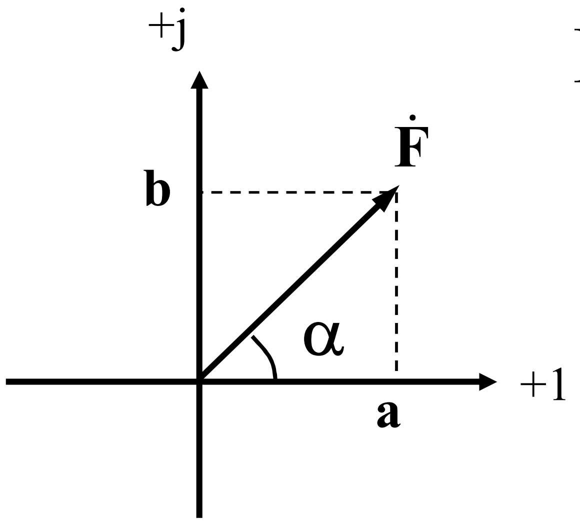
$\dot{I}_m = \underline{I}_m = 2.82 \cdot e^{-j30^\circ}$ - комплексная амплитуда

Комплексу действующего значения напряжения

$$\dot{U} = \underline{U} = 100 \cdot e^{j45^\circ}, B$$

соответствует $u = \sqrt{2} \cdot 100 \cdot \sin(\omega t + 45^\circ), B$

Действия с комплексными числами



$$\dot{F} = F \cdot e^{j\alpha} = a + jb$$ - комплексное число

F - модуль

α - аргумент (фаза)

a - вещественная часть

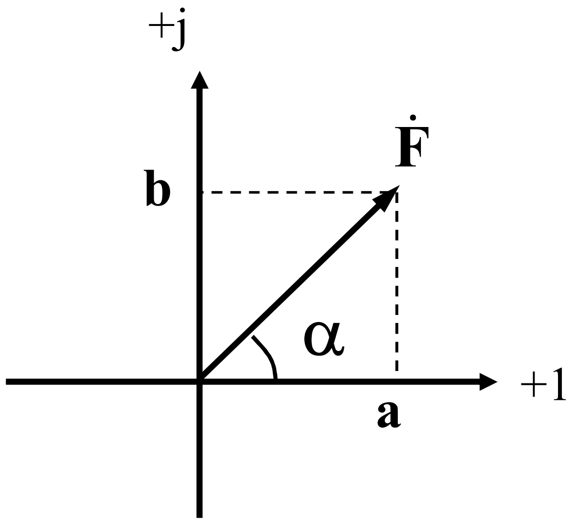
b - мнимая часть

Переход от алгебраической формы к показательной

$$a + jb \Rightarrow Fe^{j\alpha}$$

$$F = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \alpha = \mathrm{arctg}\frac{b}{a} + (180^\circ), \text{при } a < 0$$

Переход от показательной формы к алгебраической



$$Fe^{j\alpha} \Rightarrow a + jb$$

$$a = F\cos\alpha \qquad b = F\sin\alpha$$

$$1/j = -j \qquad j = e^{j90^\circ} \qquad 1 = e^{j0^\circ}$$

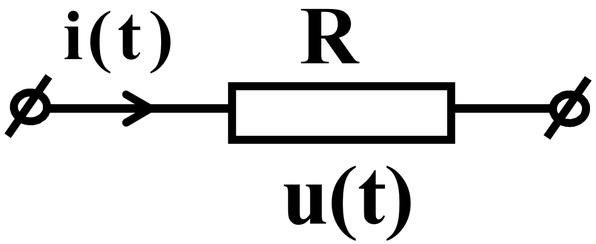
$$j^2 = -1 \qquad -j = e^{-j90^\circ} \qquad -1 = e^{j180^\circ}$$

Поведение простейших двухполюсников в цепях синусоидального тока

Вычислим падения напряжения на двухполюсниках, по каждому из которых протекает синусоидальный ток

$$i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_i) \rightarrow \dot{I} = Ie^{j\psi_i}$$

Резистивный элемент



$$u = R \cdot i = R\sqrt{2}I\sin(\omega t + \psi_i) =$$

$$= \sqrt{2}U\sin(\omega t + \psi_i) \rightarrow \dot{U} = Ue^{j\psi_i}$$

Тогда $U = R \cdot I, \quad \varphi = \psi_i - \psi_i = 0$

Мгновенная активная мощность равна:

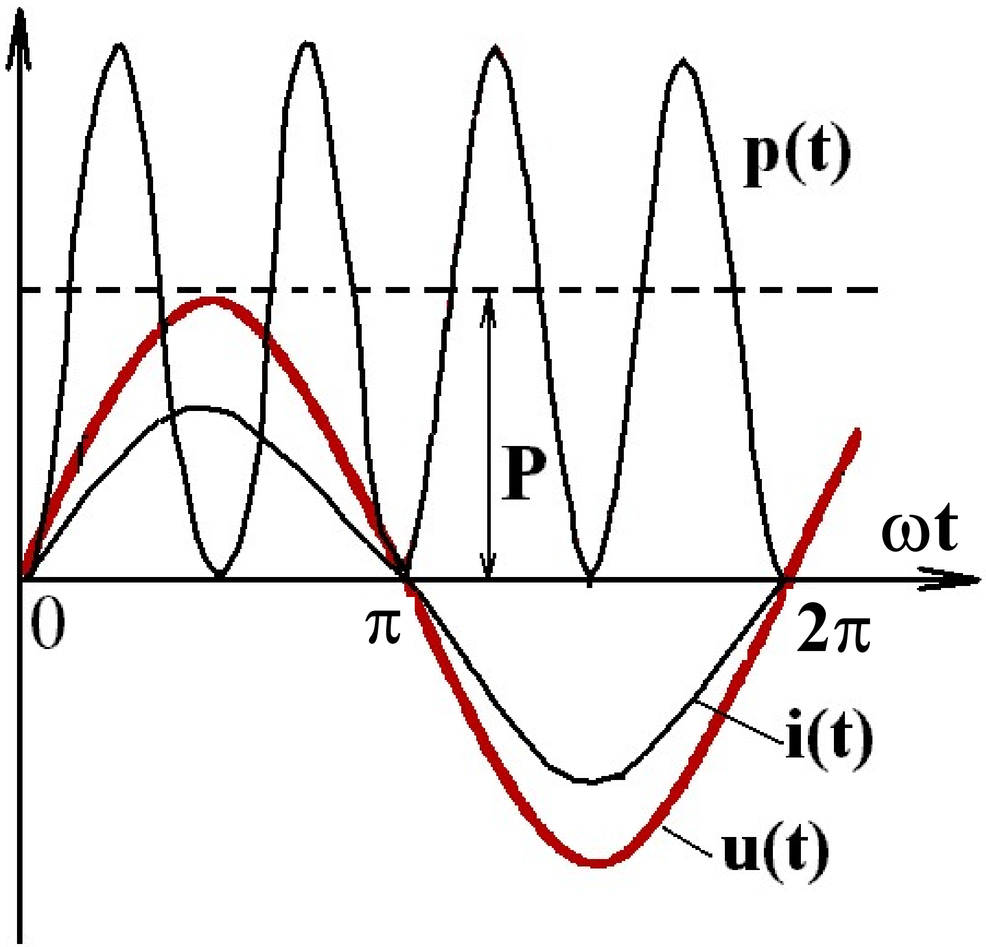
$$\mathbf{p = u \cdot i = 2 \cdot I^2 R \cdot \sin^2(\omega t + \psi_i) =}$$

$$\mathbf{= I^2 R(1 - \cos 2(\omega t + \psi_i))}$$

Средняя за период Т активная мощность:

$$\mathbf{P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = I^2 R,\ Вт}$$

P - называется **активной мощностью** и используется в балансе мощностей



На резистивном элементе ток и напряжение совпадают по фазе

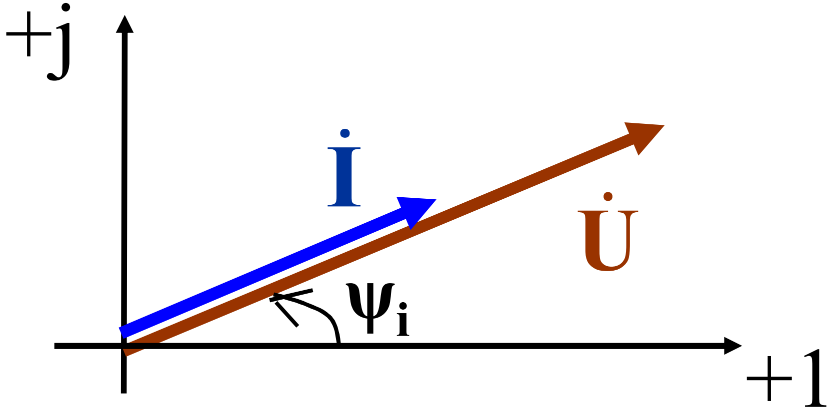
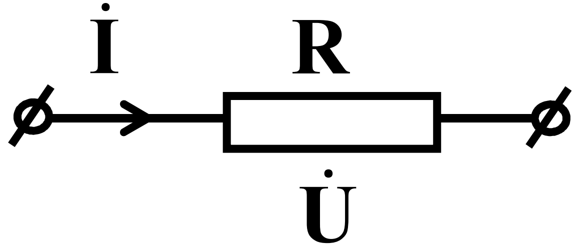


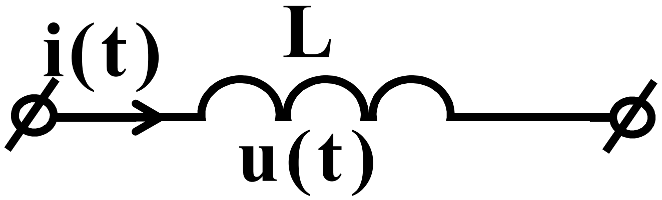
Схема замещения



Закон Ома в комплексной форме

$$\dot{U} = R \cdot \dot{I}$$

Индуктивный элемент



$$i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_i) \rightarrow \dot{I} = Ie^{j\psi_i}$$

$$u = L\frac{di}{dt} = \omega LI\sqrt{2}\cos(\omega t + \psi_i) =$$

$$x_L I\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_i + 90^\circ) = \sqrt{2}U\sin(\omega t + \psi_u)$$

где $x_L = \omega L$ - **индуктивное сопротивление (Ом)**

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 90^\circ$$

Напряжение на индуктивности опережает ток по фазе на 90^0

Мгновенная мощность равна:

$$p = u \cdot i =$$

$$2 \cdot I^2 x_L \cdot \sin(\omega t + \psi_i) \cdot \cos(\omega t + \psi_i) =$$

$$= Q_L \cdot \sin 2(\omega t + \psi_i)$$

$$Q_L = I^2 \cdot x_L \text{, Вар} -$$

реактивная индуктивная мощность

Когда **p ≥ 0** индуктивность потребляет энергию, которая запасается в магнитном поле;

когда **p ≤ 0** запасенная энергия возвращается в сеть.

Средняя за период **T** активная мощность **P=0**.

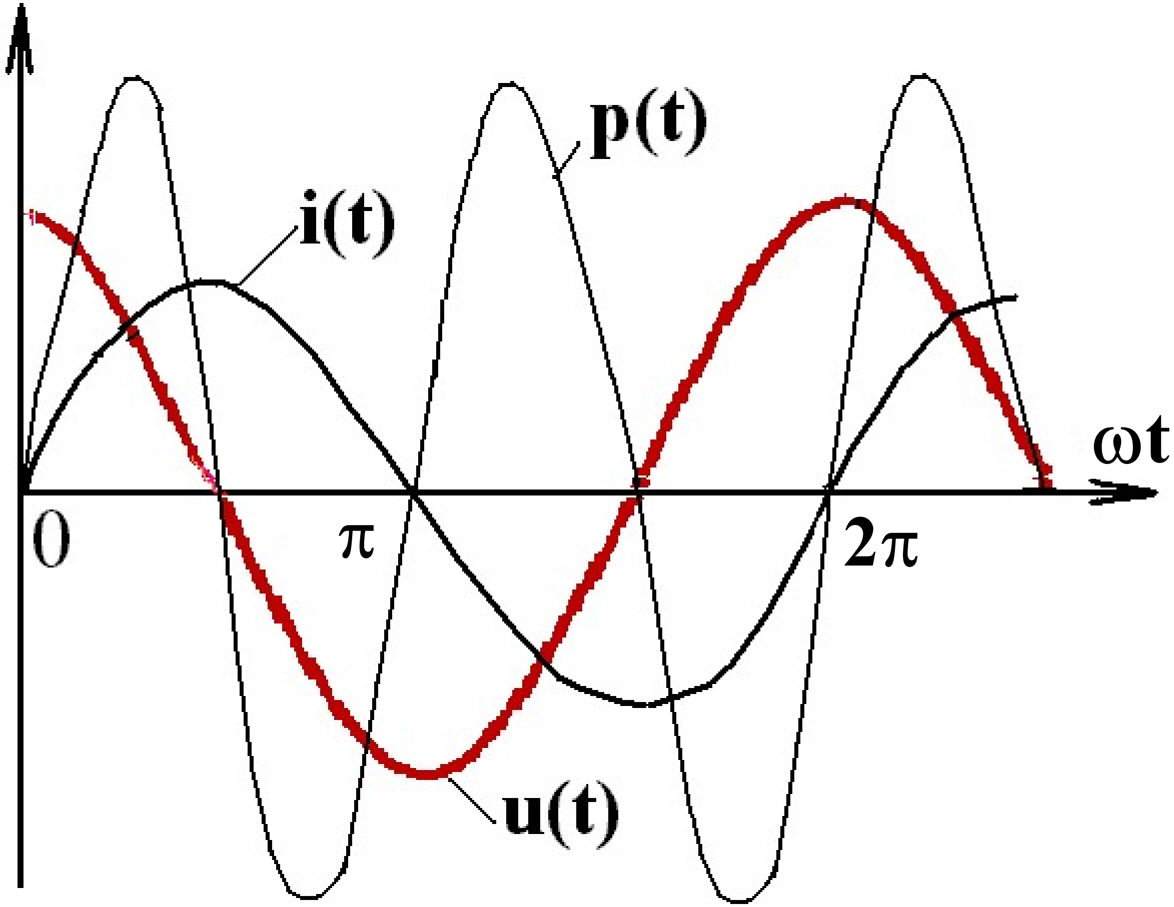
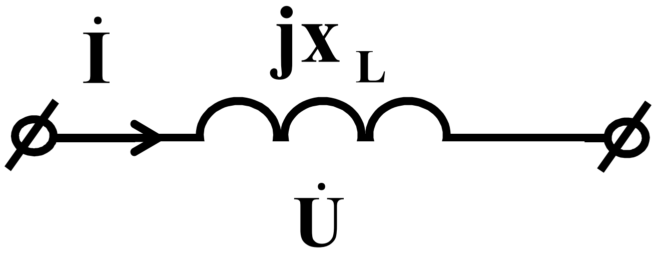
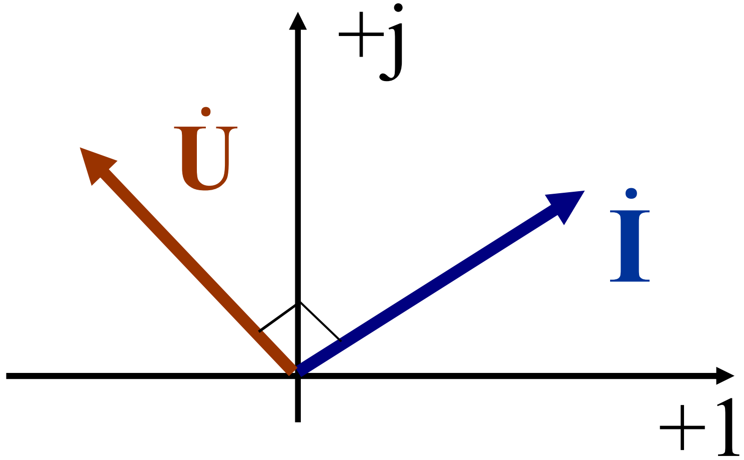


Схема замещения



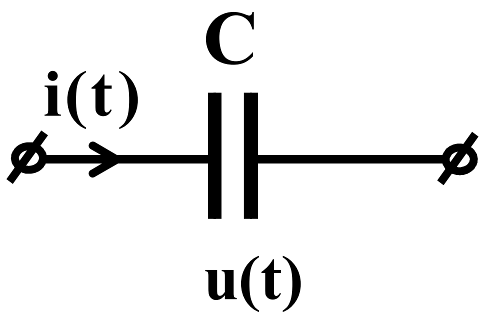


Закон Ома

$$\dot{U} = \dot{I} \cdot jx_L$$

$$j = 1e^{j90}$$

Емкостной элемент



$$u = \frac{1}{C}\int i\,dt = -\frac{I\sqrt{2}}{\omega C}\cos(\omega t + \psi_i) =$$

$$= x_C I\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_i - 90^\circ) = \sqrt{2}U\sin(\omega t + \psi_u)$$

$x_C = {}^{1}\!/_{\omega C}$ - емкостное сопротивление (Ом)

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = -90^\circ$$

Напряжение на емкости отстает от тока по фазе на 90^0

Мгновенная мощность равна:

$$\mathbf{p = u \cdot i =}$$

$$\mathbf{- 2 \cdot I^2 x_C \cdot \sin(\omega t + \psi_i) \cdot \cos(\omega t + \psi_i) =}$$

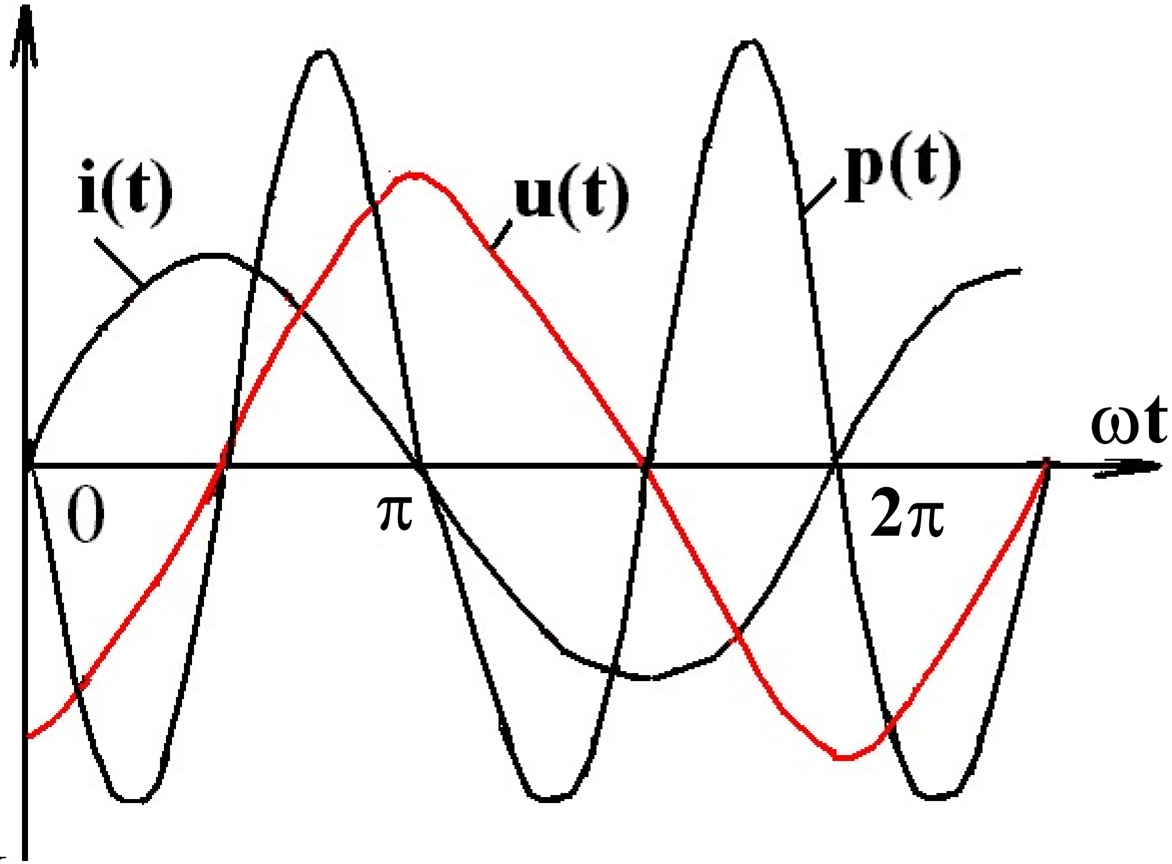
$$\mathbf{= Q_C \cdot \sin 2(\omega t + \psi_i)}$$

$$\mathbf{Q_C = - I^2 \cdot x_C \text{, Вар}}$$

- реактивная емкостная мощность

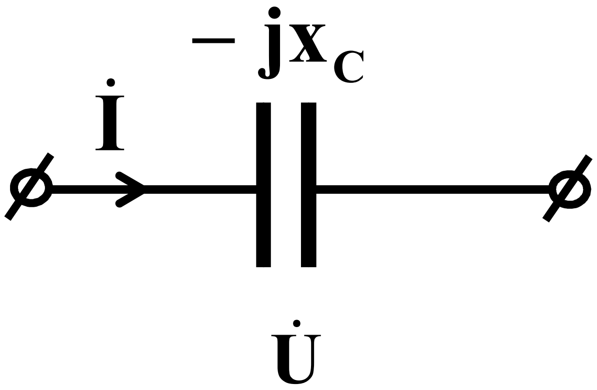
Когда $\mathbf{p \geq 0}$
ёмкость потребляет энергию, которая запасается в электрическом поле;

когда $\mathbf{p \leq 0}$
запасенная энергия возвращается в сеть.



Средняя за период **T** активная мощность **P=0**.

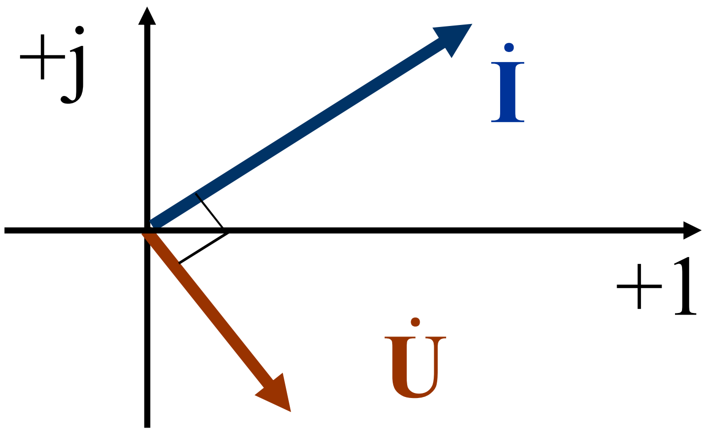
Схема замещения



Закон Ома

$$\dot{U} = -jx_C\dot{I}$$

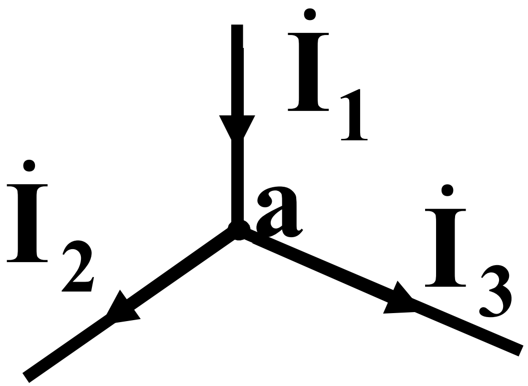
$$-j = 1e^{-j90}$$



ПЕРВЫЙ ЗАКОН КИРХГОФА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Для любого узла комплексной схемы замещения цепи алгебраическая сумма комплексных значений токов равна нулю

$$\sum \pm \dot{I}_k = 0$$

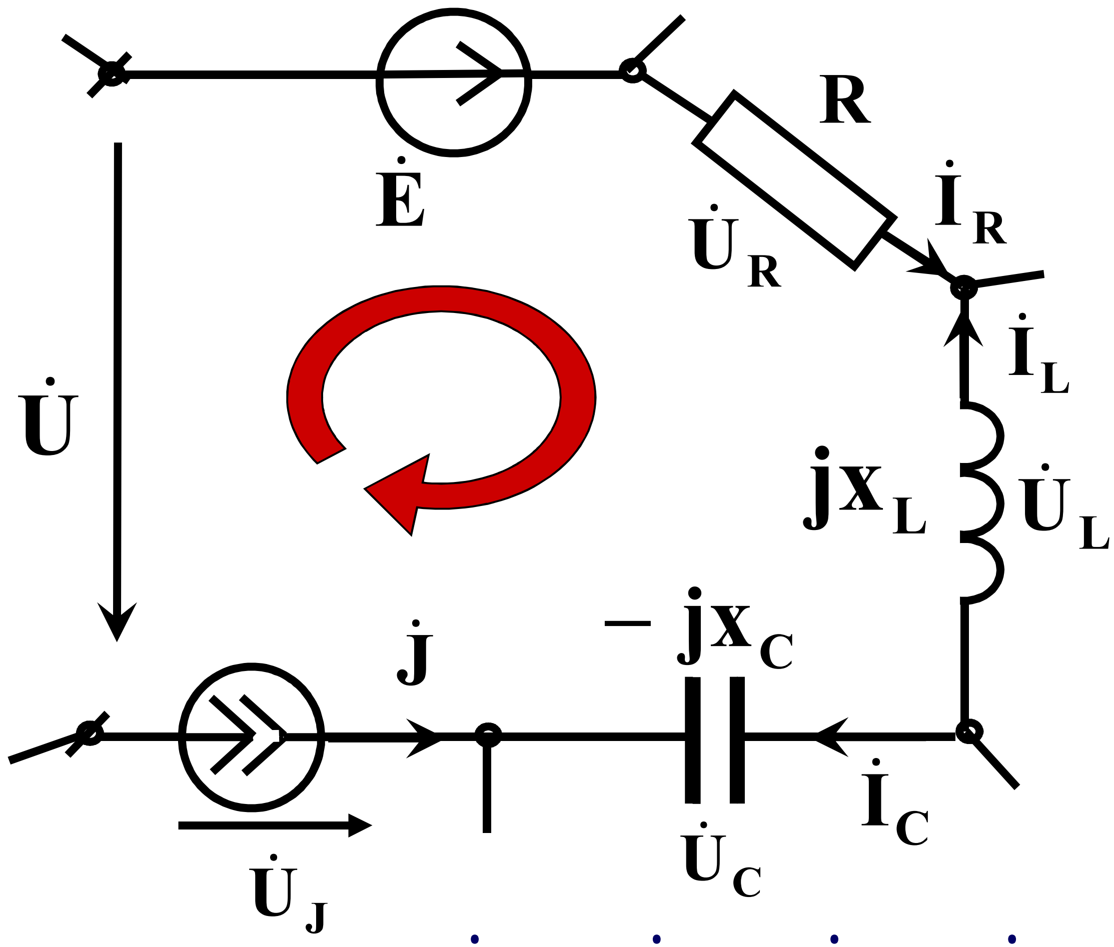


$$-\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$$

ВТОРОЙ ЗАКОН КИРХГОФА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Для любого контура цепи алгебраическая сумма комплексов падений напряжений на пассивных элементах равна алгебраической сумме комплексов ЭДС и напряжений источников тока

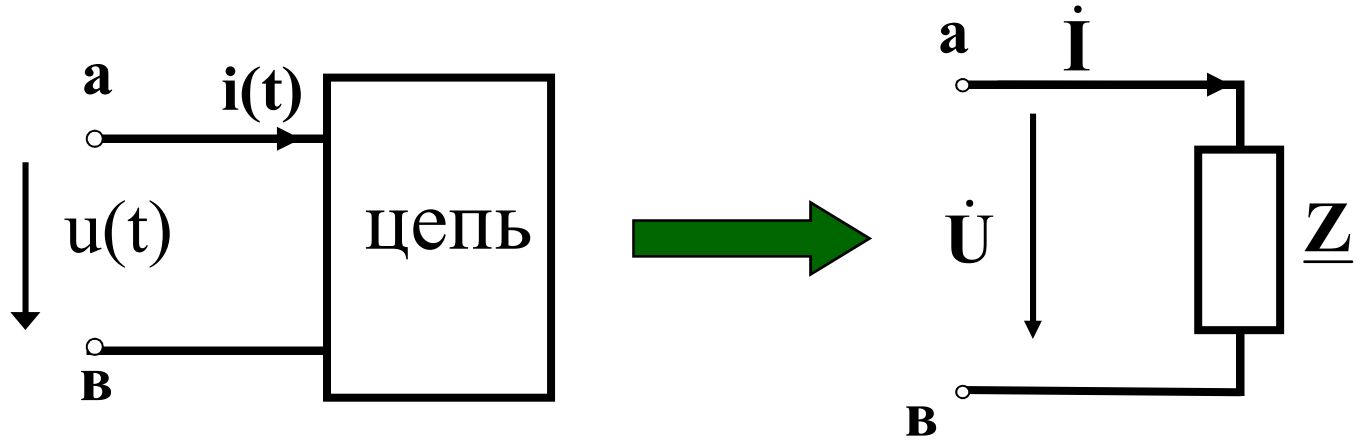
$$\sum \pm \dot{U}_n = \sum \pm \dot{E}_k + \sum \pm \dot{U}_{J_q}$$



$$\dot{U}_R - \dot{U}_L + \dot{U}_C - \dot{U} = \dot{E} - \dot{U}_J$$

$$R\dot{I}_R - jx_L\dot{I}_L + (-jx_C)\dot{I}_C - \dot{U} = \dot{E} - \dot{U}_J$$

Мощность в цепи синусоидального тока



$$u(t)=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\alpha),\ (\text{В}) \Rightarrow \dot{U}=Ue^{j\alpha},\ (\text{В})$$

$$i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\beta),\ (\text{А}) \Rightarrow \dot{I}=Ie^{j\beta},\ (\text{А})$$

$$\underline{Z}=Ze^{j\varphi}=R+jx,\ (\text{Ом})$$

При $\dot{I}^{*} = Ie^{-j\beta}$ **находим**

$$\dot{S} = \dot{U}\dot{I}^{*} = UIe^{j(\alpha-\beta)} = UIe^{j\varphi} =$$

$$= UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = P + jQ, (\text{ВА})$$

- комплекс полной мощности

где $\dot{I}^{*} = Ie^{-j\beta}$ **- сопряженный ток**

$$\varphi = \alpha - \beta, (\text{град})$$

- угол сдвига фаз между напряжением и током

Т.к. $\dot{U} = \underline{Z}\dot{I}$, то

$$\dot{S} = \dot{U}\overset{*}{\dot{I}} = (\underline{Z}\dot{I})\overset{*}{\dot{I}} = \underline{Z}Ie^{j\beta} \cdot Ie^{-j\beta}$$

$$= \underline{Z}I^2 = I^2R + jI^2x = P + jQ, (\text{ВА})$$

Активная мощность:

$$P = UI\cos\varphi = I^2R, (\text{Вт})$$

- это мощность тепловой энергии или средняя скорость необратимого преобразования энергии во всех резистивных элементах

Реактивная мощность:

$$Q = UI\sin\varphi = I^2x, \text{(вар)}$$

- отражает процесс обмена энергией между источником энергии и совокупностью индуктивных и емкостных элементов

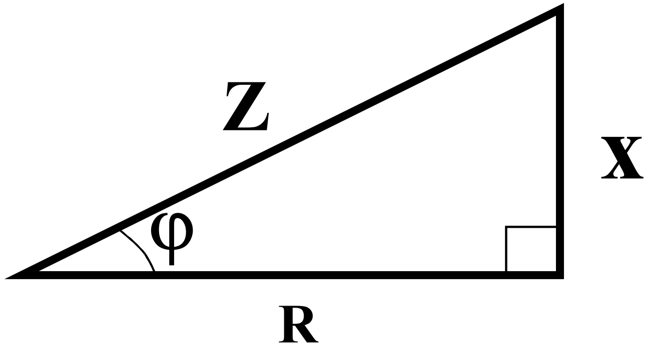
Полная мощность:

$$S = UI = \frac{P}{\cos\varphi}, \text{(ВА)}$$

– это максимально возможная активная мощность при $\cos\varphi = 1$

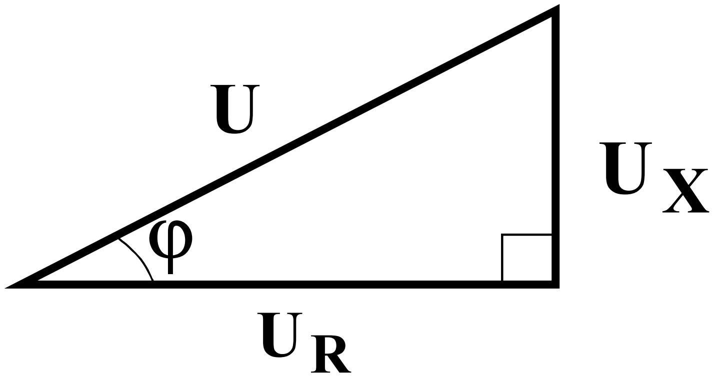
Можно изобразить:

а) треугольник сопротивлений



$$Z = \sqrt{R^2 + x^2} \qquad \cos\varphi = \frac{R}{Z}$$

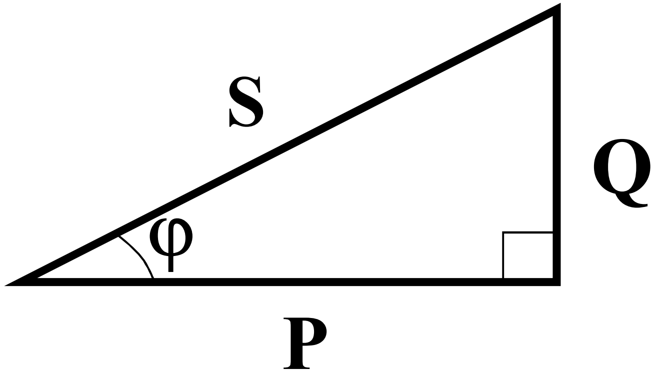
б) треугольник напряжений



$$U = \sqrt{U_R^2 + U_x^2} \qquad \cos\varphi = \frac{U_R}{U}$$

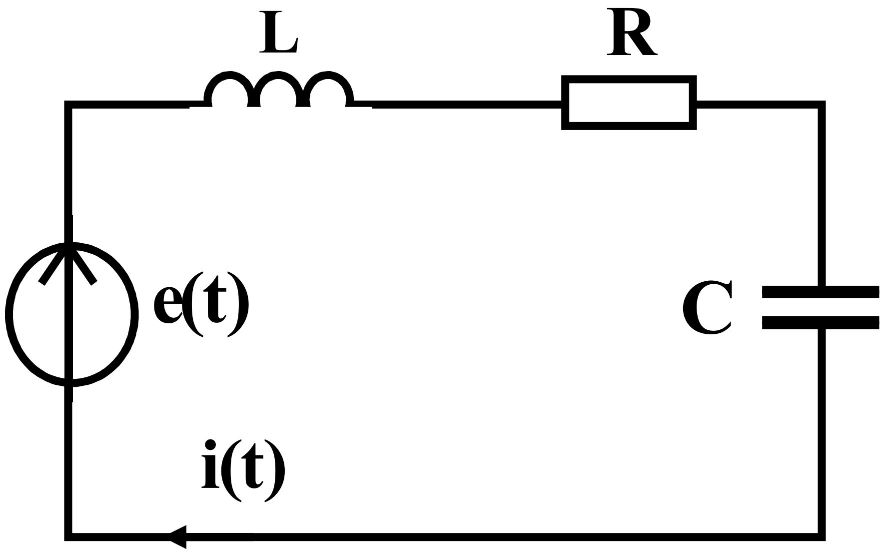
$$U_R = IR; \quad U_x = Ix$$

в) треугольник мощностей



$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \qquad \cos\varphi = \frac{P}{S}$$

Последовательное соединение элементов



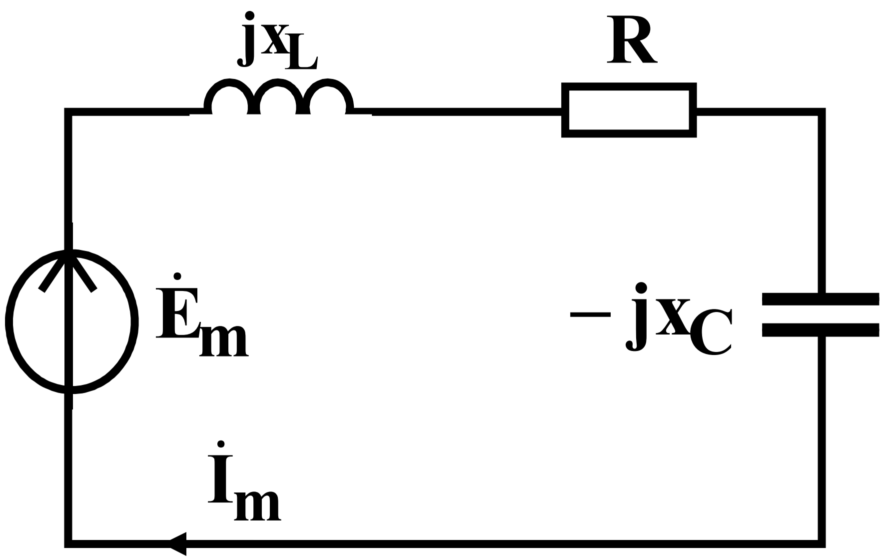
$$e(t) = \sqrt{2}E\sin(\omega t + \alpha)$$

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = e(t)$$

$$i(t)R + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt = e(t)$$

для нахождения тока нужно решить диф. уравнение второго порядка

Схема замещения



$$e(t) \to \dot{E}_m = \sqrt{2}Ee^{j\alpha}$$

$$x_L = \omega L$$

$$x_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$\underline{\underline{Z}} = R + jx_L - jx_C = R + j(x_L - x_C) = R + jx = Ze^{j\varphi}$$

- комплекс полного сопротивления цепи

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{E}_m}{\underline{\underline{Z}}} = \frac{\sqrt{2}Ee^{j\alpha}}{Ze^{j\varphi}} = I_m e^{j(\alpha-\varphi)}$$

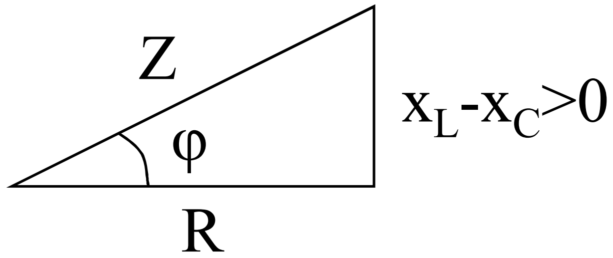
$$\dot{I}_m \to i(t) = I_m \sin(\omega t + \alpha - \varphi)$$

$$\underline{Z} = R + jx = Ze^{j\varphi}$$

$Z = \sqrt{R^2 + x^2}$ – модуль полного сопротивления цепи

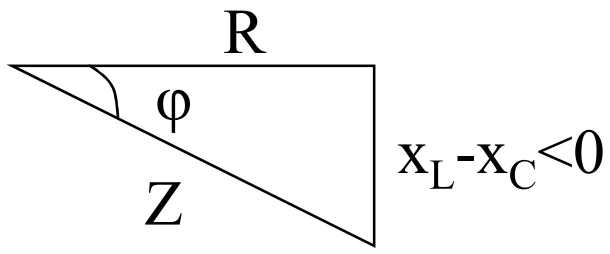
$\varphi = \mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{R}$ – угол сдвига фаз между входными током и напряжением

Угол φ может быть положительным ($0 < \varphi < 90^0$), если $x_L > x_C$ – нагрузка **активно-индуктивного характера**

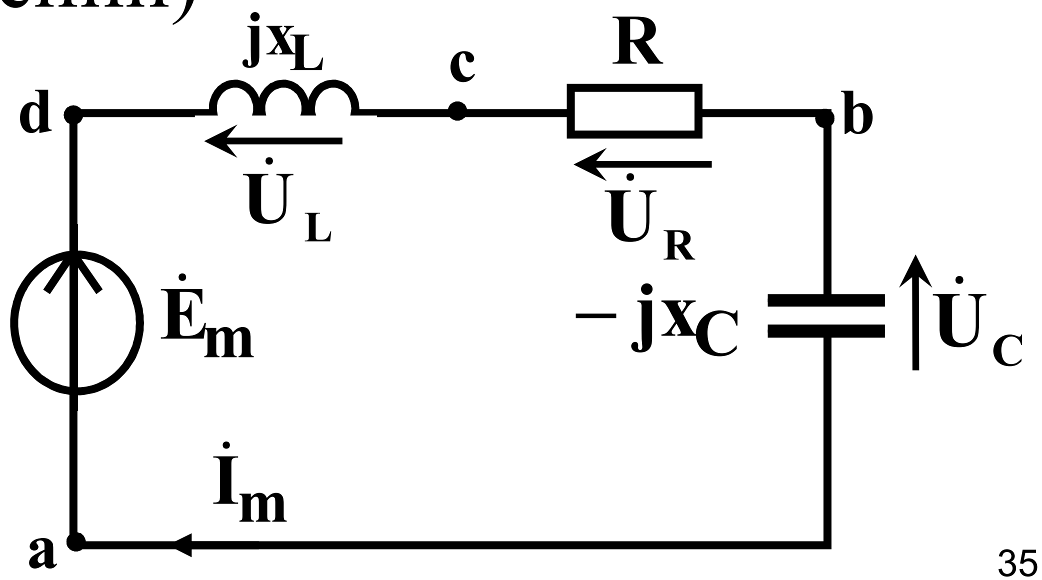


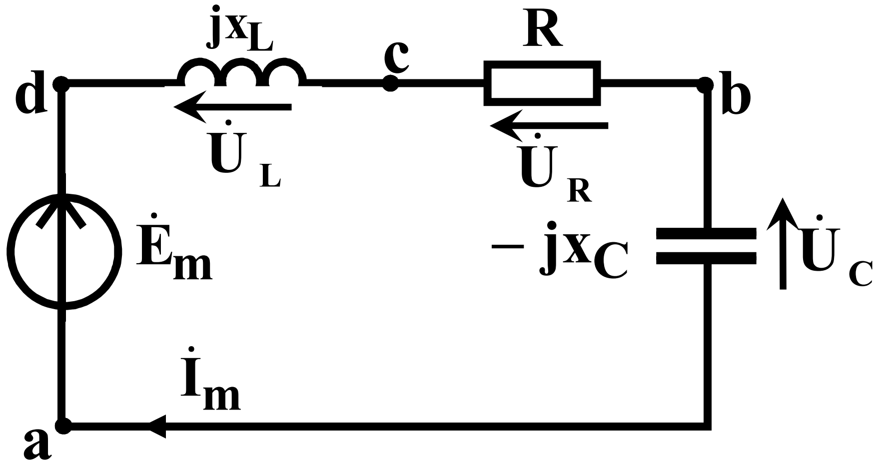
треугольник сопротивлений

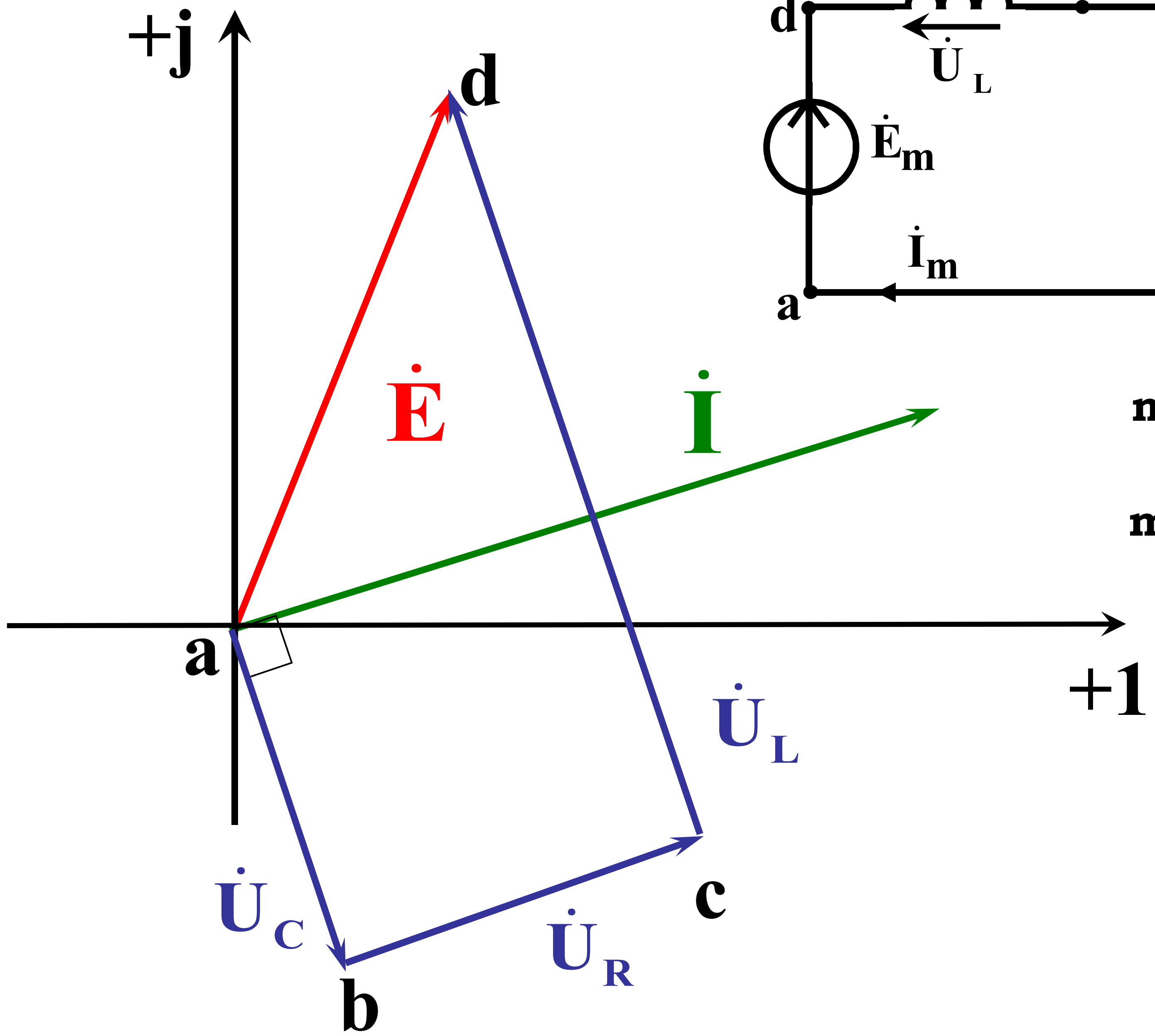
Угол φ может быть отрицательным ($-90^0 < \varphi < 0$), если $x_L < x_C$ – нагрузка **активно-емкостного характера**



Угол $\varphi = 0$, если $x_L = x_C$ – **активная** нагрузка (резонанс напряжений)







$m_U = \ldots$ В/мм

$m_I = \ldots$ А/мм

Резонанс – это такой режим электрической цепи, содержащей емкости и индуктивности, при котором входные ток и напряжение совпадают по фазе

Резонанс напряжений – это резонанс при последовательно соединенных емкости и индуктивности

условие резонанса

$$x_L = x_C \quad \text{или} \quad \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$ - резонансная частота

В режиме резонанса $$\underline{Z}_{вх} = R, \ \ \varphi = \mathrm{arctg}\frac{\cancel{x}^{\,0}}{R} = 0$$

$$\dot{I} = \frac{Ue^{j\alpha}}{R}$$ - максимальный

$$P = UI\cos\varphi = UI = S$$

$$Q = UI\sin\varphi = 0$$

$$U_L = U_C = I \cdot x_L = I \cdot x_C$$

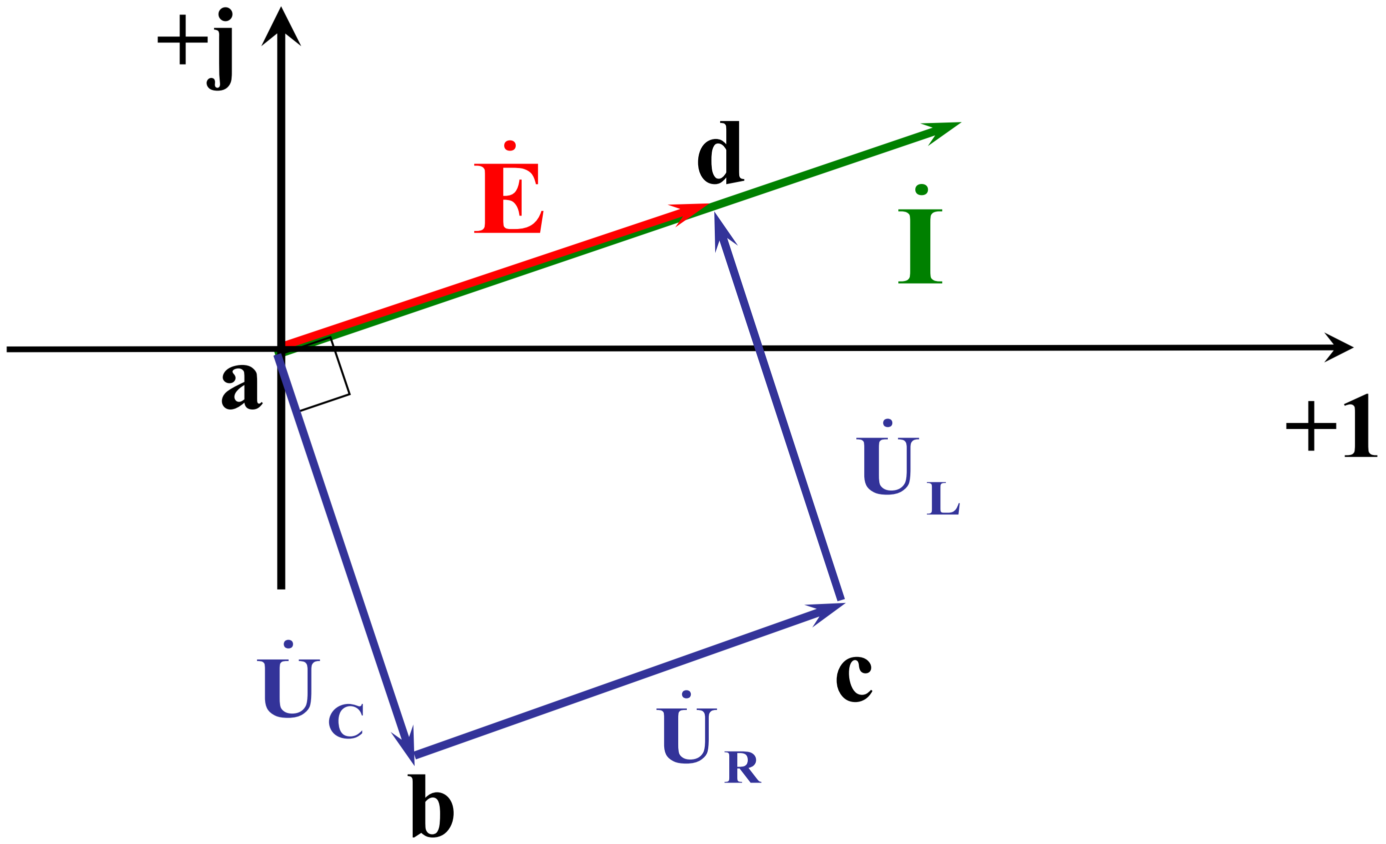
Добротность контура определяет, во сколько раз напряжение на реактивных элементах при резонансе превышает входное

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{U_L}}{\mathbf{U}} = \frac{\mathbf{U_C}}{\mathbf{U}} = \frac{\rho}{\mathbf{R}}$$

Если $\mathbf{q} = \dfrac{\mathbf{x_L}}{\mathbf{R}} >> 1$ то

$$\mathbf{U_L} = \mathbf{U_C} >> \mathbf{U}$$

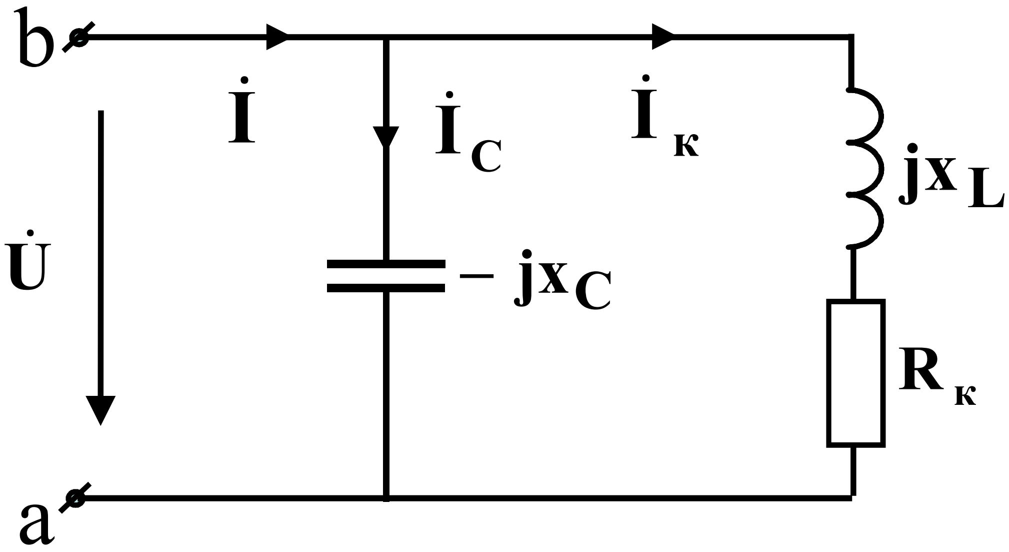
$\rho = \sqrt{\dfrac{\mathbf{L}}{\mathbf{C}}}$ – характеристическое сопротивление



Резонанс напряжений используется в радиотехнике для усиления сигналов определенной частоты и в электроэнергетике для увеличения активной мощности нагрузки генератора

Параллельное соединение элементов

$$\dot{U} = Ue^{j0}$$



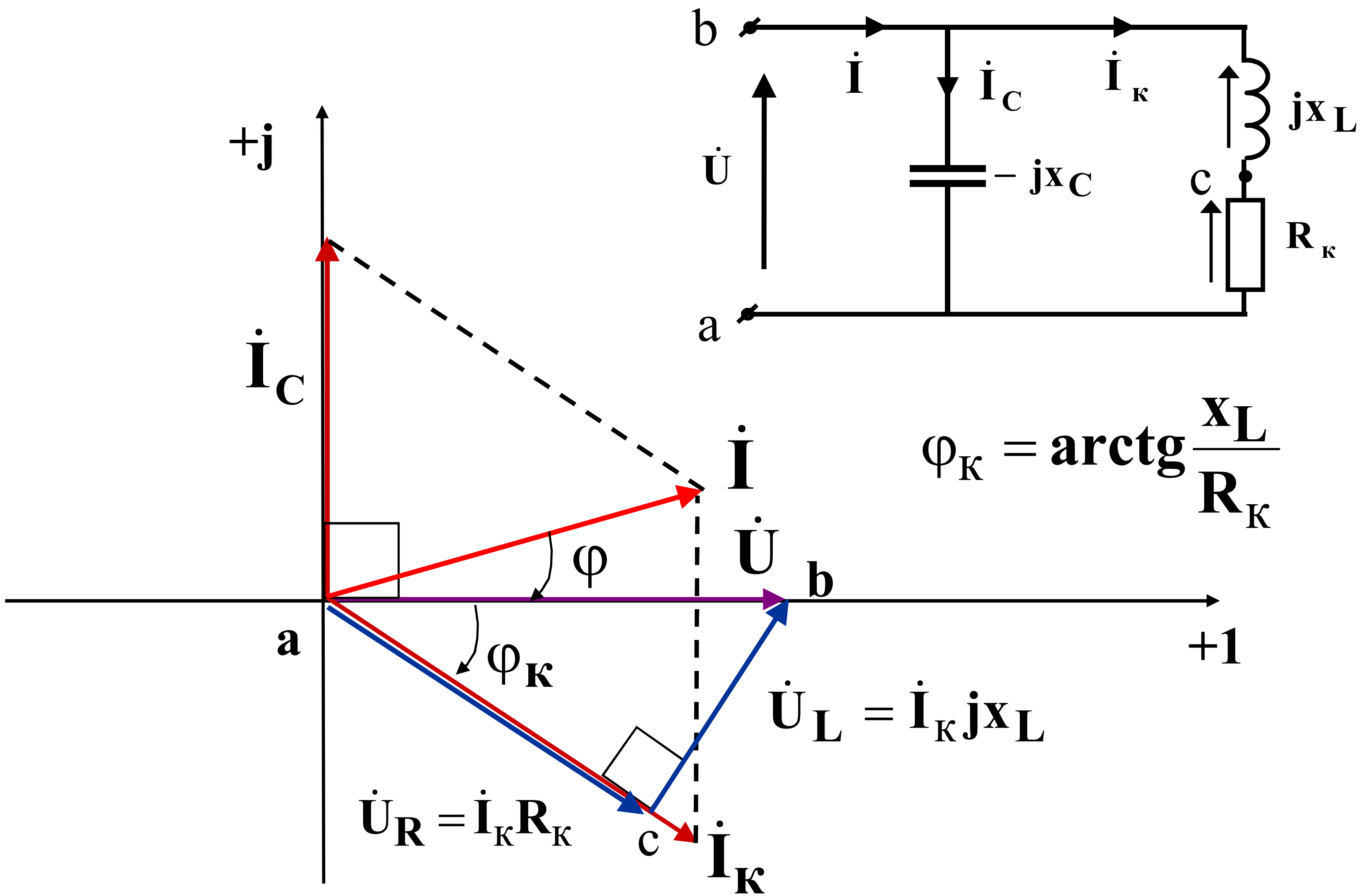
$$\dot{I}_к = \frac{\dot{U}}{R_к + jx_L}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{-jx_C}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_к + \dot{I}_C = \dot{U}\left(\frac{1}{R_К + jx_L} + \frac{1}{(-jx_C)}\right) =$$

$$= \dot{U} \cdot \underline{Y}_{ВХ} = \dot{U} \cdot Ye^{-j\varphi}, \quad (A)$$

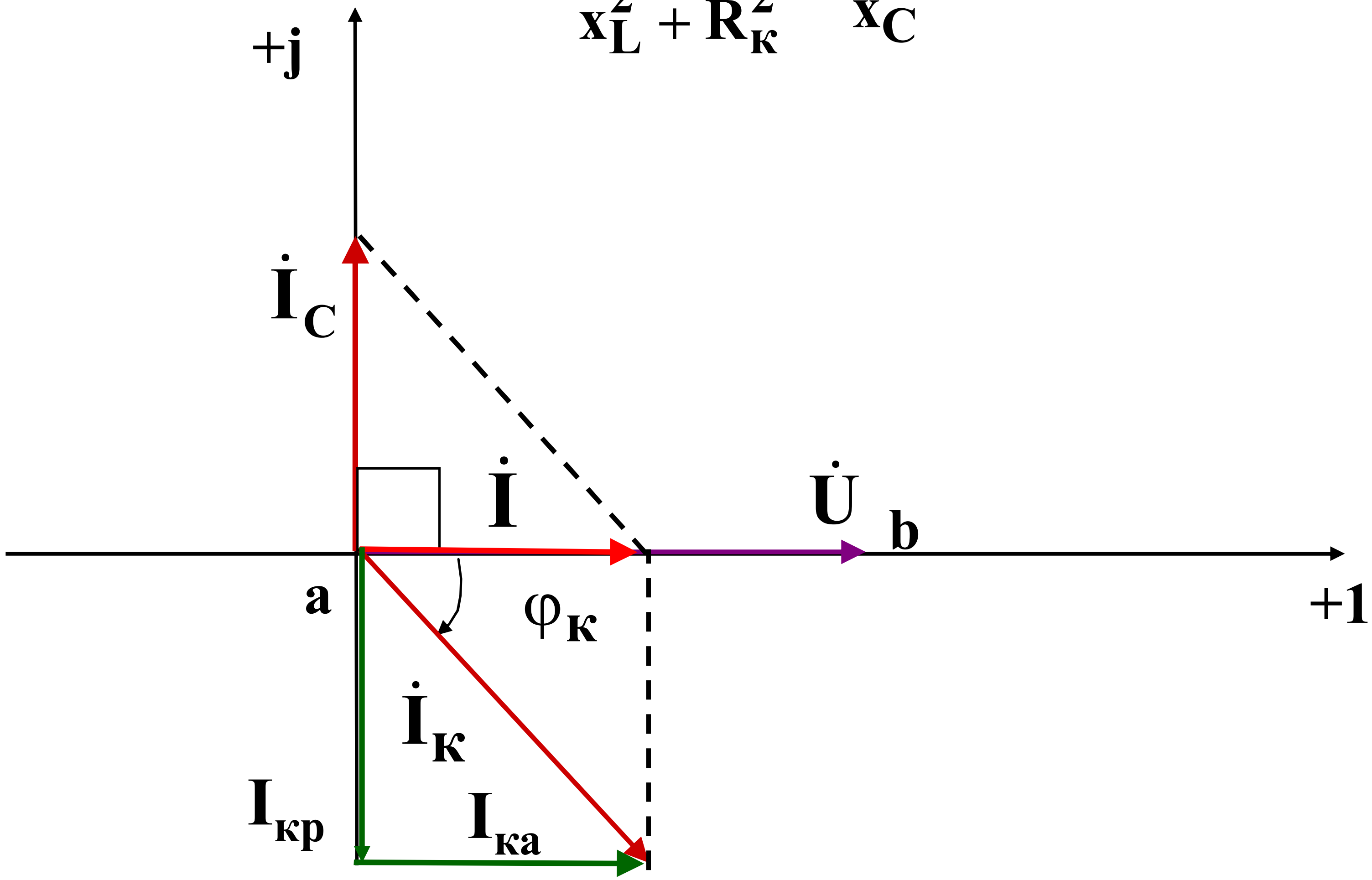
$\underline{\mathbf{Y}}$ – комплекс входной проводимости цепи



$$\varphi_К = \mathrm{arctg}\frac{x_L}{R_К}$$

Резонанс токов – резонанс при параллельно соединенных емкости и индуктивности

$$\frac{x_L}{x_L^2 + R_к^2} = \frac{1}{x_C}$$ - условие резонанса



При резонансе токов входная проводимость цепи и входной ток **минимальны**

Используется в радиотехнике для ослабления сигналов определенной частоты и в электроэнергетике для уменьшения потерь энергии в проводах линии и увеличении коэффициента мощности (включить параллельно приемнику с большой индуктивной составляющей тока батарею конденсаторов).

$$\cos\varphi = \frac{P}{S}$$