

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Е.Б. Шандарова

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

Часть 1

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2009

УДК 621.3.01(0.75.8)

ББК 31.21я73

Э88

Шандарова Е.Б.

Э 88 Теоретические основы электротехники: учебное пособие /
Е.Б. Шандарова. – Томск: Изд-во Томского политехнического
университета, 2009. – 111 с.

В пособии изложены основные положения теории и методы решения задач по следующим разделам: цепи постоянного тока, цепи однофазного синусоидального и трехфазного токов, несинусоидальные токи и четырехполюсники.

Для указанных разделов приведены решения типовых задач, а также даны тестовые вопросы и задачи для самостоятельной проверки студентами полученных знаний. Пособие предназначено для иностранных студентов.

УДК 621.3.01(075.8)

ББК 31.21я73

Рецензенты

© Шандарова Е.Б., 2009

© Томский политехнический университет, 2009

© Оформление. Издательство Томского
политехнического университета, 2009

Введение

Основу современной техники составляют электромагнитные механизмы, устройства и приборы. Электромагнитные процессы и явления, сопровождающие работу электротехнических устройств, полностью описываются системой уравнений Максвелла. Решение этих уравнений даже для сравнительно простых электромагнитных систем представляет собой сложную и трудоемкую задачу. Как показывает практика, далеко не всегда необходимо учитывать всю сложность физических процессов, происходящих в электротехнических устройствах. Это в первую очередь относится к устройствам, состоящим из элементов, концентрирующих электрические и магнитные поля в ограниченном пространстве (накопители энергии). Поэтому при определенных допущениях, когда в системе можно выделить отдельно элементы, связанные только с одним видом поля, можно отказаться от исследования электромагнитного поля и решать задачу, рассматривая систему как электрическую цепь, которая, в отличие от электромагнитной системы, описывается не векторами поля \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} , \vec{H} , а интегральными величинами – электрическим напряжением u , током i , зарядом q и магнитным потоком Φ .

1. Основные элементы и законы электрических цепей

Новые слова и словосочетания

электрическая цепь	мощность	ветвь
электрический ток	резистор	узел
двухполюсник	резистивный элемент	контур
амперметр	конденсатор	граф
потенциал	емкостной элемент	дерево графа
напряжение	индуктивная катушка	сечение
вольтметр	индуктивный элемент	хорда
электродвижущая сила	источник ЭДС	закон Ома
энергия электрического поля	источник тока	законы Кирхгофа
диэлектрик	пластина	

1.1. Основные величины, характеризующие электрическую цепь

Электрической цепью называется совокупность устройств, предназначенных для прохождения электрического тока.

Электрический ток в проводнике – это направленное движение электрических зарядов.

Численно электрический ток определяется как скорость изменения заряда q [Кл] во времени и измеряется в амперах [А]:

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

Электрический ток может быть постоянным или переменным, т.е. изменяющимся во времени. За положительное направление тока принимается движение положительных зарядов от плюса к минусу. Направление тока обычно выбирается произвольно и указывается

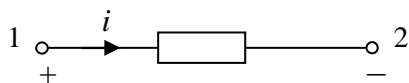


Рис. 1.1

стрелкой (рис. 1.1).

Для измерения силы тока используется амперметр, который включается последовательно в цепь, как показано на рис. 1.2. В расчетах внутреннее сопротивление амперметра будем принимать равным нулю.



Рис. 1.2

Ток возникает под влиянием электрического поля, которое, действуя на электроны, приводит их в движение. Энергетической характеристикой любой точки поля является потенциал.

Потенциал точки – это потенциальная энергия, которой обладает единичный положительный заряд, помещенный в данную точку.

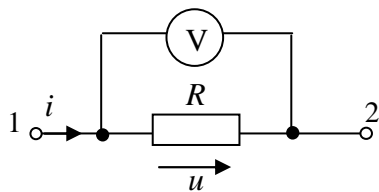


Рис. 1.3

Разность потенциалов между двумя точками электрического поля называется напряжением u .

Например, напряжение на участке цепи (рис. 1.1) запишется в виде: $u = \varphi_1 - \varphi_2$, где φ_1, φ_2 – потенциалы точек 1 и 2.

Напряжение – это энергия, которая затрачивается на перемещение единичного положительного заряда из одной точки в другую. Напряжение и потенциал измеряются в вольтах [В].

Разность потенциалов на концах сопротивления принято называть «падением напряжения». Положительное направление падения напря-

жения совпадает с положительным направлением тока, текущего через это сопротивление (рис. 1.3). Стрелка падения напряжения обычно на схемах не указывается.

Напряжение измеряют с помощью приборов, называемых вольтметрами. Вольтметр подключают к тем двум точкам, между которыми нужно измерить напряжение (рис. 1.3). Внутреннее сопротивление вольтметра достаточно велико, в расчетах будем принимать его равным бесконечности.

Энергия электрического поля [Дж] – это энергия, затраченная на перемещение заряда q на участке цепи с напряжением u к моменту времени t :

$$W_{\text{эл}} = \int_{-\infty}^t u dq = \int_{-\infty}^t u i dt.$$

Мощность – это скорость изменения энергии во времени [Вт]:

$$p = \frac{dW_{\text{эл}}}{dt} = ui.$$

1.2. Источники и приемники электромагнитной энергии

Основными элементами электрической цепи являются **источники электромагнитной энергии** и **приемники** этой энергии.

Источники – это устройства, в которых различные виды энергии преобразуются в электромагнитную.

Примеры источников:

- генератор – преобразование механической энергии в электромагнитную;
- электрическая батарея – преобразование химической энергии в электромагнитную.

Приемники разделяют на потребители и накопители.

Потребители – это устройства, в которых электромагнитная энергия превращается в другие виды энергии.

Примеры потребителей:

- лампы накаливания – преобразование электромагнитной энергии в энергию фотонов света;
- нагреватели – преобразование электромагнитной энергии в тепло;
- электродвигатели – преобразование электромагнитной энергии в механическую.

Накопители накапливают и затем отдают обратно в цепь электромагнитную энергию.

Пример накопителей: конденсаторы и катушки индуктивности.

Любая часть электрической цепи, имеющая два зажима называется **двухполюсником** (рис.1.4). Различают активные и пассивные двухполюсники.

Активным называют двухполюсник, содержащий источники электрической энергии (рис. 1.4, а). **Пассивный** двухполюсник не содержит источников (рис. 1.4, б).



Рис. 1.4

Каждый источник электрической энергии характеризуется **электродвижущей силой** – ЭДС.

ЭДС – это работа сторонних сил источника, затраченная на перемещение единичного положительного заряда внутри источника от меньшего потенциала к большему.

При расчете и анализе электрической цепи ее заменяют схемой замещения, которая, при определенных условиях, отображает свойства реальной цепи. Схемы замещения состоят из активных и пассивных элементов. Это идеальные элементы, математическое описание которых отражает процессы, происходящие в цепи. С помощью определенных комбинаций этих элементов можно составить схемы замещения источников и приемников энергии.

Активными элементами считаются источники ЭДС и источники тока. К **пассивным** элементам относятся резистивные элементы, индуктивные и емкостные элементы.

В данной части курса мы будем изучать расчет линейных электрических цепей. **Линейная цепь** характеризуется линейными уравнениями для токов и напряжений. Это происходит, когда характеристики элементов линейны.

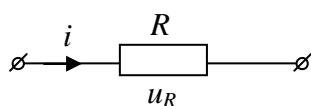


Рис. 1.5

Резистивный элемент необратимо преобразует электромагнитную энергию в тепло. Условное обозначение показано на рис. 1.5, где R – сопротивление, характеризующее способность элемента препятствовать протеканию тока.

Величина $g = \frac{1}{R}$ называется **проводимостью**. Сопротивление R измеряется в Омах [Ом], проводимость g – в Сименсах [См].

Мгновенная мощность, поступающая в сопротивление, равна

$$p = u_R \cdot i = R \cdot i^2 = g \cdot u_R^2.$$

Электрическая энергия, поступившая в сопротивление R и превращенная в тепло, начиная с некоторого момента времени, например $t=0$, до рассматриваемого момента t , вычисляется по формуле

$$W_{\text{эл}} = \int_0^t p dt = \int_0^t R \cdot i^2 dt.$$

В случае постоянного тока $i=I$, энергия запишется в виде

$$W_{\text{эл}} = R \cdot I^2 \cdot t.$$

Связь между током i и падением напряжения u_R на сопротивлении определяется **законом Ома**:

$$u_R = i \cdot R.$$

Впервые (для металлов) его установил немецкий ученый Георг Ом в 1826 г. Этот закон является одним из основных законов электротехники.

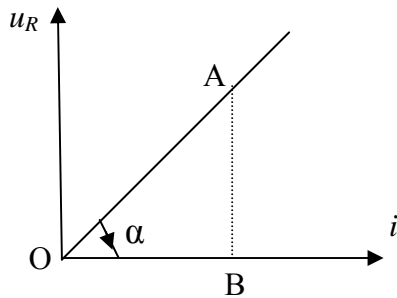


Рис. 1.6

Вольт-амперная характеристика (ВАХ) — это зависимость напряжения на сопротивлении от силы тока, проходящего через это сопротивление (рис. 1.6). Очевидно, что величина линейного сопротивления R пропорциональна тангенсу угла наклона вольт-амперной характеристики к оси тока:

$$R = \frac{u_R}{i} = \frac{m_u \cdot AB}{m_i \cdot OB} = \frac{m_u}{m_i} \cdot \text{tg}\alpha,$$

где m_u и m_i — масштабы напряжения, В/мм, и тока, А/мм.

Емкостной элемент — это элемент, приближенно заменяющий конденсатор, в котором накапливается энергия электрического поля:

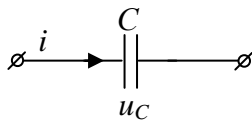


Рис. 1.7

$$W_{\text{эл}} = \frac{C \cdot u_C^2}{2}.$$

Конденсатор состоит из двух токопроводящих пластин, разделенных слоем диэлектрика.

Условное изображение емкостного элемента представлено на рис. 1.7. Параметром емкостного элемента является емкость.

Емкость $C = \frac{q}{u_C}$ — это коэффициент пропорциональности между зарядом пластины конденсатора и напряжением между его пластинами.

Емкость измеряется в Фарадах (Ф). В линейных цепях емкость постоянна.

Связь между током и напряжением на емкостном элементе выражается формулами:

$$i = C \frac{du_C}{dt}, \quad u_C = \frac{1}{C} \int i dt.$$

Когда ток положителен, в емкостной элемент поступает электрическая энергия из внешней цепи. Когда ток отрицателен, то энергия, ранее накопленная в электрическом поле, возвращается во внешнюю цепь.

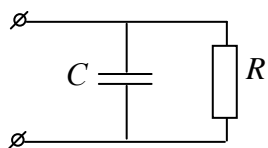


Рис. 1.8

Используя уже известные нам элементы, можно составить схему замещения реального конденсатора (рис. 1.8), где R – внутреннее сопротивление конденсатора.

Пример 1.1. Определить закон изменения тока, текущего через емкостной элемент на интервале времени $1 \leq t < 2$ с, если приложенное напряжение известно и $C = 1$ Ф.

Решение. Согласно рис. 1.9 закон изменения напряжения на емкостном элементе задан в виде графика. Запишем для него уравнение прямой для интервала времени $1 \leq t < 2$: $u_C(t) = -2t + 4$.

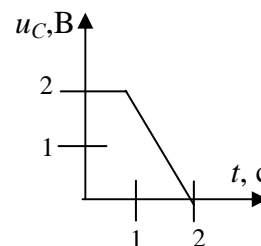


Рис. 1.9

Тогда ток определится как

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = 1 \frac{d(-2t + 4)}{dt} = -2 \text{ А.}$$

Индуктивный элемент – это элемент, приближенно заменяющий индуктивную катушку, в котором накапливается энергия магнитного поля:

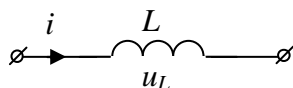


Рис. 1.10

$$W_M = \frac{Li^2}{2}.$$

Условное изображение индуктивного элемента представлено на рис. 1.10. Параметром элемента является индуктивность. Индуктивность измеряется в Генри [Гн] и в линейных цепях является постоянной величиной.

Индуктивность L – это коэффициент пропорциональности между потокосцеплением и током, текущим через катушку: $L = \frac{\Psi}{i}$.

Потокосцеплением Ψ называется сумма произведений магнитных потоков на числа витков катушки, с которыми они сцеплены. Если все витки пронизываются одним и тем же магнитным потоком, то пото-

косцепление равно произведению магнитного потока Φ на число витков w :

$$\psi = \Phi \cdot w.$$

Потокосцепление измеряется в Веберах [Вб].

На основании закона электромагнитной индукции Фарадея–Максвелла изменение потокосцепления вызывает *электродвижущую силу (ЭДС) самоиндукции*, которая выражается формулой

$$e_L = -\frac{d\psi}{dt}. \quad (1.1)$$

По закону Ленца эта ЭДС противодействует изменению потокосцепления, что и учитывается знаком минус в (1.1).

Если индуктивность не зависит от тока, то формула (1.1) принимает вид

$$e_L = -L \frac{di}{dt}.$$

Величина

$$u_L = -e_L = L \frac{di}{dt}$$

называется падением напряжения в индуктивном элементе или напряжением на индуктивности. Тогда ток, текущий через элемент определяется как $i = \frac{1}{L} \int u_L dt$.

Пример 1.2. Напряжение на индуктивности с момента $t \geq 0$ становится постоянным. Определить закон изменения тока если $i(0) = 0$.

Решение. Так как напряжение становится постоянным, то можно записать $u_L(t) = U = const$, тогда закон изменения тока запишется в виде

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt = \frac{1}{L} \int_0^t U dt = \frac{Ut}{L}.$$

На рис. 1.11 представлена схема замещения реальной индуктивной катушки, где R – сопротивление провода катушки.

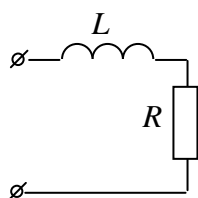


Рис. 1.11

Представление о резистивном, емкостном и индуктивном элементах основано на предположении, что тепловые потери, магнитное поле и электрическое поле сосредотачиваются в отдельных, не зависящих друг от друга элементах цепи. Раздельное рассмотрение этих элементов представляет приближенный метод исследования цепи. В действительности тепловые

потери, обусловленные током, магнитные и электрические поля сопутствуют друг другу.

Источник ЭДС – это источник, ЭДС e которого не зависит от величины протекающего через него тока и внутреннее сопротивление $R_{вн}$ которого равно нулю.

При этом напряжение на зажимах источника ЭДС $u = e$ не изменяется при изменении тока i от нуля до номинального. На рис. 1.12, а показано условное изображение источника ЭДС. Внешняя характеристика $u = f(i)$ источника ЭДС при $e = const = E$ представлена на рис. 1.12, б.

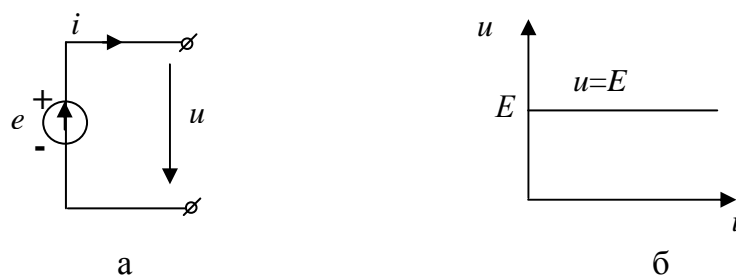


Рис. 1.12

Источник тока J – это источник, который дает ток, не зависящий от напряжения на его зажимах. Внутреннее сопротивление источника тока равно бесконечности.



Рис. 1.13

На рис. 1.13, а приведено условное изображение источника тока, а на рис. 1.13, б внешняя характеристика при $J = const$.

Стрелка источника ЭДС (рис. 1.12, а) указывает точку более высокого потенциала. Предполагается, что источник вырабатывает энергию, поэтому ток внутри него течет от точки более низкого к точке более высокого потенциала. При этом мощность источника ЭДС равна:

$$p_e = e \cdot i.$$

Двойная стрелка источника тока (рис. 1.13, а) указывает направление этого тока. Полярность напряжения u_J соответствует случаю, когда источник вырабатывает энергию. Поэтому у источника тока стрелка

указывает точку более высокого потенциала, а его мощность определится как

$$p_J = u_J \cdot J.$$

Активные и пассивные элементы применяются для составления схем замещения источников электромагнитной энергии. На рис. 1.14 представлены схемы замещения аккумулятора (а – с источником ЭДС, б – с источником тока).

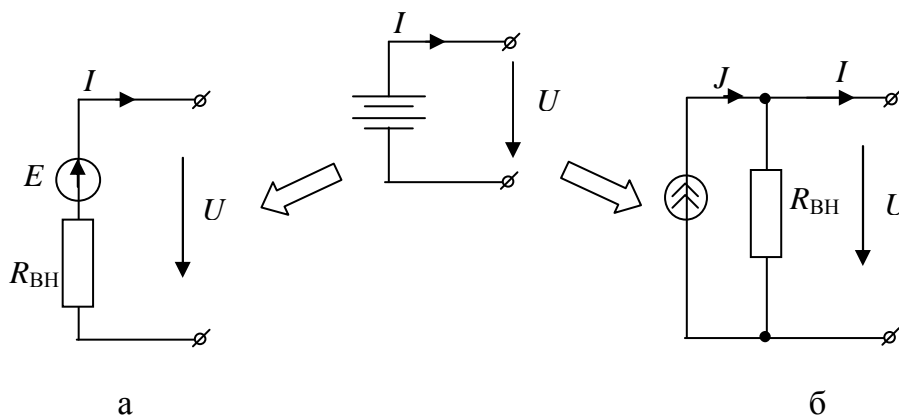


Рис. 1.14

1.3. Топологические понятия электрической цепи

Схема – это графическое изображение электрической цепи.

Ветвь – это часть схемы, содержащая один или несколько последовательно соединенных элементов.

При **последовательном** соединении через все элементы протекает один и тот же ток (рис. 1.15). При этом общее эквивалентное сопротивление ветви равно $R_{\text{экв}} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$.

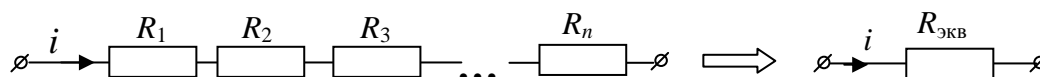


Рис. 1.15

Узел – это место соединения трех или большего числа ветвей (узлы обозначаем буквами). Ветви, присоединенные к одной паре узлов, называются **параллельными**. Параллельные ветви находятся под общим напряжением (рис. 1.16).

При параллельном соединении ветвей общее эквивалентное сопротивление рассчитывается по формуле

$$\frac{1}{R_{\text{экв}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots$$

Если n параллельно соединенных резисторов имеют одинаковые сопротивления R , то их эквивалентное сопротивление равно $R_{\text{ЭКВ}} = \frac{R}{n}$,

если параллельно соединены два элемента, то $R_{\text{ЭКВ}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$.

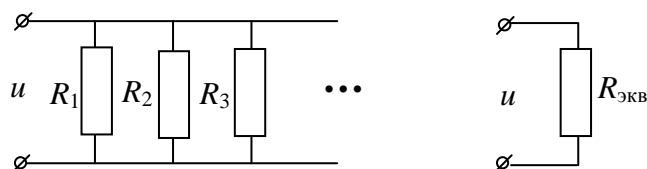


Рис. 1.16

Если два узла соединены проводником без сопротивления, то их потенциалы одинаковы, так что эту пару узлов можно рассматривать как один узел и обозначать одной буквой (например, на рис. 1.17 узлы b_1 и b_2 можно рассматривать как один узел b).

Пример электрической схемы, содержащей семь ветвей (2 ветви, соединяющие узлы ba , а также ветви, соединяющие узлы ac , ad , bc , cd , bd) и четыре узла (a , b , c , d), представлен на рис. 1.17.

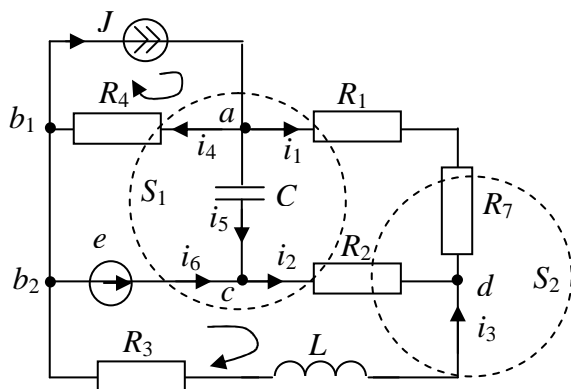


Рис. 1.17

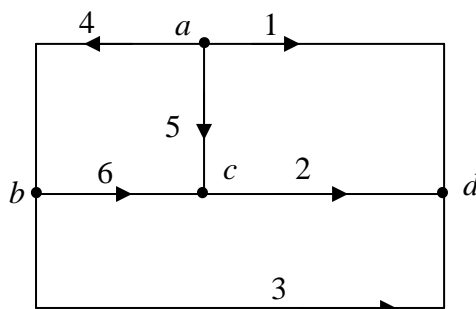


Рис. 1.18

Контур – это замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям (например, $acda$).

Сечение – это замкнутый путь, не проходящий по ветвям, но пересекающий их (S_1, S_2).

Граф – это изображение схемы в виде линий (ветвей) и точек (узлов). Стрелки на графе показывают направления токов в ветвях. При построении графа источники ЭДС закорачиваются (т.к. их внутреннее сопротивление равно нулю), а ветви с источниками тока не изображаются (внутреннее сопротивление равно бесконечности).

Дерево – это часть графа, соединяющая все узлы, но ни одного контура. Один и тот же граф схемы может иметь различные деревья.

Хорды – это ветви, которые дополняют дерево до графа. На рис.

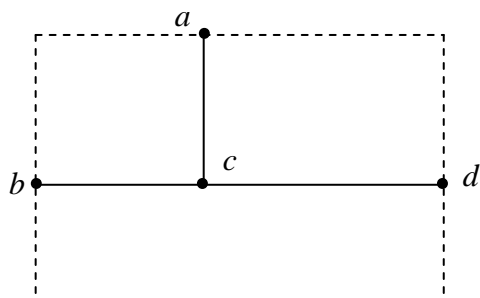


Рис. 1.19

1.18 изображен граф, для схемы рис. 1.17, а на рис. 1.19 сплошными линиями показано одно из деревьев этого графа, а пунктирными – хорды.

Независимый контур – это контур, который состоит из ветвей дерева и только одной хорды. Для выбранного графа главными контурами будут: $abca$, $acda$, $bcd b$.

1.4. Законы Кирхгофа

Законы Кирхгофа были установлены экспериментально Густавом Робертом Кирхгофом в 1845 году. Ему был 21 год.

Первый закон Кирхгофа: алгебраическая сумма токов в узле равняется нулю (токи, вытекающие из узла, считаются положительными, а втекающие – отрицательными):

$$\sum (\pm i_k) = 0.$$

Этот закон характеризует непрерывность электрического тока. Если схема имеет N узлов, то по первому закону Кирхгофа можно записать $N-1$ независимых уравнений.

Запишем уравнение для узла c (рис. 1.17): $i_2 - i_6 - i_5 = 0$.

Второй закон Кирхгофа: в контуре алгебраическая сумма падений напряжения на пассивных элементах равна алгебраической сумме ЭДС и напряжений на зажимах источников тока.

Со знаком “плюс” берутся все слагаемые, положительное направление которых совпадает с выбранным обходом контура:

$$\sum_{k=1}^n \pm u_k = \sum_{k=1}^m \pm e_k \pm \sum_{k=1}^d u_{jk},$$

где n – количество пассивных элементов в контуре, m – количество источников ЭДС, d – количество источников тока. Закон характеризует равновесие напряжений в электрической цепи.

По второму закону Кирхгофа можно записать $M-N+1$ независимых уравнений, где M – число ветвей в схеме.

Для примера запишем уравнение для контура $bcd b$, обозначив выбранное направление обхода стрелкой (рис. 1.17):

$$u_2 - u_L - u_3 = e.$$

Выразив падения напряжения на пассивных элементах через токи, получим

$$i_2 R_2 - L \frac{di_3}{dt} - i_3 R_3 = e.$$

Если в контур попадает источник тока, то напряжение на нем учитывается со знаком «плюс», если направление обхода контура совпадает с двойной стрелкой источника тока. Например, для контура *bab*:

$$i_4 R_4 = u_J.$$

Тест для самоконтроля

1. Потенциальная энергия, которой обладает единичный положительный заряд, помещенный в данную точку это ...
а) напряжение б) мощность в) потенциал г) ЭДС
2. Разность потенциалов между двумя точками это ...
а) напряжение б) мощность в) потенциал г) ЭДС
3. Амперметр включается в схему ...
а) последовательно б) параллельно
4. Вольтметр включается в схему ...
а) последовательно б) параллельно
5. Внутреннее сопротивление источника ЭДС (идеального) равно ...
а) нулю б) бесконечности в) конечной величине г) зависит от тока
6. Внутреннее сопротивление источника тока равно ...
а) нулю б) бесконечности в) конечной величине г) зависит от тока
7. Мгновенная мощность, поступающая в резистивный элемент равна ...
а) $i^2 R$ б) $R^2 i$ в) $u_R g^2$ г) u_R / i
8. Найдите неправильно записанную формулу
а) $W_{эл} = \frac{C \cdot u_C^2}{2}$ б) $u_C = C \int i dt$ в) $u_L = L \frac{di}{dt}$ г) $C = \frac{q}{u_C}$
9. Сколько независимых уравнений нужно записать по второму закону Кирхгофа если схема имеет 6 узлов и 10 ветвей?
а) 5 б) 16 в) 4 г) 10
10. Изменится ли граф схемы, если в одну из ее ветвей включить источник ЭДС?
а) да б) нет

Ответы: 1-в; 2-а; 3-а; 4-б; 5-а; 6-б; 7-а; 8-б; 9-а; 10-б

Задачи к теме 1

1.	<p>Найти эквивалентное сопротивление относительно зажимов «ab».</p> <p>$R_1 = 10\text{ Ом}$, $R_2 = 28\text{ Ом}$, $R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 30\text{ Ом}$.</p>	
2.	<p>Найти эквивалентное сопротивление относительно зажимов «ab». Сопротивления на схеме даны в Омах.</p>	
3.	<p>С момента $t \geq 0$ напряжение на емкости изменяется по закону $u_C(t) = U_0 e^{\alpha t}$. Определить закон изменения тока.</p>	
4.	<p>Определить токи в цепях и указать, для какой из цепей ток определен неправильно?</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>1.</p> <p>$U = 10\text{ В}$ $E = 20\text{ В}$ $R = 5\text{ Ом}$ $I = 2\text{ А}$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>2.</p> <p>$U = 10\text{ В}$ $E = 20\text{ В}$ $R = 5\text{ Ом}$ $I = -6\text{ А}$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>3.</p> <p>$U = 20\text{ В}$ $E = 10\text{ В}$ $R = 5\text{ Ом}$ $I = 6\text{ А}$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>4.</p> <p>$U = 20\text{ В}$ $E = 20\text{ В}$ $R = 5\text{ Ом}$ $I = 8\text{ А}$</p> </div> </div>	
5.	<p>Определить R_0 и падение напряжения на R_2, если $E = 70\text{ В}$, $U = 30\text{ В}$, $R_1 = 10\text{ Ом}$, $R_2 = 38\text{ Ом}$, $U_1 = 20\text{ В}$.</p>	
<p>Ответы: 1) 14 Ом; 2) 25 Ом; 3) $i(t) = C\alpha U_0 e^{\alpha t}$; 4) 4; 5) $R_0 = 20\text{ Ом}$, $U_2 = 76\text{ В}$</p>		

2. Методы расчета и свойства линейных электрических цепей

Новые слова и словосочетания

контурный ток	эквивалентные преобразования
узловой потенциал	закоротка
эквивалентный генератор	холостой ход
опорный узел	короткое замыкание

Методы расчета рассмотрим применительно к линейным цепям с постоянными источниками.

Если через индуктивный элемент течет постоянный ток I , то напряжение $U_L = L \frac{dI}{dt} = 0$. Следовательно, индуктивный элемент на схеме можно заменить закороткой (рис. 2.1, а). Если на емкостной элемент подать постоянное напряжение, то ток $i = C \frac{dU_C}{dt} = 0$, т.е. через емкостной элемент постоянный ток не течет (рис. 2.1, б).

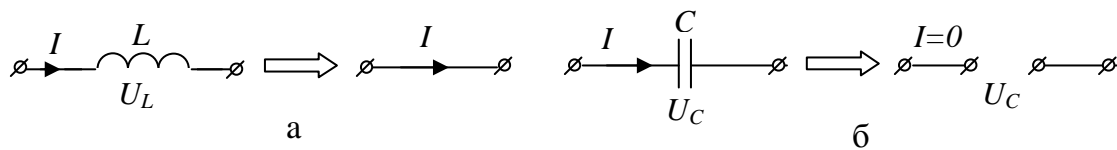


Рис. 2.1

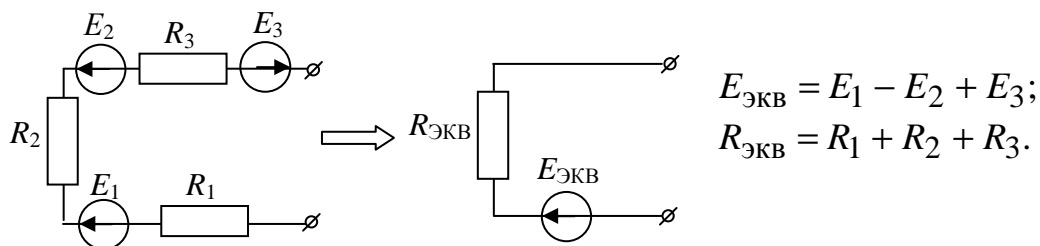
Таким образом, при рассмотрении электрической цепи постоянного тока в установившемся режиме пассивными элементами схемы будут являться резистивные элементы, а активными – постоянные источники ЭДС или источники тока. Индуктивные и емкостные элементы учитываются в схемах цепей переменного тока и при переходных процессах.

2.1. Метод эквивалентного преобразования

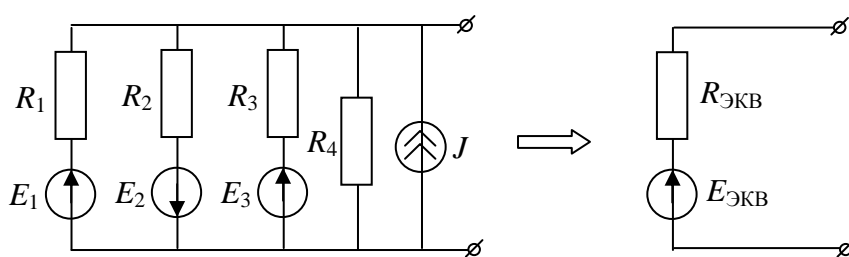
Эквивалентные преобразования используются для упрощения схем замещения. Преобразование считается эквивалентным, если токи и напряжения в не преобразованной части схемы не изменяются. Справедливость преобразований доказывается с использованием законов Ома и Кирхгофа.

Рассмотрим часто встречающиеся случаи преобразования электрических схем.

Последовательное соединение ЭДС и сопротивлений



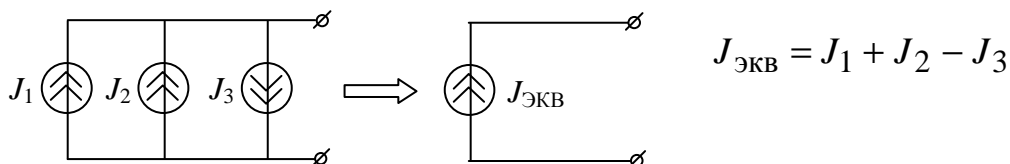
Параллельное соединение активных ветвей



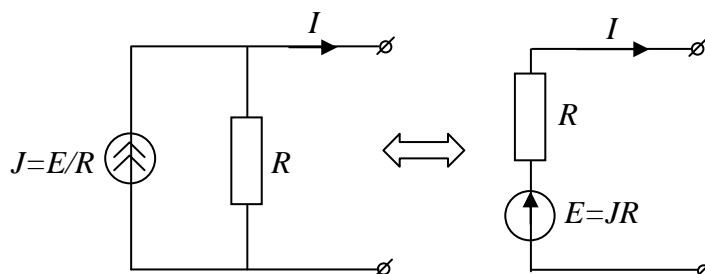
$$E_{\text{ЭКВ}} = \frac{E_1 g_1 - E_2 g_2 + E_3 g_3 + J}{g_{\text{ЭКВ}}};$$

$$g_{\text{ЭКВ}} = g_1 + g_2 + g_3 + g_4 = \frac{1}{R_{\text{ЭКВ}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}.$$

Параллельное соединение источников тока



Преобразование источника тока в источник ЭДС и обратное преобразование



Преобразование «треугольника» в «звезду» и обратное преобразование

Соединение трех сопротивлений, имеющее вид звезды (рис. 2.2, а) называется «звезда», а соединение трех сопротивлений так, что они образуют собой стороны треугольника (рис. 2.2, б), называется «треугольник».

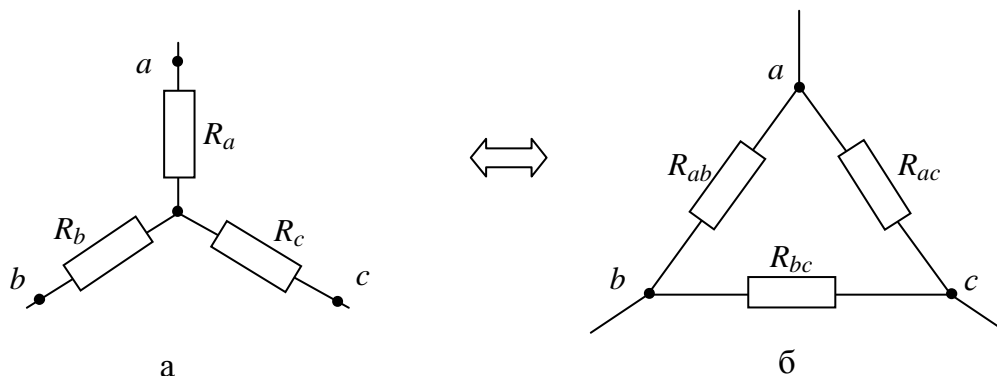


Рис. 2.2

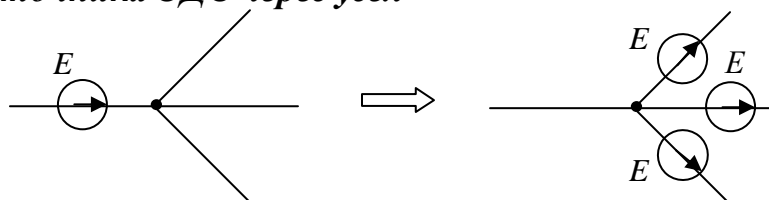
Формулы преобразования «треугольника» в «звезду»

$$R_a = \frac{R_{ab} R_{ac}}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}}; \quad R_b = \frac{R_{ab} R_{bc}}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}}; \quad R_c = \frac{R_{ac} R_{bc}}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}}.$$

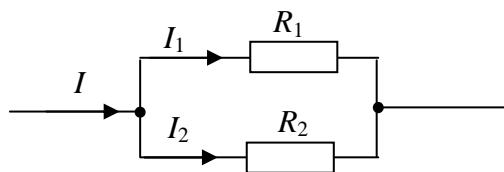
Формулы преобразования «звезды» в «треугольник»

$$R_{ab} = R_a + R_b + \frac{R_a R_b}{R_c}; \quad R_{bc} = R_b + R_c + \frac{R_b R_c}{R_a}; \quad R_{ac} = R_a + R_c + \frac{R_a R_c}{R_b}.$$

Перенос источника ЭДС через узел



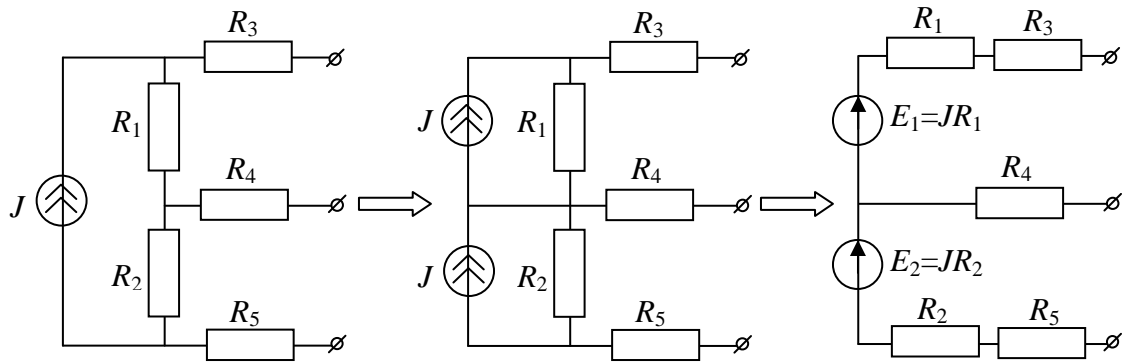
Правило распределения токов в двух параллельных ветвях



Если известен общий ток I и параллельные ветви не содержат источников, то их токи могут быть найдены по формулам:

$$I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}; \quad I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Устранение контура источника тока



Пример 2.1. В схеме, изображенной на рис. 2.3, а определить ток I_5 методом преобразований, если $E_1 = 140\text{В}$, $E_2 = 170\text{В}$, $J = 2\text{А}$, $R_2 = 140\text{Ом}$, $R_3 = R_4 = R_5 = 70\text{Ом}$.

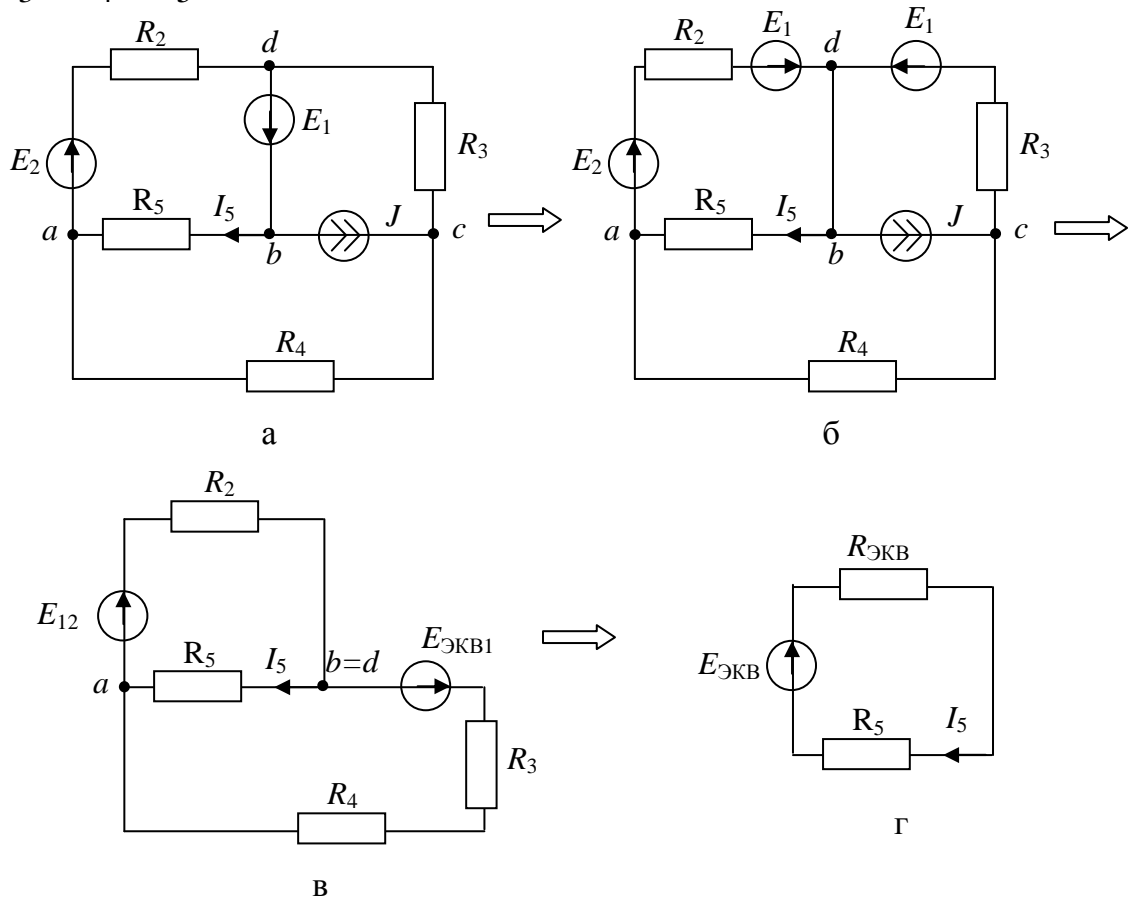


Рис. 2.3

Решение: Перенесем источник ЭДС E_1 через узел d (рис. 2.3, б), в результате узлы d и b можно рассматривать как один узел. Сложим активные ветви dc и bc параллельно

$$E_{\text{ЭКВ1}} = \left(\frac{-E_1}{R_3} + J \right) \cdot R_3 = \left(\frac{-140}{70} + 2 \right) \cdot 70 = 0 \text{ В},$$

а в ветви ad сложим последовательно ЭДС E_1 и E_2 :

$$E_{12} = E_1 + E_2 = 140 + 170 = 310 \text{ В}.$$

Преобразованная схема изображена на рис. 2.3, в. Нам осталось сложить параллельно две активные ветви по формулам:

$$R_{\text{ЭКВ}} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4}} = \frac{1}{\frac{1}{140} + \frac{1}{140}} = 70 \text{ Ом};$$

$$E_{\text{ЭКВ}} = \left(\frac{E_{12}}{R_2} - \frac{E_{\text{ЭКВ1}}}{R_3 + R_4} \right) \cdot R_{\text{ЭКВ}} = \left(\frac{310}{140} - 0 \right) \cdot 70 = 155 \text{ В}.$$

В результате преобразований мы получили одноконтурную схему (рис. 2.3, г), из которой по закону Ома легко найти ток I_5

$$I_5 = \frac{E_{\text{ЭКВ}}}{R_{\text{ЭКВ}} + R_5} = \frac{155}{70 + 70} = 1.107 \text{ А}.$$

2.2. Расчет схем с использованием законов Кирхгофа

Для того чтобы рассчитать неизвестные токи и напряжения в схеме, нужно записать систему, состоящую из уравнений, записанных по законам Кирхгофа: $N-1$ уравнений по первому закону и $M-N+1$ по второму. Например, для схемы из примера 2.1, представленной на рис. 2.4, нужно найти 5 неизвестных токов и напряжение на источнике тока U_J .

Число узлов $N=4$, число ветвей $M=6$, поэтому мы должны составить три уравнения по первому закону Кирхгофа и три по второму:

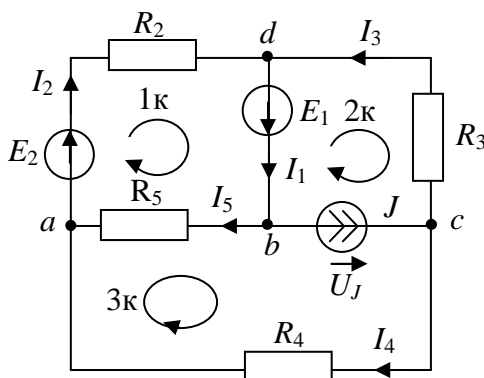


Рис. 2.4

$$a: I_2 - I_4 - I_5 = 0;$$

$$b: -I_1 + I_5 + J = 0;$$

$$c: I_3 + I_4 - J = 0;$$

$$1\text{к}: I_2 R_2 + I_5 R_5 = E_1 + E_2;$$

$$2\text{к}: -I_3 R_3 = -E_1 - U_J;$$

$$3\text{к}: I_4 R_4 - I_5 R_5 = U_J.$$

Мы получили систему из шести уравнений, решив которую можно найти все неизвестные токи и напряжение U_J .

Запишем систему в матричной форме:

$$A \cdot I = B,$$

где A – матрица коэффициентов при неизвестных токах и напряжениях; I – матрица-столбец неизвестных токов и напряжений; B – матрица-столбец источников.

Составим матрицы для записанной системы уравнений, предварительно перенеся ток J в правую часть уравнений, а U_J – в левую:

$$A = \begin{pmatrix} I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & I_5 & U_J \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & R_5 & 0 \\ 0 & 0 & -R_3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & -R_5 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -J \\ J \\ E_1 + E_2 \\ -E_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решение системы в матричной форме: $I = A^{-1} \cdot B$, где A^{-1} – обратная матрица.

Если взять исходные данные из примера 2.1 и решить систему на компьютере с помощью программы Mathcad, то получим токи $I_1 = 3.107 \text{ А}$, $I_2 = 1.661 \text{ А}$, $I_3 = 1.446 \text{ А}$, $I_4 = 0.554 \text{ А}$, $I_5 = 1.107 \text{ А}$ и напряжение $U_J = -38.75 \text{ В}$.

Следует обратить внимание, что в примере 2.1 при расчете этой же схемы методом преобразований ток I_5 также был равен 1.107 А .

Для проверки правильности расчета схемы составляется **баланс мощностей** – это равенство мощностей источников электрической энергии мощностям приемников энергии:

$$P_{\text{и}} = P_{\text{п}},$$

где $P_{\text{и}} = \sum \pm E_k I_k + \sum \pm U_{Jk} J_k$ – мощность, вырабатываемая источниками; $P_{\text{п}} = \sum I_k^2 R_k$ – мощность, потребляемая приемниками.

Произведения величины источника ЭДС в k -й ветви E_k на ток k -й ветви I_k берутся со знаком «+», если направление ЭДС и тока совпадают. Найденные токи в ветвях и напряжение на источнике тока учитываются со своими знаками.

Погрешность расчетов не должна превышать трех процентов:

$$\delta = \frac{|P_{\text{и}} - P_{\text{п}}|}{P_{\text{и}}} \cdot 100\% \leq 3\% .$$

Для схемы, представленной на рис. 2.4, баланс мощности запишется в виде:

$$P_{\text{и}} = E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + U_J \cdot J = 140 \cdot 3.107 + 170 \cdot 1.661 - 38.75 \cdot 2 = 639.8 \text{ Вт}$$

$$P_{\Pi} = I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 = 639.8 \text{ Вт.}$$

Баланс сошелся, а это значит, что расчеты сделаны верно.

2.3. Метод контурных токов

Данный метод основан на решении уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа. Метод позволяет уменьшить порядок системы уравнений.

В методе контурных токов за неизвестные токи принимают контурные токи. **Контурный ток** – это ток, текущий в независимом контуре. Следовательно, по этому методу нужно записать $M-N+1$ уравнение.

Алгоритм составления уравнений по методу контурных токов

1. Контурный ток I_{kk} , текущий в контуре k , умножается на сумму сопротивлений, принадлежащих этому контуру $\sum_i R_{ki}$.
2. К этому произведению дописываются произведения всех соседних контурных токов на общие сопротивления R_{km} – это общее сопротивление между k -м контуром и m -контуром, при этом берется знак «+», если контурные токи обтекают общее сопротивление в одном направлении, и знак «-», если их направления не совпадают.
3. В правой части уравнений записывается алгебраическая сумма ЭДС $\sum_i \pm E_{ki}$, рассматриваемого контура (с «+», учитывается ЭДС, совпадающая по направлению с контурным током I_{kk}).

Общая форма записи уравнений по методу контурных токов:

$$I_{kk} \sum_i R_{ki} + \sum_{m \neq i} \pm I_{mm} R_{km} = \sum_i \pm E_{ki}.$$

Правило: через ветвь, содержащую источник тока, должен замыкаться только один контурный ток, который будет равен току источника.

Порядок расчета

1. Обозначаются токи ветвей.
2. Выбираются контурные токи.
3. Составляется система уравнений по алгоритму.
4. Находятся контурные токи.

5. Определяются реальные токи ветвей, как алгебраическая сумма контурных токов, текущих в этих ветвях (с «+» учитываются контурные токи, совпадающие по направлению с реальным током в ветви)

В качестве примера возьмем схему рис. 2.4 и данные из примера 2.1. Данная схема имеет три независимых контура, поэтому выбираем три контурных тока I_{11}, I_{22}, I_{33} (рис. 2.5). При выборе мы учли, что через источник тока течет только один контурный ток $I_{33} = J$. Неизвестными являются контурные токи I_{11} и I_{22} . Пользуясь алгоритмом, составляем два уравнения для расчета контурных токов:

$$I_{11}(R_2 + R_5) + I_{22}R_2 - I_{33}R_5 = E_2 + E_1;$$

$$I_{22}(R_2 + R_3 + R_4) + I_{11}R_2 + I_{33}R_4 = E_2.$$

Подставляя исходные данные и помня, что $I_{33} = J = 2$ А, получаем

$$210I_{11} + 140I_{22} = 140 + 170 + 2 \cdot 70;$$

$$280I_{22} + 140I_{11} = 170 - 2 \cdot 70.$$

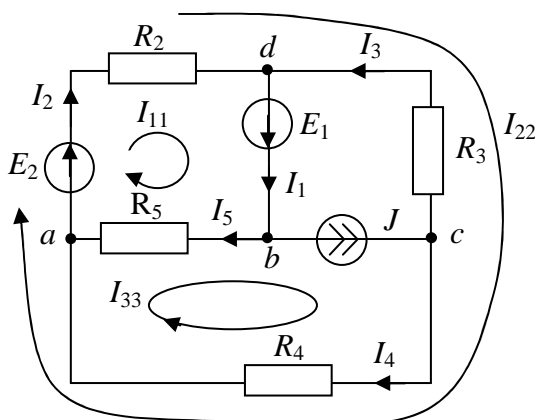


Рис. 2.5

Решая совместно эти уравнения находим контурные токи $I_{11} = 3.107$ А, $I_{22} = -1.446$ А.

Теперь через контурные токи находим реальные токи в схеме:

$$I_1 = I_{11} = 3.107 \text{ А,}$$

$$I_2 = I_{11} + I_{22} = 1.661 \text{ А,}$$

$$I_3 = -I_{22} = 1.446 \text{ А,}$$

$$I_4 = I_{22} + I_{33} = 0.554 \text{ А,}$$

$$I_5 = I_{11} - I_{33} = 1.107 \text{ А. Найденные}$$

токи совпали с токами, рассчитанными по законам Кирхгофа.

2.4. Метод узловых потенциалов

Данный метод основан на решении системы уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа. Неизвестными являются потенциалы узлов. Число уравнений на единицу меньше числа узлов схемы. Исключенный из рассмотрения узел называют **опорным**, его потенциал принимается равным нулю.

Алгоритм составления уравнений

1. Потенциал одного (любого) узла принимается равным нулю.
2. Потенциал рассматриваемого узла φ_k умножается на сумму проводимостей ветвей $\sum_i g_{ki}$, подходящих к данному узлу.
3. К этому произведению дописывается (всегда со знаком минус) произведение потенциалов всех соседних узлов на проводимости ветвей, соединяющих эти узлы с рассматриваемым $\sum_{i \neq k} \varphi_i g_{ki}$.
4. В правой части уравнений записывается алгебраическая сумма произведений ЭДС ветвей на проводимости этих же ветвей и алгебраическая сумма токов источников тока, подходящих к рассматриваемому узлу. Причем для ЭДС и токов источников тока, направленных к узлу, берется знак «+», направленных противоположно – «-».

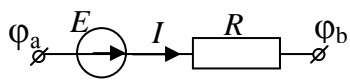
Общая форма записи уравнений по методу узловых потенциалов:

$$\varphi_k \sum_i g_{ki} - \sum_{i \neq k} \varphi_i g_{ki} = \sum_i \pm E_{ki} g_{ki} + \sum_i \pm J_{ki}.$$

Правило: проводимость ветви с источником тока равна нулю. Если в ветви, соединяющей два узла, имеется только источник ЭДС и нет других элементов, то потенциал одного из узлов принимается равным нулю, тогда потенциал другого узла известен и равен значению ЭДС.

Порядок расчета

1. Выбирается опорный узел.
2. Для остальных узлов составляются уравнения по алгоритму.
3. Из уравнений определяются потенциалы узлов.
4. Через потенциалы узлов по обобщенному закону Ома определяются токи ветвей.

Обобщенный закон Ома: $I = \frac{\varphi_a - \varphi_b + E}{R}$, 

ЭДС учитываем с «+», если ее направление совпадает с направлением тока.

Для схемы рис. 2.5 составим уравнения по методу узловых потенциалов. Данная схема имеет 4 узла. Ветвь db содержит только источник ЭДС E_1 . Поэтому выбираем в качестве опорного узла узел d . Тогда потенциал узла b известен и равен ЭДС E_1 .

Следовательно нужно найти только потенциалы узлов a и c :

$$\varphi_d = 0; \quad \varphi_b = E_1;$$

$$\begin{aligned}\varphi_a \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) - \varphi_b \frac{1}{R_5} - \varphi_c \frac{1}{R_4} &= -\frac{E_2}{R_2}; \\ \varphi_c \left(\frac{1}{\infty} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3} \right) - \varphi_a \frac{1}{R_4} - \varphi_b \frac{1}{\infty} &= J.\end{aligned}$$

Подставим данные из примера 2.1:

$$\begin{aligned}\varphi_d = 0; \quad \varphi_b = E_1 = 140 \text{ В}; \\ \varphi_a \left(\frac{1}{140} + \frac{1}{70} + \frac{1}{70} \right) - 140 \cdot \frac{1}{70} - \varphi_c \frac{1}{70} &= -\frac{170}{140}; \\ \varphi_c \left(\frac{1}{70} + \frac{1}{70} \right) - \varphi_a \frac{1}{70} &= 2.\end{aligned}$$

Решаем систему и определяем неизвестные потенциалы $\varphi_a = 62.5 \text{ В}$, $\varphi_c = 101.25 \text{ В}$. Через найденные потенциалы узлов определяем токи ветвей:

$$\begin{aligned}I_2 = \frac{\varphi_a - \varphi_d + E_2}{R_2} = 1.661 \text{ А}; \quad I_3 = \frac{\varphi_c - \varphi_d}{R_3} = 1.446 \text{ А}; \\ I_4 = \frac{\varphi_c - \varphi_a}{R_4} = 0.554 \text{ А}; \quad I_5 = \frac{\varphi_b - \varphi_a}{R_5} = 1.107 \text{ А}; \quad I_1 = I_3 + I_2 = 3.107 \text{ А}.\end{aligned}$$

Напряжение на источнике тока в схеме на рис. 2.5 может быть определено через разность потенциалов: $U_J = \varphi_c - \varphi_b = -38.75 \text{ В}$.

Полученные результаты совпали с расчетами, выполненными по методу контурных токов и по законам Кирхгофа.

2.5. Метод эквивалентного генератора

Данный метод применяется при расчете электрических цепей, когда требуется определить ток только в одной ветви. Метод основан на теореме об активном двухполюснике, согласно которой сложную цепь, содержащую источники, по отношению к ветви с искомым током, рассматривают как активный двухполюсник, состоящий из эквивалентного источника ЭДС E_{Γ} (или источника тока J_{Γ}) и эквивалентного сопротивления R_{Γ} (рис. 2.6).

Генератор с источником ЭДС (рис. 2.6, а)

В этом случае ЭДС генератора E_{Γ} равна напряжению холостого хода $U_{\text{ХХ}}$, т.е. напряжению на выходе цепи при разомкнутых зажимах «ab» ($R_k = \infty$). Внутреннее сопротивление генератора R_{Γ} равно сопротивле-

нию цепи относительно зажимов «ab». Ток ветви определяется по формуле:

$$I_k = \frac{E_\Gamma}{R_\Gamma + R_k} = \frac{U_{\text{ХХ}}}{R_\Gamma + R_k}.$$

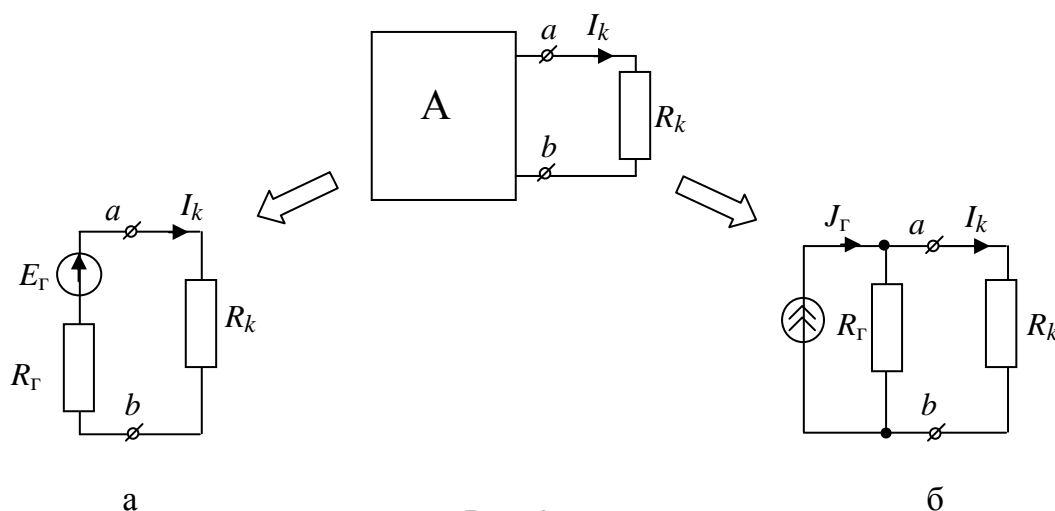


Рис. 2.6

Генератор с источником тока J_Γ (рис. 2.6, б)

Ток J_Γ равен току короткого замыкания, т.е. току ветви при $R_k = 0$. Внутреннее сопротивление генератора R_Γ равно сопротивлению цепи относительно зажимов «ab». Ток ветви определяется по формуле:

$$I_k = \frac{J_\Gamma R_\Gamma}{R_\Gamma + R_k} = \frac{J_\Gamma}{1 + \frac{R_k}{R_\Gamma}}.$$

Алгоритм расчета при замене цепи эквивалентным генератором с источником ЭДС

1. Разрывается цепь относительно выделенной ветви и любым методом определяется напряжение холостого хода $U_{\text{ХХ}} = E_\Gamma$.
2. Определяется сопротивление цепи R_Γ относительно выделенной ветви. При этом ветви с источниками тока удаляются, а источники ЭДС заменяются проводниками.
3. Определяется ток ветви: $I_k = \frac{E_\Gamma}{R_\Gamma + R_k} = \frac{U_{\text{ХХ}}}{R_\Gamma + R_k}$, где R_k – сопротивление выделенной ветви.

Алгоритм расчета при замене цепи эквивалентным генератором с источником тока

1. Сопротивление выделенной ветви заменяется проводником ($R_k = 0$) и находится ток короткого замыкания $I_{кз} = J_{\Gamma}$.
2. Определяется сопротивление цепи R_{Γ} относительно выделенной ветви. При этом ветви с источниками тока удаляются, а источники ЭДС заменяются проводниками.
3. Определяется ток ветви : $I_k = \frac{J_{\Gamma}}{1 + \frac{R_k}{R_{\Gamma}}}$, где R_k – сопротивление выделенной ветви.

Пример 2.2. Для схемы, представленной на рис. 2.5 найти ток I_5 методом эквивалентного генератора. Данные возьмем из предыдущих расчетов: $E_1 = 140\text{В}$, $E_2 = 170\text{В}$, $J = 2\text{ А}$, $R_2 = 140\text{Ом}$, $R_3 = R_4 = R_5 = 70\text{Ом}$.

Решение: Выделим ветвь с током I_5 , а остальную часть схемы заменим эквивалентным генератором с параметрами E_{Γ} и R_{Γ} .

Определим напряжение холостого хода $U_{xx} = E_{\Gamma}$. Для этого сопротивление R_5 заменяем разрывом (рис. 2.7).

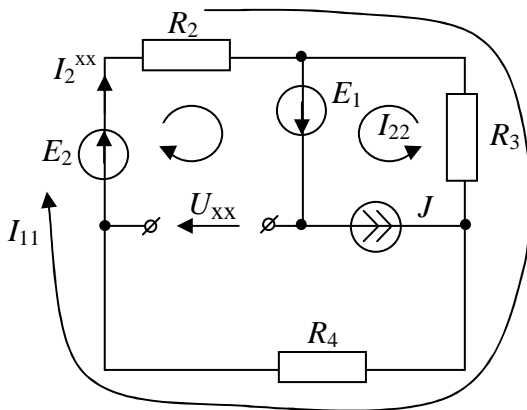


Рис. 2.7

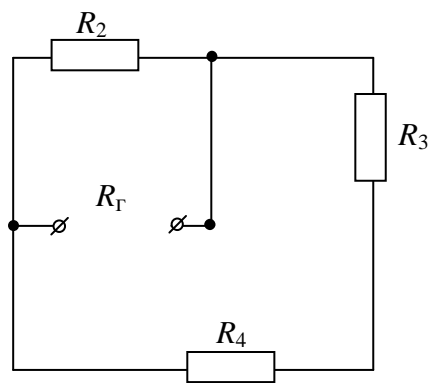


Рис. 2.8

По второму закону Кирхгофа $U_{xx} = E_1 + E_2 - I_2^{xx} R_2$. Для нахождения тока I_2^{xx} используем метод контурных токов: $I_{22} = J = 2\text{ А}$;

$$I_{11}(R_2 + R_3 + R_4) - I_{22}R_3 = E_2.$$

Подставляя данные получаем $I_{11} = \frac{170 + 2 \cdot 70}{280} = 1.107\text{ А}$,

тогда $I_2^{xx} = I_{11} = 1.107 \text{ А}$ и $U_{xx} = 155 \text{ В}$.

Для определения R_{Γ} выполним эквивалентные преобразования в схеме рис. 2.8:

$$R_{\Gamma} = \frac{(R_3 + R_4)R_2}{R_3 + R_4 + R_2} = \frac{140 \cdot 140}{280} = 70 \text{ Ом.}$$

Определяем ток ветви

$$I_5 = \frac{U_{xx}}{R_{\Gamma} + R_5} = \frac{155}{70 + 70} = 1.107 \text{ А.}$$

Ток и напряжение ветви можно определить графически. Для этого находятся напряжение холостого хода U_{xx} и ток короткого замыкания

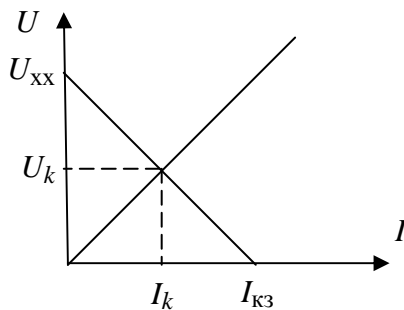


Рис. 2.9

$I_{кз}$ для этой ветви. Затем по этим двум точкам строится внешняя характеристика (рис. 2.9). В этих же координатных осях строится ВАХ $U = IR_k$, где R_k — это сопротивление ветви, в которой определяем ток. Из точки пересечения внешней и вольт-амперной характеристики опускаются перпендикуляры на оси координат и находятся ток ветви I_k и напряжение U_k .

2.6. Метод наложения

Метод наложения основан на принципе наложения.

Принцип наложения: ток любой ветви может быть найден как алгебраическая сумма частичных токов, протекающих в этой ветви.

Частичный ток — это ток, генерируемый только одним источником энергии, остальные источники исключаются из цепи (источники ЭДС заменяют проводниками, а ветви с источниками тока разрывают).

Математическая форма записи принципа наложения:

$$I_k = \sum_{i=1}^n I_k^{(i)},$$

где I_k — искомый ток k -ой ветви; $I_k^{(i)}$ — частичный ток ветви, генерируемый i -м источником, n — число источников.

Алгоритм расчета

1. Определяется число источников n .
2. Изображается n подсхем, в каждой из которых оставляется только один источник энергии.
3. В каждой подсхеме определяется частичный ток.
4. Ток ветви находится алгебраическим суммированием частичных токов подсхем. Со знаком «+» пишут частичные токи, которые совпадают по направлению с искомым током ветви, и со знаком «-», если не совпадают.

Пример 2.3. Определить ток I_2 (рис. 2.10, а) методом наложения, если $E = 90\text{ В}$, $J = 5\text{ А}$, $R_1 = 7\text{ Ом}$, $R_2 = 6\text{ Ом}$, $R_3 = 6\text{ Ом}$.

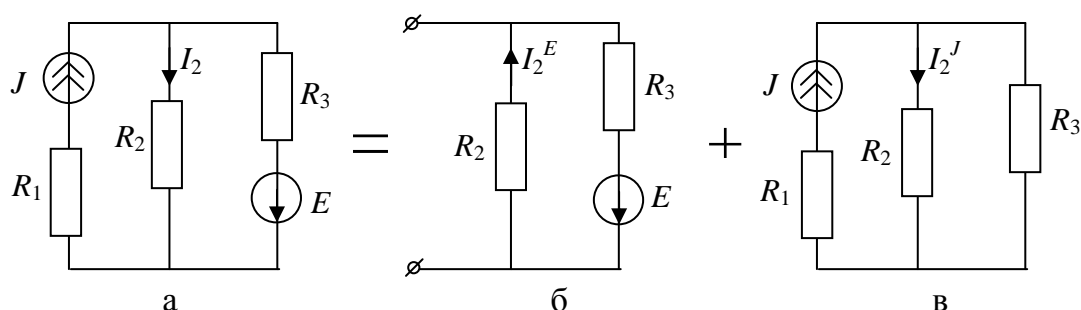


Рис. 2.10

Решение. В схеме два источника, следовательно, нужно нарисовать две подсхемы, в каждой из которых будет действовать один источник. Подсхема с источником ЭДС (ветвь с источником тока разомкнута) представлена на рис. 2.10, б. Частичный ток этой подсхемы равен

$$I_2^E = \frac{E}{R_2 + R_3} = \frac{90}{12} = 7.5\text{ А}.$$

Подсхема с источником тока (вместо источника ЭДС – коротка) представлена на рис. 2.10, в. Частичный ток определим по правилу параллельных ветвей

$$I_2^J = J \frac{R_3}{R_2 + R_3} = \frac{30}{6 + 6} = 2.5\text{ А}.$$

Ток ветви находится алгебраическим суммированием частичных токов подсхем: $I_2 = -I_2^E + I_2^J = -7.5 + 2.5 = -5\text{ А}$. Частичный ток I_2^E взят со знаком «минус», т.к. его направление не совпадает с током ветви I_2 .

2.7. Свойства линейных электрических цепей

Мы уже знаем такие свойства линейных электрических цепей, как принцип наложения и эквивалентного генератора. Рассмотрим еще несколько свойств, без доказательств. Доказательства свойств линейных электрических цепей можно найти в литературе, приведенной в заключительной части этого пособия.

Принцип взаимности: если в пассивной линейной цепи выделить две ветви ab и cd , в одну из них включить единственную ЭДС $E_{ab} = E$, а в другой измерить ток $I_{cd} = I$ (рис. 2.11, а), затем переставить ту же ЭДС во вторую ветвь ($E_{cd} = E$), а ток измерить в первой (рис. 2.11, б), то эти два тока окажутся равными ($I_{ab} = I_{cd} = I$).

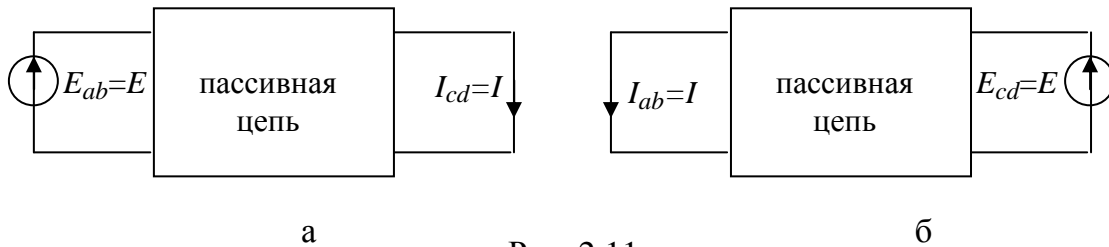


Рис. 2.11

Теорема о линейных соотношениях: если в линейной электрической цепи изменять какой-либо один параметр (ЭДС, сопротивление или ток источника тока), то любые две величины (токи или напряжения) двух любых ветвей окажутся связанными линейными зависимостями вида $y = ax + b$, где x – ток или напряжение одной ветви; y – ток или напряжение другой ветви.

Теорема компенсации: в любой электрической цепи сопротивление можно заменить ЭДС, равной падению напряжения в заменяемом сопротивлении и направленной встречно току в этом сопротивлении (рис. 2.12).

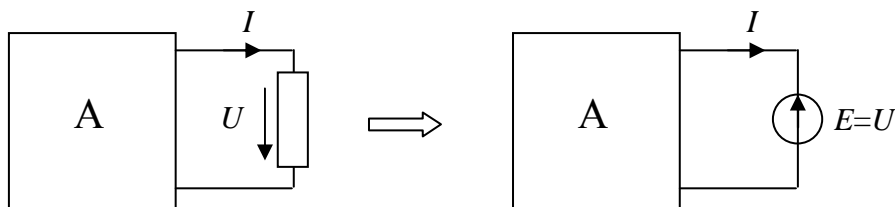


Рис. 2.12

2.8. Применение матриц к расчету линейных электрических цепей

Чтобы формализовать процесс составления уравнений, описывающих состояние цепи, применяются разные матрицы: узловая, диагональная, матрица сопротивлений и т.д. Эти матрицы удобно составлять по графу схемы, в которой нет источников тока и ветвей с сопротивлением, равным нулю. Если такие ветви имеются, то их следует исключить, используя эквивалентные преобразования.

Рассмотрим применение матрично-топологического метода для схемы, представленной на рис. 2.13, а.

Пусть $E_1 = 120\text{ В}$, $E_2 = 210\text{ В}$, $E_9 = 60\text{ В}$, $J = 2\text{ А}$, $R_1 = 25\text{ Ом}$, $R_2 = 10\text{ Ом}$, $R_3 = 8\text{ Ом}$, $R_4 = 10\text{ Ом}$, $R_5 = 34\text{ Ом}$, $R_6 = 30\text{ Ом}$, $R_7 = 20\text{ Ом}$, $R_8 = 2\text{ Ом}$.

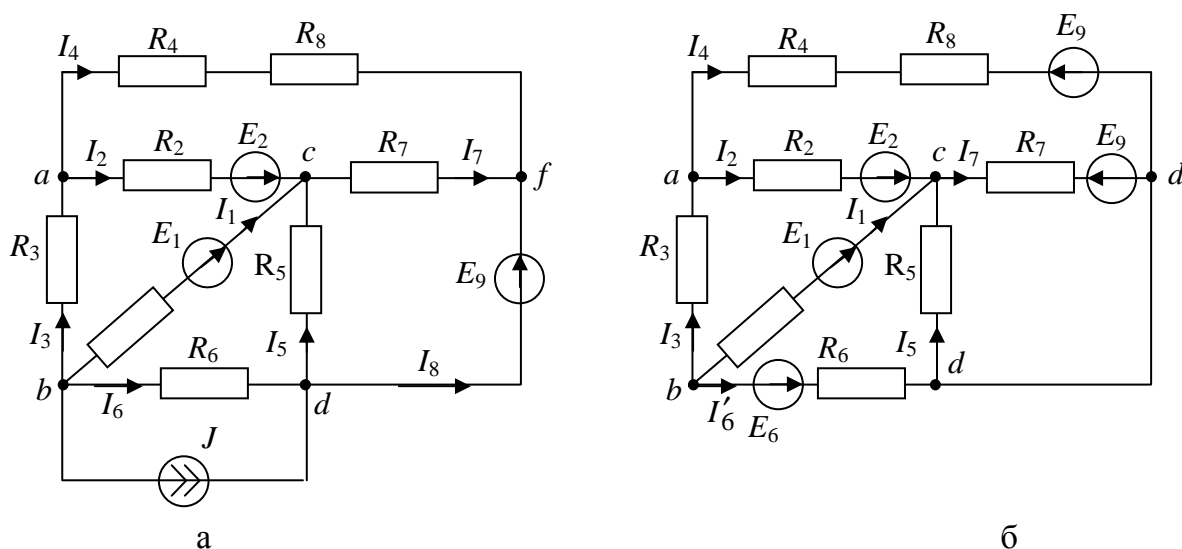


Рис. 2.13

Для составления графа этой схемы исключим из ветви ЭДС E_9 ,

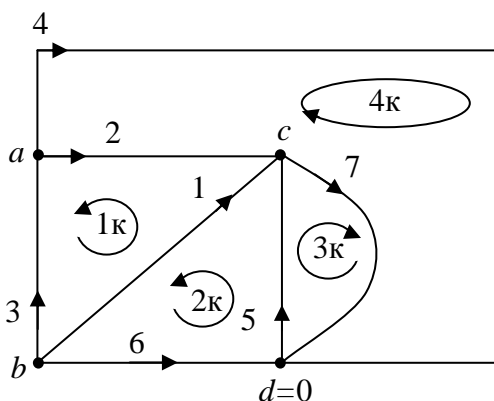


Рис. 2.14

перенеся ее через узел f . Также заменим источник тока J на источник ЭДС $E_6 = JR_6$. Преобразованная схема показана на рис. 2.13, б, где узлы d и f можно рассматривать как один узел d . Так как после преобразований ток, текущий через R_6 , изменился, то обозначим его I'_6 . На рис. 2.14 изображен граф для преобразованной схемы.

Для составления узловой матрицы нужно выбрать опорный узел.

Число столбцов узловой матрицы равно числу ветвей графа, а число строк – числу независимых узлов (все узлы, исключая опорный).

Узловая матрица A формируется по правилу: если ветвь направлена в узел, то ставим -1 ; если направлена из узла, то ставим 1 ; если ветвь не имеет связи с узлом, то ставим 0 .

Составим узловую матрицу для графа (рис. 2.14), выбрав в качестве опорного узел d :

$$\begin{array}{c}
 \text{Узлы} \\
 a \\
 b \\
 c
 \end{array}
 A = \begin{array}{c}
 \text{Ветви} \\
 \mathbf{1} \quad \mathbf{2} \quad \mathbf{3} \quad \mathbf{4} \quad \mathbf{5} \quad \mathbf{6} \quad \mathbf{7} \\
 \left(\begin{array}{ccccccc}
 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Число столбцов контурной матрицы равно числу ветвей графа, а число строк – числу независимых контуров.

Контурная матрица B составляется по правилу: если ветвь не входит в контур, то ставим 0 ; если ветвь входит в контур и направление ветви совпадает с обходом контура, то ставим 1 ; если направление ветви не совпадает с обходом контура, то ставим -1 .

На рис. 2.14 показаны направления обходов независимых контуров, для них контурная матрица запишется в виде

$$\begin{array}{c}
 \text{Контура} \\
 \mathbf{1к} \\
 \mathbf{2к} \\
 \mathbf{3к} \\
 \mathbf{4к}
 \end{array}
 B = \begin{array}{c}
 \text{Ветви} \\
 \mathbf{1} \quad \mathbf{2} \quad \mathbf{3} \quad \mathbf{4} \quad \mathbf{5} \quad \mathbf{6} \quad \mathbf{7} \\
 \left(\begin{array}{ccccccc}
 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Связь между узловой и контурными матрицами определяется формулами

$$B \cdot A^T = 0, \quad A \cdot B^T = 0.$$

Составим **диагональную** (остальные элементы равны нулю) **матрицу сопротивлений ветвей R** и **матрицу ЭДС ветвей E** , причем ЭДС

записывается со знаком «+» если ее стрелка совпадает с направлением ветви.

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 + R_8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_7 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ 0 \\ -E_9 \\ 0 \\ J \cdot R_6 \\ -E_9 \end{pmatrix}.$$

Метод контурных токов на основе матрично-топологического метода

Рассчитаем токи в схеме рис. 2.13, б. Для этого нам будут нужны контурная, диагональная и матрица ЭДС.

Контурные токи в схеме находим по формуле

$$I_k = (B \cdot R \cdot B^T)^{-1} \cdot B \cdot E = \begin{pmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \\ I_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.201 \\ 1.08 \\ -4.445 \\ -7.165 \end{pmatrix}.$$

Затем через контурные токи находим реальные токи в ветвях:

$$I = B^T \cdot I_k = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I'_6 \\ I_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.879 \\ 6.963 \\ -0.201 \\ -7.165 \\ -3.364 \\ 1.08 \\ 2.72 \end{pmatrix}.$$

Теперь рассчитаем токи I_6 и I_8 в схеме рис. 2.13, а. Для этого используем первый закон Кирхгофа:

$$I_6 = -J - I_1 - I_3 = -2 + 0.879 + 0.201 = -0.92 \text{ А};$$

$$I_8 = J - I_5 + I_6 = 2 + 3.364 - 0.92 = 4.445 \text{ А}.$$

Для определения U_J используем второй закон Кирхгофа

$$U_J = -I_6 R_6 = 27.586 \text{ Вт}.$$

Проверим правильность расчета, составив баланс мощности

$$P_{\text{и}} = E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_9 I_8 + J \cdot U_j = 1679 \text{ Вт};$$

$$P_{\text{п}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 (R_4 + R_8) + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 + I_7^2 R_7 = 1679 \text{ Вт}.$$

Токи рассчитаны верно.

Метод узловых потенциалов на основе матрично-топологического метода

Для этого метода нам кроме узловой матрицы и матрицы ЭДС будет нужна матрица проводимостей $g = R^{-1}$, которая равна обратной диагональной матрице сопротивлений.

Матрица узловых проводимостей рассчитывается по формуле

$$G_y = A \cdot g \cdot A^T,$$

Затем следует найти произведение матриц $b = -A \cdot g \cdot E$.

Потенциалы узлов определяются по формуле

$$\varphi = (G_y)^{-1} \cdot b.$$

Для схемы рис. 2.13, б потенциалы будут равны

$$\varphi = (G_y)^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \\ \varphi_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25.975 \\ -25.586 \\ 114.393 \end{pmatrix}.$$

Напряжение между узлами находим по формуле

$$U = A^T \cdot \varphi + E.$$

Теперь, зная напряжение, можно найти токи в ветвях

$$I = g \cdot U = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I'_6 \\ I_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.879 \\ 6.963 \\ -0.201 \\ -7.165 \\ -3.364 \\ 1.08 \\ 2.72 \end{pmatrix}.$$

Полученные токи совпали с токами, рассчитанными по методу контурных токов.

Пример расчета данной схемы в Mathcad приведен на следующей странице.

E1:=120 E2:=210 E9:=60 J:=2 R1:=25 R2:=10 R3:=8 R4:=10 R5:=34 R6:=30 R7:=20
R8:=2 ORIGIN:=1

Метод законов Кирхгофа

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -R2 & 0 & R4 + R8 & 0 & 0 & -R7 & 0 & 0 \\ -R1 & R2 & R3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R1 & 0 & 0 & 0 & -R5 & -R6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R5 & 0 & R7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 \\ -J \\ 0 \\ J \\ -E2 \\ E2 - E1 \\ E1 \\ -E9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I := A^{-1} \cdot B$$

$$I = \begin{pmatrix} -0.879 \\ 6.963 \\ -0.201 \\ -7.165 \\ -3.364 \\ -0.92 \\ 2.72 \\ 4.445 \\ 27.586 \end{pmatrix}$$

$$U_j := I_9$$

Баланс мощности

$$P_{и} := E1 \cdot I_1 + E2 \cdot I_2 + E9 \cdot I_8 + J \cdot U_j$$

$$P_{и} = 1.679 \times 10^3$$

$$P_{п} := (I_2)^2 \cdot R2 + (I_1)^2 \cdot R1 + (I_3)^2 \cdot R3 + (I_4)^2 \cdot (R4 + R8) + (I_5)^2 \cdot R5 + [(I_6)^2 \cdot R6 + (I_7)^2 \cdot R7]$$

$$P_{п} = 1.679 \times 10^3$$

Матрично-топологический метод

Узловая матрица

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Контурная матрица

$$B := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Матрица ЭДС

$$E := \begin{pmatrix} E1 \\ E2 \\ 0 \\ -E9 \\ 0 \\ J \cdot R6 \\ -E9 \end{pmatrix}$$

Проверка

$$s := B \cdot A^T$$

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица

$$R := \begin{pmatrix} R1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R4 + R8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R7 \end{pmatrix}$$

Метод контурных токов

$$I_k := (B \cdot R \cdot B^T)^{-1} \cdot B \cdot E$$

$$I_k = \begin{pmatrix} 0.201 \\ 1.08 \\ -4.445 \\ -7.165 \end{pmatrix}$$

Токи ветвей

$$I := B^T \cdot I_k$$

$$I = \begin{pmatrix} -0.879 \\ 6.963 \\ -0.201 \\ -7.165 \\ -3.364 \\ 1.08 \\ 2.72 \end{pmatrix}$$

Пересчет токов I6 и I8

$$I_6 := -J - I_1 - I_3$$

$$I_6 = -0.92$$

$$I_8 := J - I_5 + I_6$$

$$I_8 = 4.445$$

Метод узловых потенциалов

Матрица проводимостей

$$g := R^{-1}$$

$$g = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.083 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.029 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.033 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05 \end{pmatrix}$$

Узловые проводимости

$$G_y := A \cdot g \cdot A^T$$

$$G_y = \begin{pmatrix} 0.308 & -0.125 & -0.1 \\ -0.125 & 0.198 & -0.04 \\ -0.1 & -0.04 & 0.219 \end{pmatrix}$$

$$b := -A \cdot g \cdot E$$

Потенциалы узлов

$$\phi := G_y^{-1} \cdot b$$

$$\phi = \begin{pmatrix} -25.975 \\ -27.586 \\ 114.393 \end{pmatrix}$$

Напряжения ветвей

$$U := A^T \cdot \phi + E$$

Токи ветвей

$$I := g \cdot U$$

$$I = \begin{pmatrix} -0.879 \\ 6.963 \\ -0.201 \\ -7.165 \\ -3.364 \\ 1.08 \\ 2.72 \end{pmatrix}$$

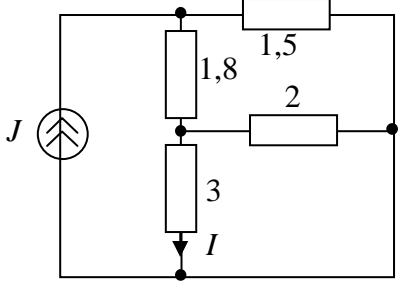
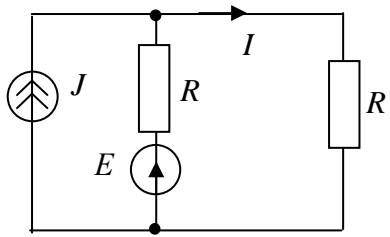
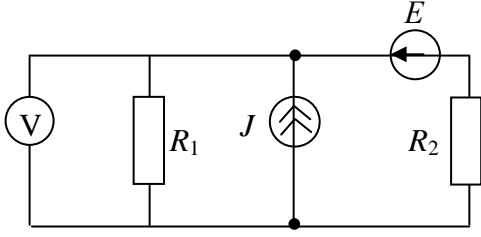
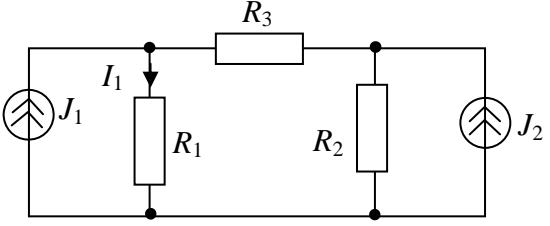
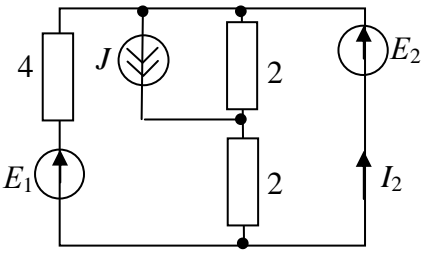
Тест для самоконтроля

1. В одной из ветвей цепи действует идеальный источник тока. Как найти напряжение на этой ветви?
2. Можно ли записать уравнение по второму закону Кирхгофа для контура, одна из ветвей которого содержит только идеальный источник тока?
3. Возможно ли преобразование идеального источника тока в идеальный источник ЭДС?
4. Какой закон лежит в основе метода контурных токов?
5. Возможно ли применение метода контурных токов для расчета токов в цепи, содержащей ветвь с нулевым сопротивлением?
6. Схема содержит N узлов и M ветвей. Сколько уравнений может быть записано по методу контурных токов?
7. Может ли через источник тока проходить два контурных тока?
8. Какой закон лежит в основе метода узловых потенциалов?
9. Можно ли записать уравнение по методу узловых потенциалов для узла, сопротивление одной из ветвей которого равно нулю?
10. Чему равна проводимость ветви с источником тока?
11. Как определяется число подсхем в методе наложения?
12. В каждой подсхеме оставляют один источник, а что делают с остальными?
13. Какой суммой частичных токов (арифметической или алгебраической) определяются токи ветвей в методе наложения?
14. От чего зависит сопротивление эквивалентного генератора?

Ответы

1. Напряжение находится по второму закону Кирхгофа
2. Можно
3. Нет
4. Второй закон Кирхгофа
5. Да
6. $M-N+1$
7. Нет
8. Первый закон Кирхгофа
9. Нет
10. Нулю
11. По числу источников, действующих в схеме
12. Источники ЭДС заменяют проводниками, ветви с источниками тока удаляют
13. Алгебраической
14. От сопротивления остальной части цепи

Задачи к теме 2

1.	<p>Определить I методом преобразований. Сопротивления на схеме даны в Омах, $J = 30\text{ А}$.</p>	
2.	<p>Определить I методом преобразований, если $J = 10\text{ А}$, $E = 10\text{ В}$, $R = 10\text{ Ом}$.</p>	
3.	<p>Методом контурных токов определить показание идеального вольтметра, если $J = 10\text{ А}$, $E = 300\text{ В}$, $R_1 = 20\text{ Ом}$, $R_2 = 30\text{ Ом}$.</p>	
4.	<p>Определить ток I_1 методом контурных токов, если $J_1 = 100\text{ мА}$, $J_2 = 50\text{ мА}$, $R_1 = 20\text{ Ом}$, $R_2 = 50\text{ Ом}$, $R_3 = 30\text{ Ом}$.</p>	
5.	<p>Найти ток I_2 методом узловых потенциалов, если $E_1 = 6\text{ В}$, $E_2 = 8\text{ В}$, $J = 6\text{ А}$. Сопротивления на схеме даны в Омах.</p>	

6.	$J_1 = 2 \text{ A}$, $J_2 = 4 \text{ A}$, $E = 4 \text{ В}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 4 \text{ Ом}$, $R_4 = 8 \text{ Ом}$. Найти ток I_3 а) методом узловых потенциалов; б) методом наложения.	
7.	Методом наложения найти ток I_2 , если $E_1 = 50 \text{ В}$, $E_2 = 40 \text{ В}$, $J = 3 \text{ А}$, $R_1 = 5 \text{ Ом}$, $R_2 = 10 \text{ Ом}$, $R_3 = 8 \text{ Ом}$.	
8.	Определить I методом эквивалентного генератора, если $E_1 = 100 \text{ В}$, $E_2 = 200 \text{ В}$, $E_3 = 600 \text{ В}$. Сопротивления на схеме даны в Омах.	
9.	Определить I методом эквивалентного генератора, если $E_1 = 100 \text{ В}$, $E_2 = 20 \text{ В}$, $E_3 = 20 \text{ В}$. Сопротивления на схеме даны в Омах.	
Ответы: 1) 4А; 2) 5.5А; 3) 240В; 4) 0.105А; 5) 5.5А; 6) 1А; 7) 7А; 8) 11.6А; 9) 6А.		

3. Расчет цепей с гармоническими токами и напряжениями

Новые слова и словосочетания

мгновенное значение	комплекс
период	модуль
частота	фаза
угловая частота	сдвиг фаз
гармонический ток	показательная форма
действующее значение	алгебраическая форма
символический метод	тригонометрическая форма
мнимая единица	комплексное сопротивление

3.1. Гармонические токи и напряжения

Напряжения, токи и ЭДС называются *переменными*, если их значения изменяются во времени. Их значения в любой данный момент времени называются *мгновенными* и обозначаются i, u, e . Электромагнитные процессы в электрической цепи, при которых мгновенные значения напряжений и токов повторяются через равные промежутки времени, называются *периодическими*.

Период T – это время, через которое мгновенные значения периодических величин повторяются.

Частота f – это число колебаний в единицу времени $f = 1/T$. Частота измеряется в герцах [Гц = 1/с]. В энергосистеме России частота промышленного тока равна 50 Гц.

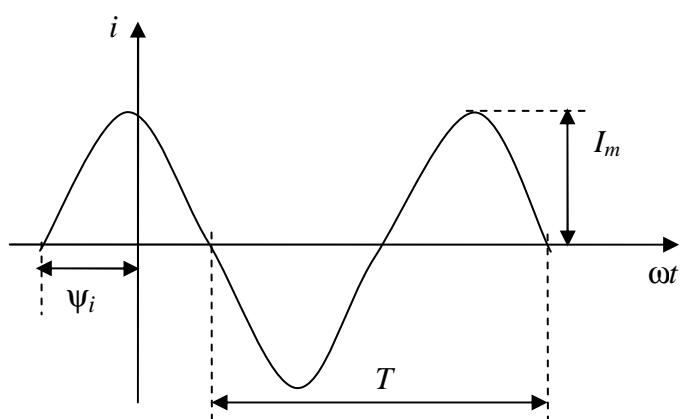


Рис. 3.1

промышленного тока равна 50 Гц.

Угловая частота ω – это число колебаний за 2π единиц времени $\omega = 2\pi f$. Размерность угловой частоты – рад/с.

Гармонические токи и напряжения – это токи и напряжения, изменяющиеся по закону синуса или косинуса. На рис. 3.1 изображена синусоидальная функция

изображена синусоидальная функция

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Здесь I_m – максимальное значение или амплитуда, ψ_i – начальная фаза, или величина сдвига синусоиды относительно начала координат.

О величине тока судят обычно по действующему значению за период. **Действующее** значение периодического тока равно по величине такому постоянному току, который, проходя через неизменное сопротивление R , за период времени T выделяет то же количество тепла, что и периодический ток:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt},$$

аналогично $U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}.$

Если периодический ток изменяется по синусоидальному закону, то его действующее значение определяется как

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \psi_i) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Аналогично определяются действующие значения других величин:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}; \quad J = \frac{J_m}{\sqrt{2}}.$$

Запись синусоидальных величин может осуществляться как через амплитудные, так и через действующие значения:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \psi_i).$$

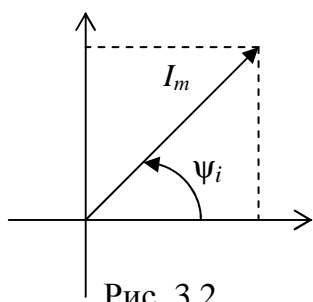


Рис. 3.2

Номинальные токи и напряжения электротехнических устройств определяются, как правило, действующими значениями, поэтому действующие значения представляют наиболее распространенный электрический параметр.

Векторная диаграмма – это представление гармонических величин в виде векторов в прямоугольной системе координат, длины которых пропорциональны амплитудам или действующим значениям этих величин, а углы поворота векторов от положительного направления оси абсцисс равны начальным фазам этих величин. Векторная диаграмма для тока $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ представлена на рис. 3.2.

В электроэнергетике применяются токи, являющиеся синусоидальными функциями, поэтому в электротехнике большое внимание уделяется именно цепям с синусоидальными токами.

3.2. Синусоидальный ток в резистивном элементе

Если через резистивный элемент течет синусоидальный ток $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$, тогда напряжение на сопротивлении изменяется по закону Ома $u(t) = I_m R \sin(\omega t + \psi_i)$.

Следовательно, *напряжение на зажимах сопротивления и ток, проходящий через это сопротивление, имеют одинаковую начальную фазу или, как говорят, совпадают по фазе.*

Фазовый сдвиг φ – это разность начальных фаз двух синусоид, имеющих одинаковую частоту. В данном случае фазовый сдвиг между напряжением и током равен нулю: $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$.

Мгновенная мощность, поступающая в сопротивление:

$$p_R(t) = ui = U_m I_m \sin^2(\omega t + \psi_i) = UI(1 - \cos 2(\omega t + \psi_i))$$

изменяется с угловой частотой, удвоенной по сравнению с частотой напряжения и тока. Ввиду того, что в рассматриваемом случае напряжение и ток совпадают по фазе, то есть всегда имеют одинаковый знак, их произведение всегда положительно.

Среднее значение мощности за период: $P = \frac{1}{T} \int_0^T p_R dt$ называется

активной мощностью и измеряется в ваттах (Вт). В рассмотренном случае $P = I^2 R$, то есть вся электрическая энергия, поступающая в сопротивление, преобразуется в тепло.

3.3. Синусоидальный ток в индуктивном элементе

Пусть через индуктивный элемент проходит ток $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$, тогда напряжение на индуктивности изменяется по закону:

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \omega I_m \cos(\omega t + \psi_i) = x_L I_m \sin(\omega t + \psi_i + 90^\circ) = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Полученное выражение показывает, что *напряжение на индуктивности опережает ток на 90°* . Тогда фазовый сдвиг $\varphi = \psi_u - \psi_i = 90^\circ$. Амплитуды, так же как и действующие значения напряжения и тока, связаны соотношениями, подобными закону Ома:

$$U_m = \omega L I_m = I_m x_L; \quad U = \omega L I = I x_L,$$

где $x_L = \omega L$ [Ом] – *реактивное сопротивление индуктивного элемента* (индуктивное сопротивление). Величина $b_L = 1/\omega L$ называется индуктивной проводимостью, тогда

$$I_m = b_L U_m.$$

Если $\omega \rightarrow 0$, то $x_L \rightarrow 0$ – сопротивление индуктивного элемента постоянному току равно нулю.

3.4. Синусоидальный ток в емкостном элементе

Если через емкостной элемент течет синусоидальный ток $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$, тогда напряжение на элементе запишется в виде: $u_C(t) = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{-I_m}{\omega C} \cos(\omega t + \psi_i) = x_C I_m \sin(\omega t + \psi_i - 90^\circ) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$.

Полученное выражение показывает, что *напряжение на емкости отстает от тока на 90°* . Фазовый сдвиг $\varphi = \psi_u - \psi_i = -90^\circ$.

Амплитуды и действующие значения напряжения и тока связаны соотношениями:

$$U_m = \frac{1}{\omega C} I_m = I_m x_C; \quad U = \frac{1}{\omega C} I = I x_C,$$

где $x_C = \frac{1}{\omega C}$ [Ом] – *реактивное сопротивление емкостного элемента* (емкостное сопротивление). Обратная величина $b_C = \omega C$ называется емкостной проводимостью. Следовательно,

$$I_m = b_C U_m; \quad I = b_C U.$$

Если $\omega \rightarrow 0$, то $x_C \rightarrow \infty$, т.е. емкостной элемент представляет разрыв для постоянного тока, который при постоянном напряжении не протекает через емкость.

3.5. Символический метод расчета электрических цепей

На рис. 3.3 изображена комплексная плоскость. На ней могут быть изображены комплексные числа. Каждое комплексное число имеет действительную и мнимую части. По оси абсцисс комплексной плоскости откладывается действительная часть комплексного числа, по оси ординат – мнимая часть. На оси действительных значений ставится значок +1, на оси мнимых значений – мнимая единица +j, где $j = \sqrt{-1}$.

Из математики известна формула Эйлера

$$Ae^{j\psi} = A\cos\psi + jA\sin\psi = a + jb,$$

где $Ae^{j\psi}$ – показательная форма записи комплексного числа;

$A\cos\psi + jA\sin\psi$ – тригонометрическая форма записи;

$a + jb$ – алгебраическая форма записи комплексного числа.

Комплексное число $Ae^{j\psi}$ изображается на комплексной плоскости вектором, численно равным A и составляющим угол ψ с осью вещественных значений (+1). Угол ψ отсчитывается против часовой стрелки от оси вещественных значений.

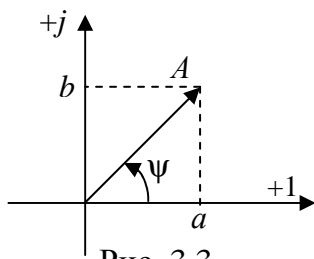


Рис. 3.3

Проекция функции $Ae^{j\psi}$ на ось +1 равна $a = A\cos\psi$, а проекция на ось мнимых значений (+j) равна $b = A\sin\psi$ (рис. 3.3).

Символический метод применяется для расчета линейных электрических цепей с гармоническими токами и напряжениями. Метод основан на изображении синусоид комплексными числами. Синусоидальная величина может быть изображена вращающимся вектором на комплексной плоскости (рис. 3.4).

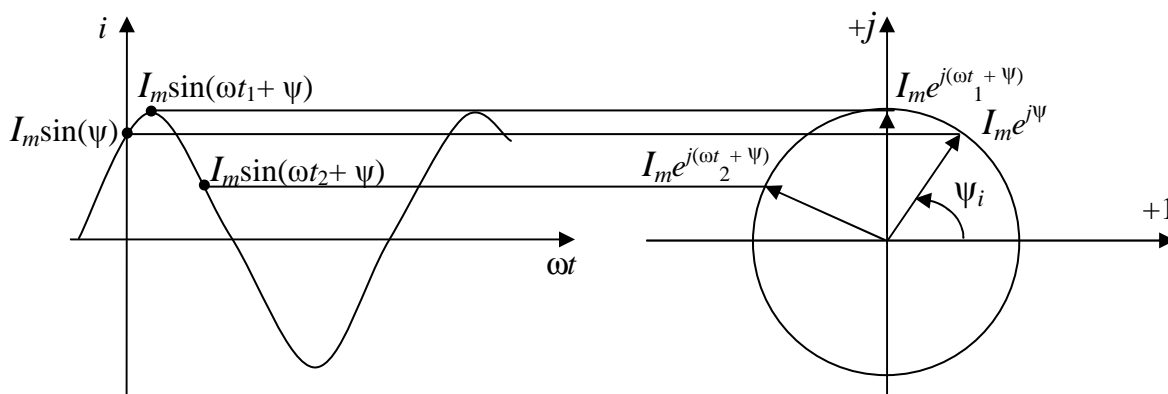


Рис. 3.3

Если ток (или напряжение) изменяется по закону синуса

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi),$$

то все операции с ними проще производить в комплексной форме, представляя

$$i(t) \leftrightarrow I_m e^{j\omega t} e^{j\psi} = \dot{I}_m e^{j\omega t} \quad \text{или,}$$

$$\text{при } t = 0 \quad i(t) \Rightarrow \dot{I}_m = I_m e^{j\psi} = \sqrt{2} I e^{j\psi} = \sqrt{2} \dot{I},$$

где \dot{I} – комплекс действующего значения тока; \dot{I}_m – комплексная амплитуда тока.

Таким образом, гармоничная величина однозначно представляется комплексной амплитудой или комплексом действующего значения. В процессе расчетов возникает необходимость перехода от алгебраической формы к показательной, и наоборот.

Переход от показательной формы к алгебраической

$$Ae^{j\Psi} = a + jb,$$

где $a = A \cos \psi$ – действительная часть комплексного числа;

$b = A \sin \psi$ – мнимая часть.

Переход от алгебраической формы к показательной

$$a + jb = Ae^{j\Psi},$$

где $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль комплексного числа;

$\psi = \arctg \frac{b}{a} \pm 180^\circ$ – фаза, причем $\pm 180^\circ$ учитывается, если $a < 0$.

Пример 3.1. Пусть ток и напряжение заданы в виде синусоид:

$i(t) = 5 \sin(\omega t + 130^\circ)$ А, $u(t) = 200 \sin(\omega t - 30^\circ)$ В, тогда комплекс амплитудного значения тока запишется в виде $\dot{I}_m = 5e^{j130}$ А, комплекс действующего значения $\dot{I} = \frac{5}{\sqrt{2}}e^{j130}$ А. Переведем показательную форму в алгебраическую: $\dot{I}_m = 5e^{j130} = 5 \cos(130^\circ) + j5 \sin(130^\circ) = -3.21 + j3.83$ А.

Комплексная амплитуда напряжения $\dot{U}_m = 200e^{-j30}$ В или в алгебраической форме $\dot{U}_m = 200 \cos(-30^\circ) + j200 \sin(-30^\circ) = 173.2 - j100$ В.

Пример 3.2. Пусть действующее значение тока задано в алгебраической форме: $\dot{I} = 3 + j4$ А, тогда показательная форма запишется в виде $\dot{I} = 5e^{j53.13}$, где $I = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ А, $\psi = \arctg \frac{4}{3} = 53,13^\circ$.

Операции с комплексными числами

1. При сложении (вычитании) комплексных чисел их записывают в алгебраической форме и отдельно складывают (вычитают) их действительные и мнимые части:

$$A_1e^{j\Psi_1} \pm A_2e^{j\Psi_2} = (a_1 + jb_1) \pm (a_2 + jb_2) = a_3 + jb_3 = A_3e^{j\Psi_3}.$$

$$5e^{j53.1} + 12.8e^{-j51.34} = (3 + 4j) + (8 - 10j) = 11 - 6j = 12.53e^{-j28.6}$$

2. Умножение и деление производят в показательной форме:

$$A_1 e^{j\psi_1} \cdot A_2 e^{j\psi_2} = A_1 A_2 e^{j(\psi_1 + \psi_2)}; \quad \frac{A_1 e^{j\psi_1}}{A_2 e^{j\psi_2}} = \frac{A_1}{A_2} e^{j(\psi_1 - \psi_2)}.$$

$$3e^{j50} \cdot 6e^{-j20} = 18e^{j30}; \quad \frac{10e^{j85}}{5e^{j45}} = 2e^{j40}.$$

3. В комплексной форме дифференцирование по времени соответствует умножению, а интегрирование – делению комплексных значений на $j\omega$. Пусть $a(t) = A_m \sin(\omega t + \psi) \Rightarrow \dot{A}_m = A_m e^{j\psi}$, тогда

$$\frac{da(t)}{dt} \Rightarrow j\omega \dot{A}_m = j\omega A_m e^{j\psi}; \quad \int a(t) dt = \frac{A_m e^{j\psi}}{j\omega}.$$

4. Сопряженное комплексное число:

если $\dot{A} = A e^{j\psi} = a + jb$, то сопряженное ему число запишется в виде $\dot{A}^* = A e^{-j\psi} = a - jb$.

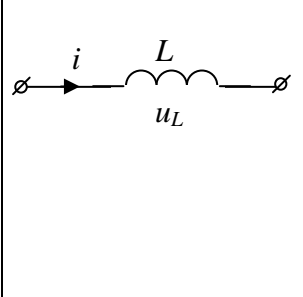
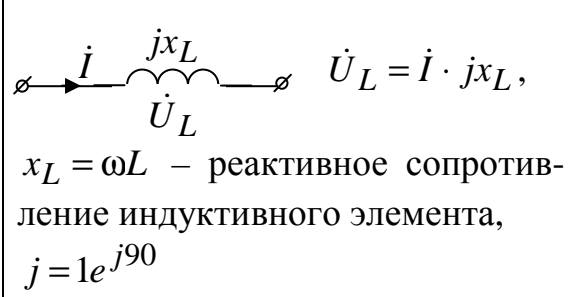
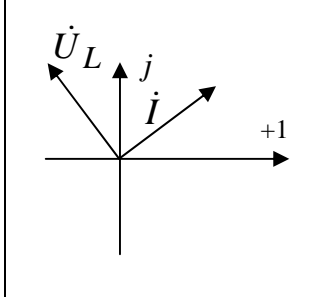
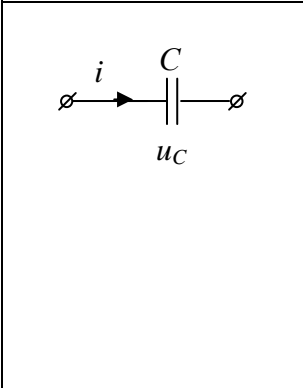
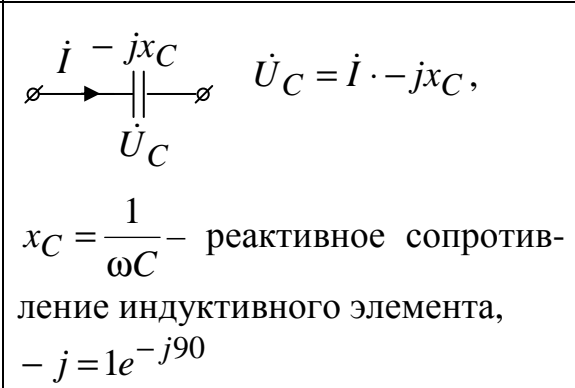
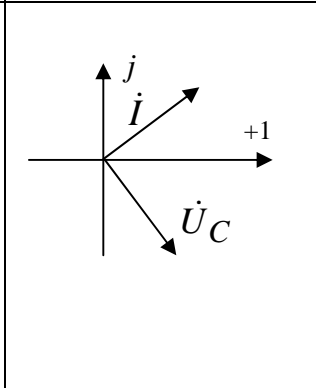
5. Некоторые соотношения:

$$j = e^{j90}; \quad -j = e^{-j90}; \quad jj = -1; \quad \frac{1}{j} = -j; \quad 1 = e^{j0}; \quad -1 = e^{j180}.$$

Сущность символического метода расчета состоит в том, что для режима синусоидального тока можно перейти от уравнений, составленных для мгновенных значений и являющихся по сути дела дифференциальными уравнениями, к алгебраическим уравнениям, составленным относительно комплексов тока и ЭДС.

Составление схем замещения

элемент	схема замещения закон Ома	векторная диаграмма
	$\dot{E} = \dot{I} \cdot \underline{Z},$ $\dot{U}_J = \dot{J} \cdot \underline{Z},$ <p>\underline{Z} – комплекс полного сопротивления цепи</p>	
	$\dot{U}_R = \dot{I} \cdot R$	

	 $\dot{U}_L = \dot{I} \cdot jx_L,$ $x_L = \omega L - \text{реактивное сопротивление индуктивного элемента,}$ $j = 1e^{j90}$	
	 $\dot{U}_C = \dot{I} \cdot -jx_C,$ $x_C = \frac{1}{\omega C} - \text{реактивное сопротивление индуктивного элемента,}$ $-j = 1e^{-j90}$	

Первый закон Кирхгофа в комплексной форме

Алгебраическая сумма комплексных действующих значений токов в узле равна нулю:

$$\sum \pm \dot{I}_k = 0.$$

Графическая проверка первого закона Кирхгофа осуществляется с помощью лучевой векторной диаграммы. **Лучевая векторная диаграмма** строится для комплексных действующих значений токов – это векторы, выходящие из начала координат каждый под своим углом.

Второй закон Кирхгофа в комплексной форме

В любом замкнутом контуре алгебраическая сумма комплексных действующих значений падений напряжения на пассивных элементах равна алгебраической сумме комплексных действующих значений ЭДС и напряжений источников тока:

$$\sum \pm \dot{U}_k = \sum \pm \dot{E}_k + \sum \pm \dot{U}_{jk}.$$

Для графической проверки второго закона Кирхгофа служит **топографическая диаграмма напряжений** – это векторы комплексных действующих значений напряжения, подстроенные один к другому и образующие замкнутый контур. Напряжения откладываются строго в том порядке, в каком соединены соответствующие элементы данной цепи, причем каждый последующий вектор проводится из конца предыдущего.

го. Отрезок, соединяющий любые две точки диаграммы, равен напряжению между соответствующими точками схемы.

Векторы напряжений топографических диаграмм по отношению к соответствующим токам должны:

- совпадать по фазе для резистивных элементов;
- опережать ток на 90° для индуктивных элементов;
- отставать от тока на 90° для емкостных элементов.

Стрелки векторов напряжений должны показывать точку высшего потенциала.

3.6. Расчет линейных электрических цепей в комплексной форме

Так как основные законы электротехники в комплексной форме такие же, как и для цепей с постоянными токами, то все известные методы расчета цепей с постоянными токами справедливы для расчета цепей с переменными токами, только во всех формулах напряжения, ЭДС, токи и сопротивления будут комплексными числами.

Для схемы, представленной на рис. 3.4, при $e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi)$ уравнение для мгновенных значений по второму закону Кирхгофа запишется в виде

$$u_R + u_L + u_C = e \quad \text{или} \quad iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = e.$$

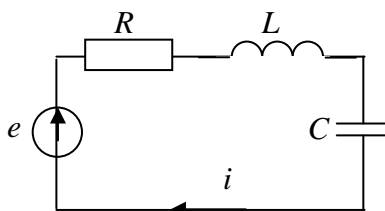


Рис. 3.4

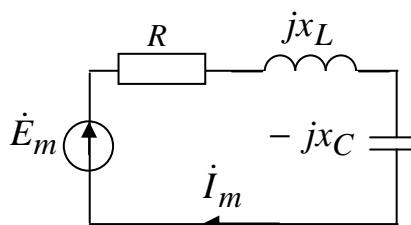
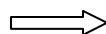


Рис. 3.5

Перейдем от дифференциального уравнения к алгебраическому, составив схему замещения цепи в комплексной форме (рис. 3.5). Для данной схемы $\dot{I}_m R + \dot{I}_m jx_L + \dot{I}_m (-jx_C) = \dot{E}_m$. Вынесем \dot{I}_m за скобку

$$\dot{I}_m (R + jx_L - jx_C) = \dot{E}_m. \quad (3.1)$$

Следовательно, для схемы (рис. 3.5)

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{E}_m}{(R + jx_L - jx_C)},$$

где $\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = R + jx_L - jx_C$ [Ом] – комплекс полного сопротивления цепи.

Уравнение (3.1) перепишем в виде $\dot{I}_m \underline{Z} = \dot{E}_m$. Поделим обе его части на $\sqrt{2}$ и перейдем от комплексных амплитуд к комплексам действующих значений:

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}}. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) представляет собой **закон Ома для цепи синусоидального тока**. В общем случае \underline{Z} имеет некоторую действительную часть R и некоторую мнимую часть jx :

$$\underline{Z} = R + jx = Ze^{j\varphi},$$

где R, x – активное и реактивное сопротивления цепи;

$Z = \sqrt{R^2 + x^2}$ – модуль полного сопротивления цепи;

$\varphi = \arctg \frac{x}{R}$ – угол сдвига фаз между входным напряжением и входным

током.

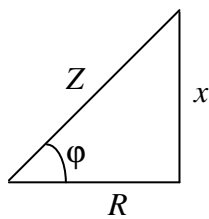


Рис. 3.6

Модуль комплексного сопротивления цепи можно представить как гипотенузу прямоугольного треугольника – треугольника сопротивлений, один катет которого равен R , другой – x (рис. 3.6). Треугольник сопротивлений дает графическую интерпретацию связи между модулем полного сопротивления Z и активным R и реактивным x сопротивлениями цепи.

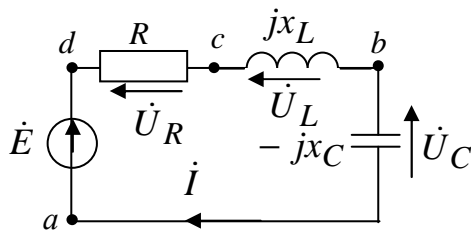


Рис. 3.7

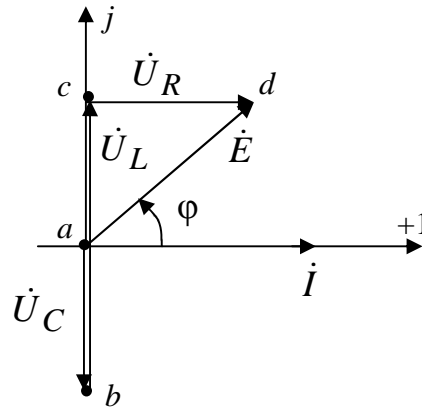


Рис. 3.8

Для построения векторной диаграммы покажем на схеме направления напряжений на пассивных элементах (рис. 3.7). Пусть вектор тока совпадает по направлению с осью вещественных чисел (рис. 3.8). Выбираем масштаб тока ($m_i = n$, А/см) и масштаб напряжения ($m_u = k$, В/см). В принятом масштабе изображаем вектор тока \dot{I} , затем в масштабе откладываем напряжения на соответствующих сопротивлениях в

последовательности их расположения в цепи. Пусть точка a совпадает с началом координат, из этой точки выходит вектор напряжения $\dot{U}_C = \dot{I} \cdot (-jx_C)$, который отстает от тока на 90° . Стрелка напряжения \dot{U}_C входит в точку b , из которой выходит $\dot{U}_L = \dot{I} \cdot jx_L$. Следовательно, на комплексной плоскости из конца вектора \dot{U}_C строим вектор \dot{U}_L , учитывая, что он должен опередить ток на 90° . Затем из конца вектора \dot{U}_L откладываем $\dot{U}_R = \dot{I}R$, который совпадает по фазе с током. ЭДС \dot{E} находим как сумму напряжений на пассивных элементах (рис. 3.8).

Пример 3.1 Входное сопротивление цепи постоянному току 10 Ом. Во сколько раз оно изменится на частоте 100 рад/с, если $L = 0.1$ Гн, $C = 2$ мФ. Определить входной ток (рис. 3.9) при входном напряжении $u(t) = \sqrt{2}80\sin(\omega t + 90^\circ)$ В.

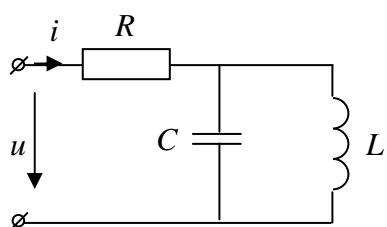


Рис. 3.9

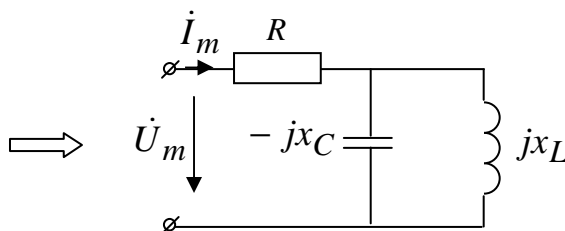


Рис. 3.10

Решение. Напряжение и сопротивления элементов цепи представляем в комплексной форме:

$x_L = \omega L = 100 \cdot 0.1 = 10$ Ом, $x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^3}{100 \cdot 2} = 5$ Ом, активное сопротивление не зависит от частоты $R = 10$ Ом, $\dot{U}_m = 80\sqrt{2}e^{j90}$.

На постоянном токе частота равна нулю, следовательно, $x_C \rightarrow \infty, x_L = 0$ и в цепи остается только активное сопротивление $R = 10$ Ом. При частоте, равной 100 рад/с, рассчитаем полное комплексное сопротивление цепи:

$$\underline{Z} = R + \frac{-jx_C jx_L}{jx_L - jx_C} = 10 + \frac{50}{10j - 5j} = 10 - 10j = 10\sqrt{2}e^{-j45} \text{ Ом.}$$

Значит, входное сопротивление цепи на частоте 100 рад/с увеличится в $\sqrt{2}$ раз по сравнению с входным сопротивлением цепи постоянному току. Определяем ток по закону Ома:

$$\dot{i}_m = \frac{\dot{U}_m}{Z} = \frac{80\sqrt{2}e^{j90}}{10\sqrt{2}e^{j-45}} = 8e^{j135} \text{ А.}$$

Представляем ток как функцию времени: $i(t) = 8\sin(100t + 135^\circ)$ А.

Пример 3.2. Методом контурных токов определить токи $i_L(t), i_R(t)$ в схеме (рис. 3.11), если $e(t) = 4\sqrt{2}\sin \omega t$ В; $J(t) = 1\sqrt{2}\cos \omega t$ А; $R = 4$ Ом; $x_L = x_C = 4$ Ом.

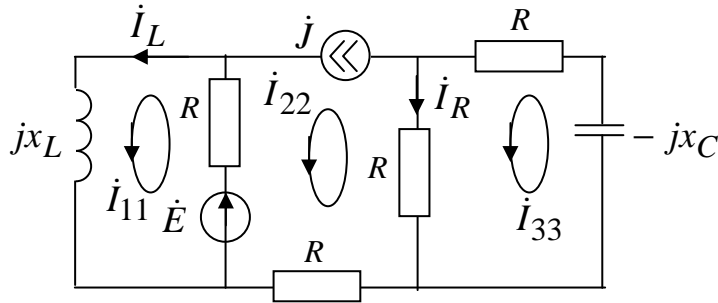


Рис. 3.11

Решение. Переведем источники в комплексную форму: $\dot{E} = 4e^{j0}$ В; $\dot{J} = 1e^{j90}$ А. За неизвестные в методе контурных токов принимают токи, текущие по независимым контурам. Для заданной схемы их три, причем один из токов – ток источника тока известен.

Для токов $\dot{I}_{11}, \dot{I}_{33}$ составляем уравнения:

$$\dot{I}_{11}(jx_L + R) - \dot{I}_{22}R = \dot{E}; \quad \dot{I}_{33}(2R - jx_C) - \dot{I}_{22}R = 0.$$

Контурные токи $\dot{I}_{11}, \dot{I}_{33}$ не имеют общих ветвей, поэтому их взаимное сопротивление равно нулю, $\dot{I}_{22} = \dot{J}$. Подставляя числовые значения, имеем: $\dot{I}_{11}(4j + 4) - 4j = 4$; $\dot{I}_{33}(8 - 4j) - 4j = 0$.

Определив контурные токи $\dot{I}_{11} = 1$ А и $\dot{I}_{33} = 0.447e^{j116.5}$ А, находим токи в ветвях:

$$\dot{I}_L = \dot{I}_{11} = 1 \text{ А}; \quad \dot{I}_R = \dot{I}_{33} - \dot{I}_{22} = 0.447e^{j116.5} - j = 0.632e^{-j108} \text{ А.}$$

Мгновенные значения токов

$$i_L(t) = \sqrt{2}\sin \omega t \text{ А}; \quad i_R(t) = 0.632\sqrt{2}\sin(\omega t - 108^\circ) \text{ А.}$$

Пример 3.3. Методом узловых потенциалов определить токи $\dot{I}_C, \dot{I}_R, \dot{I}_L$ в схеме (рис. 3.12), если $x_C = 40$ Ом; $x_L = 20$ Ом; $R = 40$ Ом; $e(t) = 141\sin \omega t$ В; $J(t) = 7.07\sin(\omega t - 90^\circ)$ А.

Решение. В комплексной форме $\dot{E} = \frac{141}{\sqrt{2}} = 100$ В; $\dot{J} = \frac{7.07}{\sqrt{2}}e^{-j90} = -5j$ А.

Неизвестными в методе узловых потенциалов являются потенциалы узлов. Всего в данной схеме их четыре. Потенциал узла a $\dot{\phi}_a = 0$, тогда потенциал узла $\dot{\phi}_C = \dot{E} = 100$ В.

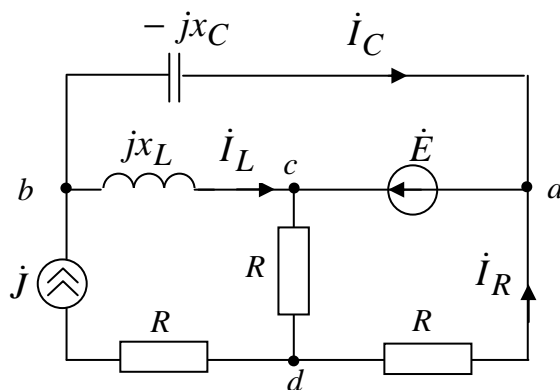


Рис. 3.12

Для узлов b и d записываем уравнения узловых потенциалов:

$$\dot{\phi}_b \left(\frac{1}{-jx_C} + \frac{1}{jx_L} \right) - \dot{\phi}_C \frac{1}{jx_L} = j;$$

$$\dot{\phi}_d \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) - \dot{\phi}_C \frac{1}{R} = -j.$$

После подстановки числовых значений имеем:

$$\dot{\phi}_b \left(\frac{j}{40} + \frac{-j}{20} \right) - 100 \frac{-j}{20} = -5j; \quad \dot{\phi}_d \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{40} \right) - 100 \frac{1}{40} = 5j.$$

Находим неизвестные потенциалы: $\dot{\phi}_b = 400$ В, $\dot{\phi}_d = 112e^{j63.4}$ В. Токи ветвей определяем по закону Ома и найденным потенциалам:

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{\phi}_b - \dot{\phi}_a}{-jx_C} = 10j \text{ А}; \quad \dot{I}_L = \frac{\dot{\phi}_b - \dot{\phi}_C}{jx_L} = -15j \text{ А};$$

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{\phi}_d - \dot{\phi}_a}{R} = 2.8e^{j63.4} \text{ А}.$$

3.7. Мощность в цепи синусоидального тока

Определим мгновенную мощность пассивного двухполюсника, который подключен к источнику ЭДС, так что его мгновенная мощность равна мгновенной мощности источника (рис. 3.13) при напряжении и токе: $u(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \psi_u)$; $i(t) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \psi_i)$.

Мгновенная мощность

$$p = ui = 2UI \sin(\omega t + \psi_u) \sin(\omega t + \psi_i) = UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i) = P + S \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)$$

содержит постоянную составляющую и косинусоиду двойной частоты.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = UI \cos \varphi \text{ [Вт]} - \text{активная мощность, равна постоянной со-}$$

ставляющей мгновенной мощности; $\varphi = \psi_u - \psi_i$ – сдвиг фаз между напряжением и током.

Активная мощность зависит от действующих значений напряжения и тока, а также от $\cos \varphi$ – **коэффициента мощности**. Активная мощность определяет среднюю скорость необратимого преобразования энергии во всех резистивных элементах. Она всегда положительна и не зависит от знака угла φ .

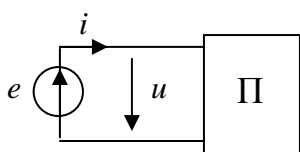


Рис. 3.13

Активная мощность измеряется ваттметрами. Ваттметр имеет две измерительные цепи, одна из которых включается последовательно с двухполюсником, т.е. ток в этой цепи равен току i двухполюсника. Вторая измерительная цепь включается параллельно с двухполюсником, т.е. напряжение на этой цепи равно напряжению u двухполюсника. Чтобы учесть знак угла φ измерительные цепи должны быть включены относительно положительных направлений тока и напряжения, поэтому один из выводов каждой измерительной цепи обозначен звездочкой (рис. 3.14).

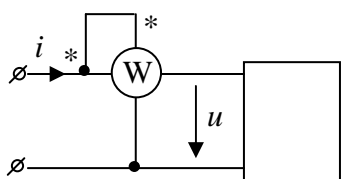


Рис. 3.14

Из треугольника сопротивлений (рис. 3.6) следует, что $\cos \varphi = \frac{R}{Z}$,

$$\text{тогда } P = UI \cos \varphi = \frac{U}{Z} IR = I^2 R.$$

Полная мощность – это произведение действующих значений напряжения между выводами источника $U = E$ и тока источника I :

$$S = UI = EI = I^2 Z \text{ [ВА]}.$$

Для измерения полной мощности выбрана своя единица: вольт-ампер [ВА].

Полная мощность определяет эксплуатационные возможности многих электротехнических устройств (генераторов, трансформаторов и др.), для которых она указывается в качестве номинальной: $S_{\text{ном}} = U_{\text{ном}} I_{\text{ном}}$. Например, для генератора электрической энергии но-

минальная полная мощность равна его максимальной активной мощности, которая может быть получена при $\cos \varphi = 1$.

Реактивная мощность Q отражает процесс обмена энергией между источником энергии и совокупностью индуктивных и емкостных элементов:

$$Q = UI \sin \varphi = I^2 x \text{ [Вар]},$$

где $\sin \varphi = \frac{x}{Z}$ (из треугольника сопротивлений). При индуктивном характере входного сопротивления ($\varphi > 0$) реактивная мощность положительна, при емкостном ($\varphi < 0$) – отрицательна.

Представим входной ток и напряжение в комплексной форме: $\dot{I} = Ie^{j\psi_i}$, $\dot{U} = Ue^{j\psi_u}$. Запишем в общем виде полное комплексное сопротивление цепи $\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = R + jx$. Тогда комплекс полной мощности цепи запишется в виде

$$\dot{S} = \dot{U}I^* = UIe^{j(\psi_u - \psi_i)} = UIe^{j\varphi} = P + jQ \text{ [ВА]},$$

где $I^* = Ie^{-j\psi_i}$ – сопряженный ток; $P = UI \cos \varphi$ – активная мощность; $Q = UI \sin \varphi$ – реактивная мощность.

Так как $\dot{U} = \dot{I}\underline{Z}$, то комплекс полной мощности можно записать в виде $\dot{S} = \dot{U}I^* = \underline{Z}II^* = \underline{Z}I^2 = RI^2 + jxI^2$.

Если все стороны треугольника сопротивлений (рис. 3.6) умножить на I , то получим треугольник напряжений (рис. 3.15), где

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_x^2}; \quad \cos \varphi = \frac{U_R}{U}; \quad U_R = IR; \quad U_x = Ix.$$

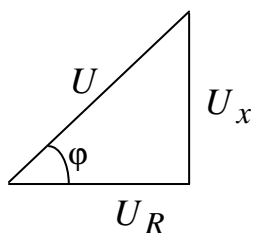


Рис. 3.15

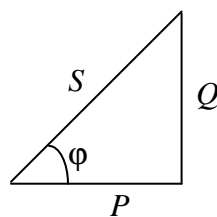


Рис. 3.16

Если все стороны треугольника напряжений (рис. 3.15) умножить на I , то получим треугольник мощностей (рис. 3.16), где $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$;

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}.$$

Для проверки правильности расчетов составляется баланс мощностей в комплексной форме.

Если в схеме имеется несколько источников ЭДС и источников тока, то выражение для вырабатываемой полной мощности определяется в виде

$$\dot{S}_{\text{и}} = \sum_i \dot{E}_i I_i^* + \sum_k \dot{U}_{Jk} J_k^* = P_{\text{и}} + jQ_{\text{и}}.$$

В свою очередь, активная потребляемая мощность определяется как сумма активных мощностей во всех резистивных элементах:

$$P_{\text{п}} = \sum_k I_k^2 R_k,$$

где I_k – действующее значение тока в k -ой ветви; R_k – сопротивление k -ой ветви.

Реактивная потребляемая мощность находится с учетом действующих значений токов во всех реактивных элементах:

$$Q_{\text{п}} = \sum_i I_i^2 x_{Li} - \sum_k I_k^2 x_{Ck}.$$

Далее рассчитывается относительная погрешность:

$$\delta_P = \frac{|P_{\text{и}} - P_{\text{п}}|}{P_{\text{и}}} \cdot 100\% \leq 3\%; \quad \delta_Q = \frac{|Q_{\text{и}} - Q_{\text{п}}|}{Q_{\text{п}}} \cdot 100\% \leq 3\%.$$

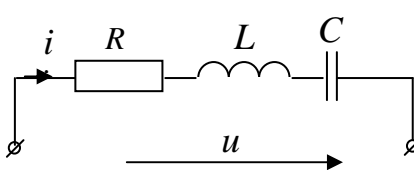
Тест для самоконтроля

1. Какое из выражений для цепи синусоидального тока, состоящей из последовательно соединенных R , L и C , содержит ошибку?

а) $x_C = 2\pi f C$; б) $x_L = 2\pi f L$; в) $Z = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}$; г) $\cos \varphi = R/Z$.

2. Ток в цепи изменяется по закону $i(t) = I_m \sin \omega t$. Какое из выражений

несправедливо, если $U_L > U_C$?



а) $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$, $\varphi > 0$;
 б) $u_L = U_{mL} \sin(\omega t + 90^\circ)$; в) $u_R = U_{mR} \sin \omega t$;
 г) $u_C = U_{mC} \sin(\omega t + 90^\circ)$.

3. Какое из выражений для цепи синусоидального тока, состоящей из последовательно соединенных R , L и C , содержит ошибку? Ток в цепи $i(t) = I_m \sin \omega t$.

а) $u = u_R + u_L + u_C$; б) $U = U_R + U_L + U_C$; в) $U^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2$;
 г) $u = I_m R \sin \omega t + I_m x_L \sin(\omega t + 90^\circ) + I_m x_C \sin(\omega t - 90^\circ)$;

$$д) Z^2 = R^2 + (x_L - x_C)^2; I = U / \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}.$$

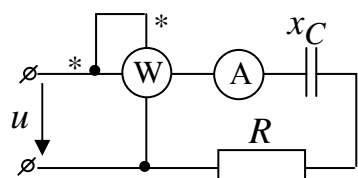
4. В цепи переменного тока напряжение и ток изменяются по законам $u(t) = 141\sin(314t + 80^\circ)$ и $i(t) = 14.15\sin(314t + 20^\circ)$. Определить активную мощность цепи. Указать правильный ответ.

а) 308 Вт; б) 616 Вт; в) 1000 Вт; г) 500 Вт; д) 1236 Вт.

5. В цепи переменного тока напряжение и ток изменяются по законам $u(t) = 28.2\sin(618t + 80^\circ)$ и $i(t) = 2.82\sin(618t + 50^\circ)$. Определить реактивную мощность цепи. Указать правильный ответ.

а) 40 Вар; б) 79.5 Вар; в) 68 Вар; г) 49.75 Вар; д) 20 Вар.

6. Определить сопротивление x_C , если действующее значение входного



напряжения $U = 200$ В, ваттметр показывает 640 Вт, амперметр – 4 А. Указать правильный ответ.

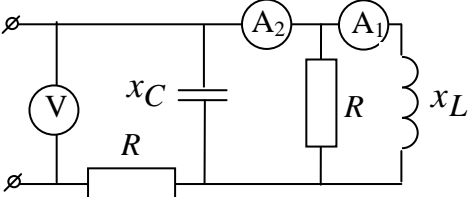
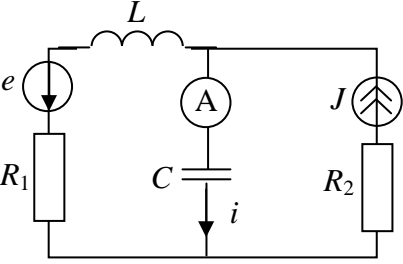
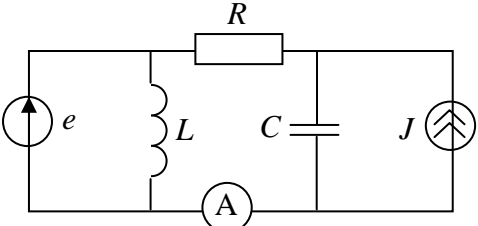
а) 20 Ом; б) 50 Ом; в) 40 Ом; г) 10 Ом; д) 30 Ом.

Ответы: 1-а; 2-г; 3-б; 4-г; 5-д; 6-д.

Задачи к теме 3

1.	$u(t) = 71.4\sin(\omega t - 90^\circ)$, В; $R_1 = 10$ Ом; $R_2 = 30$ Ом; $R_3 = 40$ Ом; $x_2 = 40$ Ом; $x_3 = 30$ Ом; $x_4 = 60$ Ом; $x_5 = 60$ Ом. Определить амплитудное значение входного тока и общее сопротивление цепи.	
2.	$J(t) = 5.65\sin(\omega t + 30^\circ)$, А; $R_1 = 4$ Ом; $R_2 = 3$ Ом; $x_1 = 3$ Ом; $x_2 = 4$ Ом; $x_3 = 4$ Ом. Определить амплитудное значение напряжения на источнике тока и общее сопротивление цепи.	

3.	$e(t) = 11.3 \sin(\omega t + 90^\circ)$, В; $J(t) = 5.65 \sin \omega t$, А; $f = 1.595$ МГц; $L_1 = 1$ мкГн; $L_2 = 0.4$ мкГн; $C = 16.6$ нФ; $R = 2$ Ом. Определить i методом контурных токов.	
4.	$J(t) = 2.82 \sin \omega t$, А; $f = 15.95$ кГц; $L = 80$ мкГн; $C = 2.5$ мкФ; $R = 4$ Ом. Определить показание амперметра методом контурных токов.	
5.	$e(t) = 5.657 \sin(\omega t + 90^\circ)$, В; $J(t) = 2.82 \sin \omega t$, А; $f = 1.595$ кГц; $L = 0.2$ мГн; $C = 50$ мкФ; $R = 2$ Ом. Определить i методом узловых потенциалов.	
6.	$e(t) = 141 \sin \omega t$, В; $J(t) = 7.07 \sin(\omega t - 90^\circ)$, А; $f = 318.5$ Гц; $L = 10$ мГн; $C = 25$ мкФ; $R = 20$ Ом. Определить амплитудное значение тока i методом узловых потенциалов.	
7.	Показания приборов: $V = 282$ В, $A = A_1 = 1$ А, $R = x_L$. Определить x_L .	

8.	<p>Показания приборов: $A_1 = 8 \text{ A}$, $A_2 = 10 \text{ A}$, $R = 10 \text{ Ом}$, $x_L = x_C$ Определить показание вольтметра.</p>	
9.	<p>$e(t) = 22.62 \sin(\omega t + 180^\circ)$, В; $J(t) = 7.97 \sin(\omega t + 45^\circ)$, А; $f = 159.5 \text{ Гц}$; $L_1 = 8 \text{ мГн}$; $L_2 = 2 \text{ мГн}$; $C = 500 \text{ мкФ}$; $R = 4 \text{ Ом}$. Определить i методом эквивалентного генератора.</p>	
10.	<p>$e(t) = 11.31 \sin(\omega t + 90^\circ)$, В; $J(t) = 5.657 \sin(\omega t + 90^\circ)$, А; $f = 15.95 \text{ кГц}$; $L = 20 \text{ мкГн}$; $C = 5 \text{ мкФ}$; $R_1 = R_2 = 2 \text{ Ом}$. Определить показание амперметра и i методом эквивалентного генератора.</p>	
11.	<p>$e(t) = 14.1 \sin(\omega t + 180^\circ)$, В; $J(t) = 0.3535 \sin(\omega t - 53.13^\circ)$, А; $f = 159.5 \text{ кГц}$; $L = 10 \text{ мкГн}$; $C = 0.125 \text{ мкФ}$; $R = 6 \text{ Ом}$. Определить показание амперметра методом наложения.</p>	
<p>Ответы: 1) $\underline{Z} = 28 + j42 = 50.47e^{j56.3} \text{ Ом}$, $I_m = 1.42 \text{ A}$; 2) $\underline{Z} = 3.5 + j3.5 = 4.93e^{j45} \text{ Ом}$, $U_{Jm} = 27.8 \text{ В}$; 3) $i(t) = 6.32 \sin(\omega t - 153^\circ)$, А; 4) 3.14 А; 5) 0 А; 6) 14.1 А; 7) 141 Ом; 8) 120 В; 9) $i(t) = 4 \sin(\omega t - 135^\circ)$, А; 10) 4 А, $i(t) = 5.64 \sin(\omega t + 180^\circ)$, А; 11) 0.846 А.</p>		

4. Резонанс в цепях синусоидального тока

Новые слова и словосочетания

резонанс	резонанс напряжений
добротность	резонанс токов
реактивный элемент	полоса пропускания
резонансные кривые	характеристическое сопротивление
волновая проводимость	резонансный фильтр

Резонанс – это такой режим электрической цепи, содержащей емкости и индуктивности, при котором общее входное сопротивление или входная проводимость цепи будут чисто вещественными. В этом режиме цепь потребляет только активную мощность и входные ток и напряжение совпадают по фазе. Различают резонансы напряжений, токов и сложной цепи.

Резонанс напряжений

Резонанс напряжений – это резонанс при последовательном соединении участков цепи с индуктивным и емкостным характером (рис. 4.1).

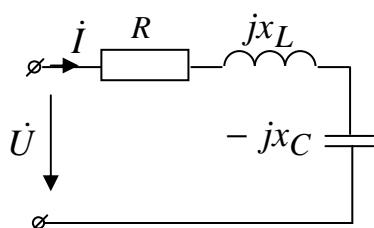


Рис. 4.1

Полное сопротивление цепи $\underline{Z} = R + j(x_L - x_C)$.

Исходя из определения резонанса, выведем условие резонанса: $x_L = x_C$ или $\omega L = 1/\omega C$. В режиме резонанса напряжений за счет компенсации реактивных сопротивлений входное сопротивление цепи будет вещественным $\underline{Z} = R$ и наименьшим, следовательно, ток станет максимальным: $\dot{i}_{\max} = \dot{U}/R$.

Резонанс напряжений может быть достигнут изменением частоты, емкости или индуктивности:

- если заданы L и C , то резонансная частота $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$;
- если заданы L и ω , то резонансная емкость $C_0 = 1/\omega^2 L$;
- если заданы C и ω , то резонансная индуктивность находится по формуле $L_0 = 1/\omega^2 C$.

Если реактивные сопротивления $x_L = x_C$ при резонансе больше активного сопротивления R , то напряжения на реактивных элементах $\dot{U}_L = jx_L \dot{I}$, $\dot{U}_C = -jx_C \dot{I}$ будут равны по модулю ($U_L = U_C$) и могут значительно превосходить по величине приложенное напряжение. Поэтому резонанс при последовательном соединении называют резонансом напряжений. Превышение напряжения на реактивных элементах над входным напряжением имеет место при условии

$$R < \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho,$$

где $\rho = \sqrt{L/C}$ [Ом] – волновое (характеристическое) сопротивление контура.

Отношение $Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\rho}{R}$ определяет во сколько раз напряжение на реактивных элементах при резонансе превышает входное.

Добротность контура Q определяет резонансные свойства контура.

Угол между входным напряжением и током в режиме резонанса $\varphi = \arctg \frac{x_L - x_C}{R} = 0$. Следовательно, реактивная мощность цепи $Q = UI \sin \varphi = 0$, и цепь в режиме резонанса потребляет только активную мощность $P = UI \cos \varphi$.

Физическая причина возникновения повышенных напряжений – это колебания энергии, запасаемой попеременно в электрическом поле емкостного элемента и в магнитном поле индуктивного элемента.

При резонансе напряжений малые количества энергии, поступающей от источника и компенсирующей потери энергии в сопротивлении R , достаточны для поддержания незатухающих колебаний в системе больших количеств энергии магнитного и электрического полей.

Покажем, что при резонансе в любой момент времени суммарная энергия электрического и магнитного полей

$$W_{эл} + W_{м} = \frac{Cu_C^2}{2} + \frac{Li_L^2}{2}$$

остаётся постоянной.

Пусть $u_C = U_{Cm} \sin \omega t$, тогда $i = C \frac{du_C}{dt} = U_{Cm} \cdot \omega C \cos \omega t = I_m \cos \omega t$.

Подставив эти выражения в предыдущее выражение, получим

$$W_{\text{эл}} + W_{\text{М}} = \frac{CU_{\text{См}}^2}{2} \sin^2 \omega t + \frac{LI_m^2}{2} \cos^2 \omega t.$$

Амплитуда тока $I_m = U_{\text{См}} \cdot \omega C$, а при резонансе $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$,

т.е. $LI_m^2 = CU_{\text{См}}^2$.

Следовательно,

$$W_{\text{эл}} + W_{\text{М}} = \frac{CU_{\text{См}}^2}{2} (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = \frac{CU_{\text{См}}^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} = \text{const}.$$

Зависимости полного $Z = \sqrt{R^2 + x^2}$, реактивного $x = \omega L - 1/\omega C$ сопротивлений и угла сдвига фаз $\varphi = \text{arctg} \frac{x}{R}$ от частоты приведены на рис. 4.2.

В аппаратуре связи, автоматики и т.д. большое практическое значение имеют зависимости токов и напряжений от частоты для цепей, в которых возможен резонанс. Эти зависимости называются **резонансными кривыми** (рис. 4.3).

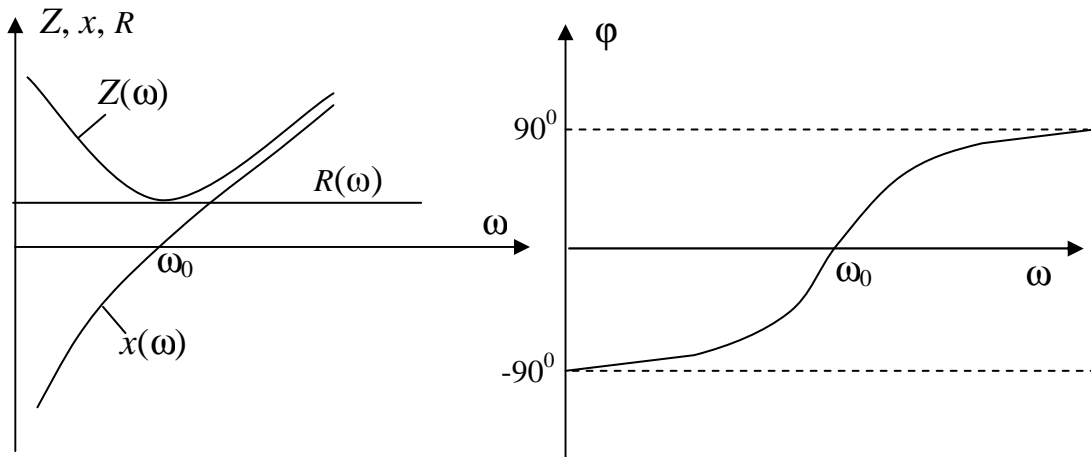


Рис. 4.2

Ток $I(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$ достигает максимального значения в

режиме резонанса. Напряжение на индуктивном элементе $U_L = \omega LI$. При $\omega = 0$ $U_L = 0$, при $\omega \rightarrow \infty$ $U_L \rightarrow U$. Напряжение на емкостном

элементе $U_C = \frac{I}{\omega C}$ при $\omega = 0$ равно входному напряжению U , при

$\omega \rightarrow \infty$ $U_C \rightarrow 0$. На рис. 4.3 видно, что наибольшие значения напряжений на индуктивном и емкостном элементах получаются при угловых

частотах, несколько отличающихся от резонансной. Максимум U_L имеет место при частоте $\omega_L > \omega_0$, а максимум U_C при частоте $\omega_C < \omega_0$.

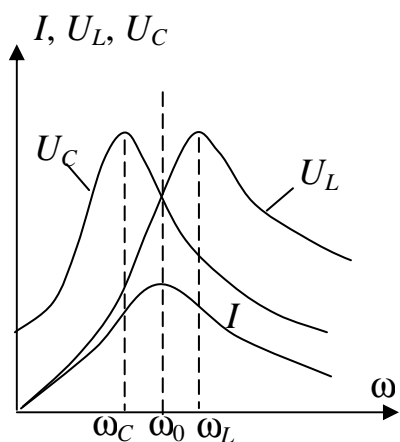


Рис. 4.3

Чем меньше R при неизменных остальных параметрах схемы, т.е. чем больше добротность Q , тем меньше отличаются ω_L и ω_C от резонансной частоты и тем острее становятся все три резонансные кривые $I(\omega)$, $U_C(\omega)$, $U_L(\omega)$.

Как видно из рис. 4.3, входной ток при резонансе резко изменяет свою величину, что приводит к частотным искажениям сигнала. Чтобы эти искажения не превышали нормы, спектр сигнала не должен выходить за пределы **полосы пропускания**

$$P_\omega = |\omega_1 - \omega_2| = \frac{\omega_0}{Q}, \text{ которая определяется}$$

по уровню $I_{\max} / \sqrt{2}$ резонансной кривой тока $I(\omega)$ (рис. 4.4).

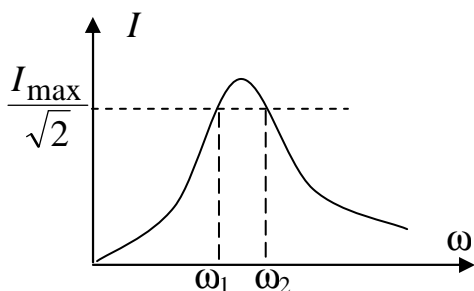


Рис. 4.4

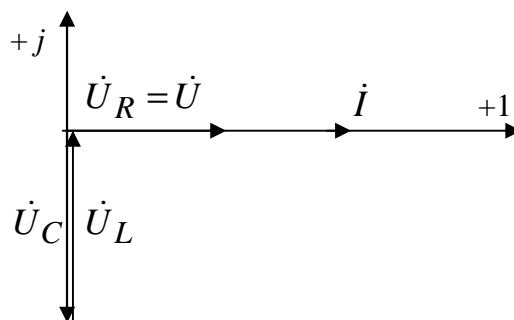


Рис. 4.5

Векторная диаграмма резонанса напряжений представлена на рис. 4.5.

В электроэнергетических устройствах в большинстве случаев резонанс напряжений – явление нежелательное, так как при резонансе напряжения установок могут в несколько раз превышать их рабочие напряжения. Но, например, в радиотехнике, телефонии резонанс напряжений применяется для настройки цепей на заданную частоту.

Резонанс токов

Резонанс токов – это резонанс при параллельном соединении участков цепи с индуктивным и емкостным характером.

Пусть на вход цепи подано напряжение \dot{U} (рис. 4.6), тогда токи в параллельных ветвях определяются по закону Ома:

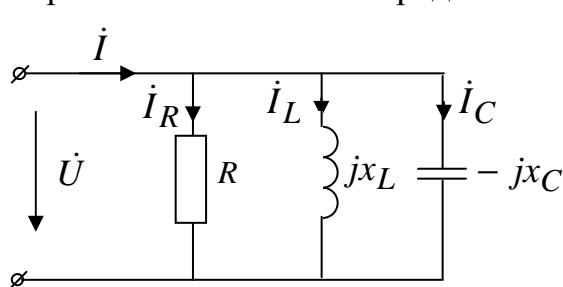


Рис. 4.6

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}}{R} = g\dot{U}; \quad \dot{I}_L = \frac{\dot{U}}{jx_L} = -\dot{U} \cdot jb_L;$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{-jx_C} = \dot{U} \cdot jb_C,$$

где $g = \frac{1}{R}$; $b_L = \frac{1}{x_L}$; $b_C = \frac{1}{x_C}$ —

проводимости ветвей.

Общий ток по первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_C + \dot{I}_L = \dot{U}(g + j(b_C - b_L)) = \dot{U} \cdot \underline{Y},$$

где $\underline{Y} = g + j(b_C - b_L)$ — комплекс полной проводимости цепи.

В режиме резонанса мнимая часть входной проводимости должна быть равна нулю. Следовательно, **условие резонанса токов**:

$$b_L = b_C \quad \text{или} \quad \frac{1}{\omega L} = \omega C.$$

Резонанс токов, как и резонанс напряжений, может быть достигнут изменением частоты, емкости или индуктивности. При этом резонансные величины определяются по формулам:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad C_0 = \frac{1}{\omega^2 L}; \quad L_0 = \frac{1}{\omega^2 C}.$$

Так как реактивные проводимости в режиме резонанса компенсируют друг друга, то результирующая проводимость $\underline{Y} = \frac{1}{R}$ будет минимальна. Тогда **при неизменном приложенном напряжении входной ток будет минимальным**.

Угол между входным током \dot{I} и приложенным напряжением \dot{U} ра-

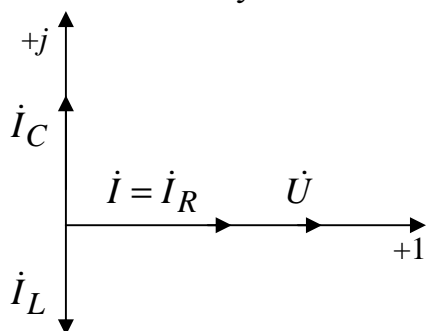


Рис. 4.7

вен $\varphi = \arctg \frac{b_C - b_L}{g} = 0$, значит, реак-

тивная мощность в режиме резонанса токов $Q = UI \sin \varphi$ равна нулю, а активная $P = UI \cos \varphi = U^2 / R$.

Векторная диаграмма при резонансе в рассматриваемой цепи приведена на рис. 4.7.

При резонансе токи I_L и I_C могут значительно превосходить общий ток. Поэтому резонанс при параллельном соединении называют резонансом токов.

Превышение токов в реактивных элементах над общим током цепи возникает при условии

$$g < \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \gamma,$$

где $\gamma = \sqrt{\frac{C}{L}}$ – волновая проводимость контура.

Добротность контура в данном случае будет определять, во сколько раз токи на реактивных элементах превышают входной ток:

$$Q = \frac{I_L}{I} = \frac{I_C}{I} = \frac{\gamma}{g}.$$

При резонансе токов также как и при резонансе напряжений происходят колебания энергии в цепи. Энергия полей переходит из конденсатора в катушку и обратно, не обмениваясь с источником, питающим цепь. Источник энергии только покрывает потери энергии в ветви с проводимостью g .

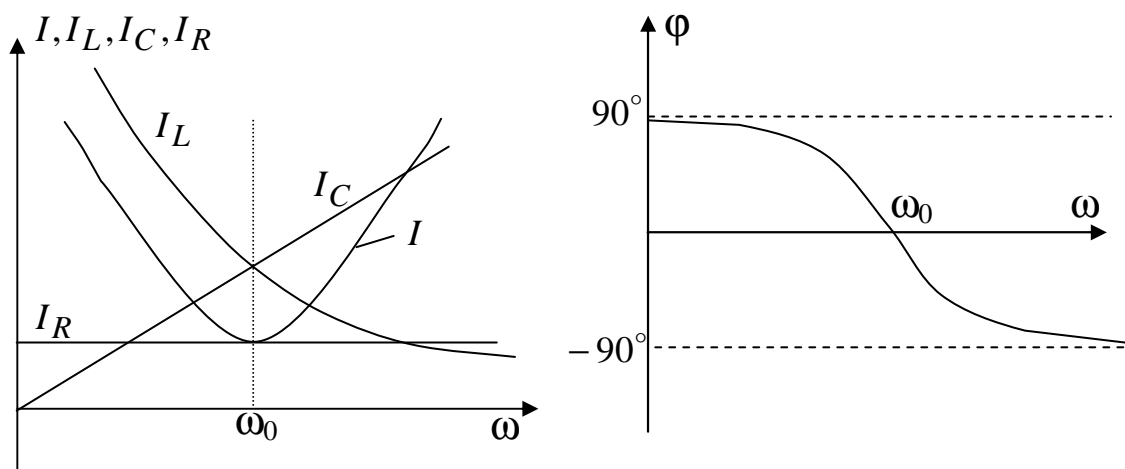


Рис. 4.8

Изменяя частоту при заданном входном напряжении и параметрах цепи,

можно построить частотные характеристики $I_L(\omega) = \frac{U}{\omega L}$, $I_C(\omega) = U\omega C$,

$I_R(\omega) = Ug$, $I = UY$, а также $\varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{b_C - b_L}{g}$ (рис. 4.8).

4.3. Резонанс токов в параллельном контуре с потерями

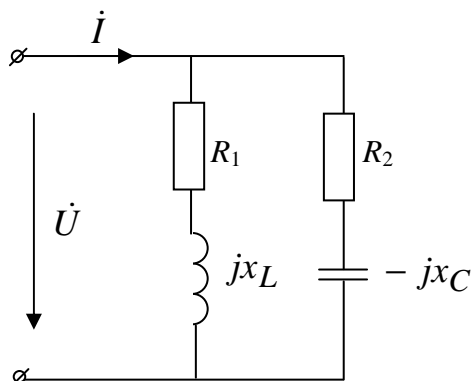


Рис. 4.9

Если в цепях с емкостью и индуктивностью имеются активные сопротивления (рис. 4.9), то проводимости ветвей определяются в виде

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{R_1 + jx_L}; \quad \underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2 - jx_C}.$$

По условию резонанса мнимая часть полной проводимости цепи

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = \frac{1}{R_1 + jx_L} + \frac{1}{R_2 - jx_C}$$

должна равняться нулю.

Чтобы выделить мнимую часть умножим числитель и знаменатель на комплексно сопряженные числа:

$$\frac{R_1 - jx_L}{R_1^2 + x_L^2} + \frac{R_2 + jx_C}{R_2^2 + x_C^2} = \left(\frac{R_1}{R_1^2 + x_L^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + x_C^2} \right) + j \left(\frac{x_C}{R_2^2 + x_C^2} - \frac{x_L}{R_1^2 + x_L^2} \right).$$

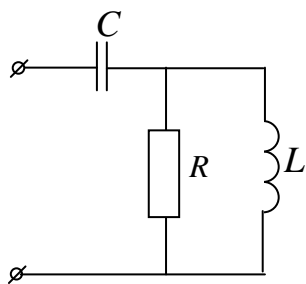
Приравняв к нулю мнимую часть, находим условие резонанса в параллельном контуре с потерями:

$$\frac{x_C}{R_2^2 + x_C^2} = \frac{x_L}{R_1^2 + x_L^2}.$$

Из этого выражения находим резонансную частоту:

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}, \quad \text{где } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \rho = \sqrt{L/C}.$$

Резонанс токов используется в радиотехнике для ослабления сигналов определенной частоты и в электроэнергетике для уменьшения потерь в линии. Также явление резонанса используется в электронике для фильтрации определенных гармоник – резонансные фильтры.



Пример 4.1. Определить индуктивность, при которой в цепи с параметрами $R = 20 \text{ Ом}$, $C = 10 \text{ мкФ}$, $\omega = 10^4 \text{ рад/с}$ наступает резонанс. Также определить добротность контура.

Решение.

Запишем комплекс входного сопротивления цепи и выделим его мнимую часть

$$\underline{Z} = -jx_C + \frac{jx_L R}{R + jx_L} = -jx_C + \frac{jx_L R \cdot (R - jx_L)}{R^2 + x_L^2} =$$

$$\frac{x_L^2 R}{R^2 + x_L^2} + j \left(-x_C + \frac{R^2 x_L}{R^2 + x_L^2} \right) = R_{\text{ЭКВ}} + jx_{\text{ЭКВ}}.$$

При резонансе мнимая часть входного сопротивления должна равняться нулю, т.е. $\frac{R^2 x_L}{R^2 + x_L^2} = x_C$, учитывая, что $x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{10^5} = 10$ Ом подстав-

ляем данные $\frac{20^2 x_L}{20^2 + x_L^2} = 10$ и находим $x_L = 20$ Ом. Следовательно,

$$L = \frac{x_L}{\omega} = \frac{20}{10^4} = 2 \text{ мГн. Тогда добротность контура } Q = \frac{x_C}{R_{\text{ЭКВ}}} = \frac{10}{10} = 1.$$

Пример 4.2.

Определить ток I_C , если при $R = x_L$ в режиме резонанса известны токи: $I = 10$ А, $I_{R1} = 6$ А (рис. 4.10).

Решение. Ток $\dot{I}_{RL} = \frac{Ue^{j0}}{R + jx_L} = I_{RL}e^{-j45^\circ}$ т.к. $R = x_L$. Построим векторную диаграмму, приняв начальную фазу входного напряжения равной нулю. Ток \dot{I}_{RL} имеет действительную и мнимую части $\dot{I}_{RL} = I_R + jI_L$, причем по условию они равны.

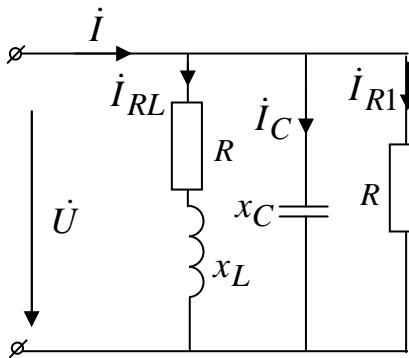


Рис. 4.10

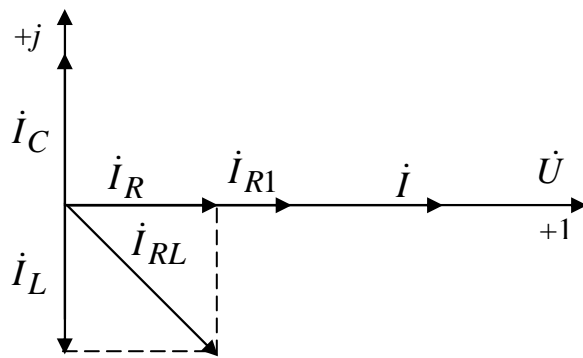


Рис. 4.11

Построим лучевую диаграмму токов учитывая, что на емкостном элементе ток опережает напряжение на 90° , на индуктивном отстает на 90° , а на резистивном элементе ток и напряжение совпадают по фазе (рис. 4.11).

При построении векторной диаграммы было учтено, что при резонансе входные ток и напряжение совпадают по фазе. Из векторной диаграммы легко найти ток $I_R = I - I_{R1} = 10 - 6 = 4$ А. В режиме резонанса $I_L = I_C$. По условию $I_R = I_L$, следовательно, $I_C = 4$ А.

Тест для самоконтроля

1. Какое из приведенных утверждений неверно?

Резонанс – это такой режим электрической цепи, при котором...

- а) входные ток и напряжение совпадают по фазе;
- б) цепь является потребителем чисто активной нагрузки;
- в) реактивная мощность цепи равна нулю;
- г) $\cos \varphi = 0$.

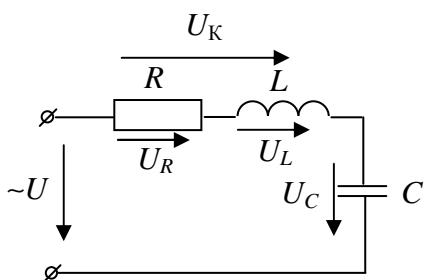
2. Резонанс напряжений возникает при равенстве

- а) сопротивлений индуктивного и емкостного элементов;
- б) индуктивности и емкости;
- в) входного напряжения напряжению на емкостном элементе.

3. Какое из приведенных соотношений несправедливо при резонансе напряжений в цепи рис. 4.1?

- а) $I^2 x_L = I^2 x_C$; б) $IR < U$; в) $\dot{U}_L + \dot{U}_C = 0$; г) $P = S$; д) $Z = R$.

4. Определите напряжения U_R , U_L , U_C , U_K и ток I при резонансе напряжений, если $U = 220$ В, $R = 22$ Ом, $x_L = 200$ Ом. Укажите неправильный ответ.



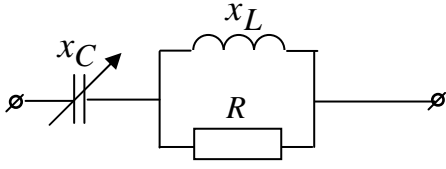
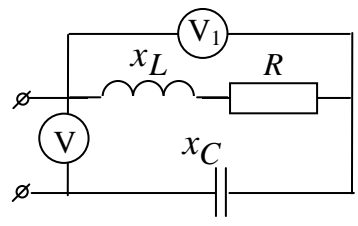
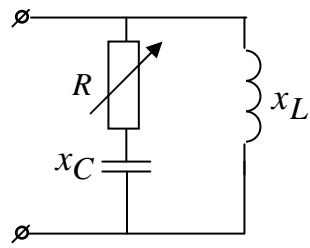
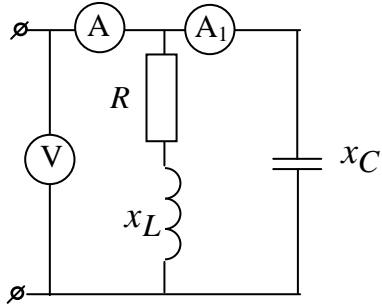
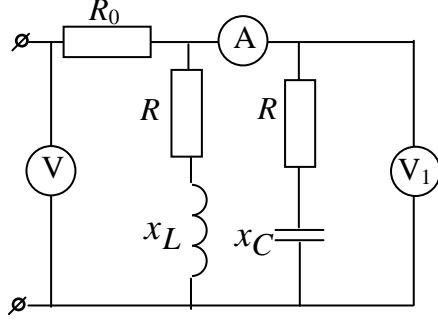
- а) $I = 10$ А; б) $U_R = 220$ В;
- в) $U_L = 2000$ В; г) $U_C = 2000$ В;
- д) $U_K = 2200$ В.

5. Какое из приведенных соотношений несправедливо при резонансе токов в цепи рис. 4.6?

- а) $I = I_R$; б) $I_L = I_C$; в) $\cos \varphi = 1$; г) $S = I_R^2 \cdot R$; д) $b_C > b_L$.

Ответы: 1-г; 2-а; 3-б; 4-д; 5-д.

Задачи к теме 4

1.	$x_L = 4 \text{ Ом}$, $R = 4 \text{ Ом}$. Определить величину x_C , при которой в цепи наступит резонанс.	
2.	Показания приборов в режиме резонанса: $V=6 \text{ В}$, $V_1=10 \text{ В}$. Определить добротность контура.	
3.	При каком значении R в цепи наступит резонанс, если $x_L = 12.5 \text{ Ом}$, $x_C = 8 \text{ Ом}$?	
4.	Показания приборов в режиме резонанса: $A=5 \text{ А}$, $A_1=8.66 \text{ А}$. Определить входное напряжение, если $R = 5 \text{ Ом}$.	
5.	Показания приборов в режиме резонанса: $A=1 \text{ А}$, $V_1=50 \text{ В}$. Определить входное напряжение, если $R = x_L = x_C$, $R_0 = 35.4 \text{ Ом}$.	
Ответы: 1) 2 Ом; 2) 1.33; 3) 6 Ом; 4) 100 В; 5) 100 В		

5. Расчет линейных электрических цепей с взаимной индуктивностью

Новые слова и словосочетания

магнитный поток	явление взаимоиндукции
потокосцепление	одноименные зажимы
число витков	разноименные зажимы
взаимная индуктивность	согласное включение
ЭДС самоиндукции	встречное включение

5.1. Индуктивно связанные элементы цепи

Явление электромагнитной индукции представляет собой одно из важнейших явлений, наблюдаемых в магнитном поле. Оно было обнаружено в 1831 г. английским физиком Майклом Фарадеем.

Суть явления состоит в том, **что при всяком изменении магнитного потока, пронизывающего какой-либо контур, в контуре наводится ЭДС e .**

Опытным путем было установлено, что ЭДС e прямо пропорциональна скорости изменения потокосцепления

$$e = -\frac{d\psi}{dt}.$$

Потокосцепление контура ψ равно алгебраической сумме потоков, пронизывающих отдельные витки обмотки (катушки)

$$\psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots + \Phi_n \text{ [Вб]},$$

где n – число магнитных потоков.

Если все витки катушки пронизываются одним и тем же магнитным потоком, то потокосцепление равно произведению магнитного потока на число витков w : $\psi = w\Phi$.

При наличии в цепи катушек, взаимодействующих своими магнитными потоками, цепь называют **индуктивно связанной** или **цепью с взаимной индуктивностью**.

Явление наведения ЭДС в каком-либо контуре при изменении тока в другом контуре называется **явлением взаимоиндукции**.

Пусть есть два витка, удаленных на расстояние друг от друга (рис. 5.1). По первому витку протекает ток i_1 , по второму – i_2 .

Поток Φ_1 , создаваемый током i_1 , частично замыкается, не пересекая второй виток (Φ_{11}), частично проходит через второй виток (Φ_{21}):

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{21}.$$

Поток второго витка Φ_2 , создаваемый током i_2 , частично замыкается, не пересекая первый виток (Φ_{22}), частично проходит через него (Φ_{12}): $\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{12}$.

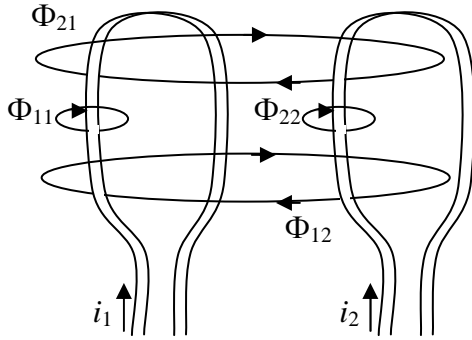


Рис. 5.1

Пусть число витков первого контура равно w_1 , а второго – w_2 . Тогда потокосцепление первого контура равно

$$\Psi_1 = w_1(\Phi_1 \pm \Phi_{12}),$$

а потокосцепление второго контура

$$\Psi_2 = w_2(\Phi_2 \pm \Phi_{21}).$$

При этом каждый контур характеризуется собственной индуктивностью [Гн]:

$$L_1 = \frac{w_1 \cdot \Phi_{11}}{i_1}; \quad L_2 = \frac{w_2 \cdot \Phi_{22}}{i_2},$$

а индуктивная связь характеризуется взаимной индуктивностью [Гн]:

$$M_{12} = \frac{w_1 \cdot \Phi_{12}}{i_2}; \quad M_{21} = \frac{w_2 \cdot \Phi_{21}}{i_1}.$$

Для линейных цепей $M_{12} = M_{21} = M$ [Гн].

Индуктивно связанные катушки помечают стрелками и указывают их одноименные зажимы, как показано на рис. 5.2.

Степень магнитной связи двух катушек характеризуется **коэффициентом связи**

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}.$$

При **согласном включении** взаимные магнитные потоки Φ_{21} и Φ_{12} совпадают по направлению. При этом токи ориентированы одинаковым образом относительно одноименных зажимов (рис. 5.2, а).

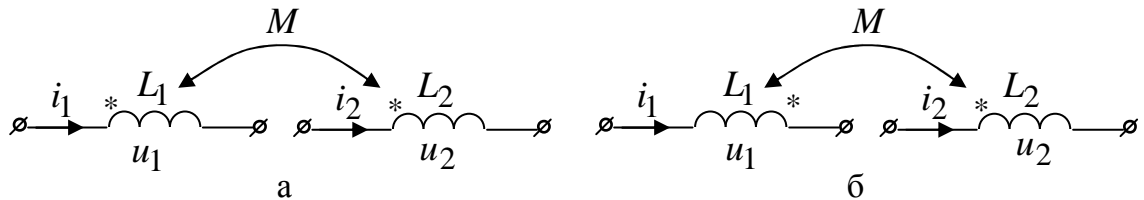


Рис. 5.2

При **встречном включении** взаимные магнитные потоки Φ_{21} и Φ_{12} направлены навстречу друг другу. При этом токи ориентированы различным образом относительно одноименных зажимов (рис. 5.2, б). Мгновенное значение напряжения на индуктивно связанных катушках составляет:

$$u_1 = w_1 \frac{d(\Phi_{11} \pm \Phi_{12})}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} = u_{L1} \pm u_{M1};$$

$$u_2 = w_2 \frac{d(\Phi_{22} \pm \Phi_{21})}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} = u_{L2} \pm u_{M2},$$

Знак «+» берется при согласном включении катушек, а «-» – при встречном включении.

При синусоидальных токах комплексы действующих значений напряжений на катушках

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{L1} \pm \dot{U}_{M1} = jx_{L1}\dot{I}_1 \pm jx_M\dot{I}_2;$$

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_{L2} \pm \dot{U}_{M2} = jx_{L2}\dot{I}_2 \pm jx_M\dot{I}_1,$$

где $x_{L1} = \omega L_1$; $x_{L2} = \omega L_2$;

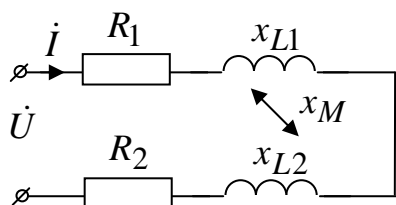
$x_M = \omega M$ [Ом] – реактивное сопротивление индуктивной связи; $\dot{U}_{M1} = jx_M\dot{I}_2$, $\dot{U}_{M2} = jx_M\dot{I}_1$ – комплексные напряжения взаимной индукции.

При согласном включении берется знак «+» и вектора \dot{U}_{M1} и \dot{U}_{M2} опережают свои токи \dot{I}_2 и \dot{I}_1 на 90° (индуктивный характер), а при встречном включении берется знак «-», и вектора \dot{U}_{M1} и \dot{U}_{M2} отстают от своих токов на 90° (емкостной характер).

При расчете цепи по уравнениям Кирхгофа и методом контурных токов напряжение $\dot{U}_M = \pm j\omega M\dot{I}$ учитывается наравне с другими падениями напряжения с учетом вида включения (согласное или встречное).

5.2. Последовательное соединение катушек

Пусть на вход цепи подано напряжение $\dot{U} = Ue^{j\psi}$, тогда комплексы действующих значений напряжений на отдельных элементах запишутся в виде:



$$\dot{U}_{R1} = \dot{I}R_1; \quad \dot{U}_{R2} = \dot{I}R_2;$$

$$\dot{U}_1 = jx_{L1}\dot{I} \pm jx_M\dot{I} = \dot{U}_{L1} \pm \dot{U}_M;$$

$$\dot{U}_2 = jx_{L2}\dot{I} \pm jx_M\dot{I} = \dot{U}_{L2} \pm \dot{U}_M.$$

Рис. 5.3

Входное сопротивление цепи $\underline{Z} = R_1 + R_2 + j(x_{L1} + x_{L2} \pm 2x_M)$.

Общий ток $\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{\dot{U}}{R_1 + R_2 + j(x_{L1} + x_{L2} \pm 2x_M)}$, при этом знак «+» берется при согласном включении катушек, а «-» – при встречном.

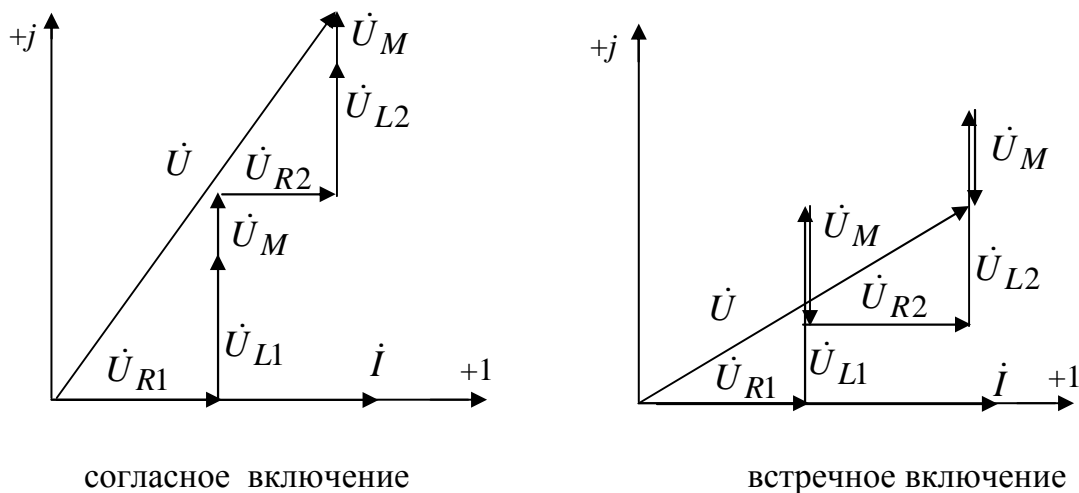


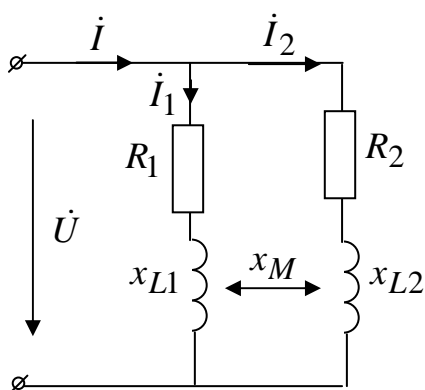
Рис. 5.4

Векторные диаграммы для последовательного соединения катушек при согласном и встречном включении представлены на рис. 5.4.

Так как полное сопротивление цепи при согласном включении больше, то **при неизменном действующем значении входного напряжения больший по величине ток будет соответствовать встречному включению.**

5.3. Параллельное соединение катушек

Пусть на вход цепи подано напряжение $\dot{U} = Ue^{j\psi}$. Запишем уравнения по законам Кирхгофа в комплексной форме с учетом влияния индуктивной связи:



связи:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2;$$

$$\dot{U} = \dot{I}_1 R_1 + jx_{L1} \dot{I}_1 \pm jx_M \dot{I}_2;$$

$$\dot{U} = \dot{I}_2 R_2 + jx_{L2} \dot{I}_2 \pm jx_M \dot{I}_1.$$

Совместное решение уравнений позволяет определить действующее значение входного тока:

$$i = \dot{U} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2(\pm jx_M)}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + x_M^2},$$

где $\underline{Z}_1 = R_1 + jx_{L1}$; $\underline{Z}_2 = R_2 + jx_{L2}$, при этом знак «+» берется при согласном включении катушек, а «-» – при встречном.

Анализируя полученное выражение можно сделать вывод, что *при неизменном входном напряжении больший ток будет также соответствовать встречному включению.*

5.4. Расчет сложных цепей с индуктивно связанными элементами

При составлении уравнений по законам Кирхгофа необходимо помнить следующее правило: *если в схеме согласное включение катушек, то напряжение самоиндукции (\dot{U}_L) и напряжение взаимной индукции (\dot{U}_M) одной катушки будут иметь одинаковые знаки, а при встречном – разные.*

При расчете цепи методом контурных токов порядок расчета и алгоритм расчета сохраняется, но наличие индуктивной связи вносит две особенности в выбор контурных токов и составление уравнений:

- желательно выбирать контурные токи так, чтобы через каждую индуктивно связанную катушку проходил только один контурный ток;
- при таком выборе контурных токов при составлении уравнений в общее сопротивление контура нужно добавить jx_M при согласном включении и $-jx_M$ при встречном.

Вид включения определяется по ориентации контурных токов относительно одноименных зажимов катушек.

Все остальные методы расчета применяются только после развязки индуктивной связи, которая будет рассмотрена ниже.

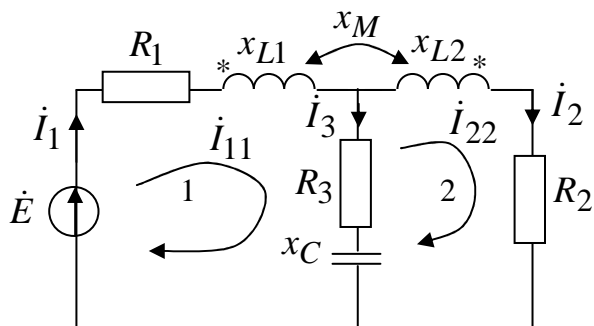
Между индуктивно связанными элементами происходит обмен энергией, поэтому при составлении баланса мощности в формуле расчета реактивной потребляемой мощности появляется еще одно слагаемое $\pm 2x_M I_d I_r \cos(\psi_d - \psi_r)$, где знак «+» ставится при согласном включении катушек и «-» при встречном, I_d, I_r – действующие значения токов индуктивно связанных катушек; ψ_d, ψ_r – начальные фазы.

Итак, потребляемая реактивная мощность будет определяться по формуле

$$Q_{\Pi} = \sum_i I_i^2 x_{Li} - \sum_k I_k^2 x_{Ck} \pm 2x_M I_d I_r \cos(\psi_d - \psi_r).$$

Пример. 5.1.

Определить все токи в схеме, если $\dot{E} = 120e^{j0}$ В, $x_C = 60$ Ом, $x_M = 20$ Ом, $x_{L1} = x_{L2} = 40$ Ом, $R_1 = R_2 = R_3 = 20$ Ом.



Решение.

Рассчитаем схему методом законов Кирхгофа. Токи ориентированы разным образом относительно одноименных зажимов (ток \dot{I}_1 втекает в звездочку, а \dot{I}_2 вытекает). Следовательно, в схеме встречное

включение. Запишем систему уравнений по законам Кирхгофа:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3;$$

$$1\text{к: } \dot{I}_1 R_1 + \dot{I}_1 jx_{L1} - \dot{I}_2 jx_M + \dot{I}_3 (R_3 - jx_C) = \dot{E};$$

$$2\text{к: } \dot{I}_2 R_2 + \dot{I}_2 jx_{L2} - \dot{I}_1 jx_M - \dot{I}_3 (R_3 - jx_C) = 0.$$

Подставляем данные:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$$

$$1\text{к: } \dot{I}_1 20 + \dot{I}_1 j40 - \dot{I}_2 j20 + \dot{I}_3 (20 - j60) = 120;$$

$$2\text{к: } \dot{I}_2 20 + \dot{I}_2 j40 - \dot{I}_1 j20 - \dot{I}_3 (20 - j60) = 0.$$

Решаем полученную систему и находим токи ветвей $\dot{I}_1 = 2.23e^{-j26.5}$ А,

$$\dot{I}_2 = 2.23e^{-j63.4}$$
 А, $\dot{I}_3 = 1.41e^{j45}$ А.

Для проверки составим баланс мощности.

$$\dot{S}_{\text{и}} = \dot{E}\dot{I}_1^* = 120 \cdot 2.23e^{j26.5} = 240 + j120 \text{ ВА.}$$

$$P_{\text{п}} = \dot{I}_1^2 R_1 + \dot{I}_2^2 R_2 + \dot{I}_3^2 R_3 = 2.23^2 \cdot 20 + 2.23^2 \cdot 20 + 1.41^2 \cdot 20 = 240 \text{ Вт.}$$

$$Q_{\text{п}} = \dot{I}_1^2 x_{L1} + \dot{I}_2^2 x_{L2} - 2x_M \dot{I}_1 \dot{I}_2 \cos(\psi_1 - \psi_2) - \dot{I}_3^2 x_C = 2.23^2 \cdot 40 + 2.23^2 \cdot 40 - 2 \cdot 20 \cdot 2.23 \cdot 2.23 \cos(-26.5 + 63.4) - 1.41^2 \cdot 60 = 120 \text{ Вар.}$$

Баланс сошелся, следовательно, расчет произведен верно.

Решим эту же задачу методом контурных токов. Выберем контурные токи так, чтобы каждый из них проходил только через одну катушку. Контурный ток \dot{I}_{11} втекает в звездочку, а \dot{I}_{22} вытекает, следовательно, включение также встречное. Составляем уравнения

$$\dot{I}_{11} (R_1 + jx_{L1} + R_3 - jx_C) - \dot{I}_{22} (R_3 - jx_C) - \dot{I}_{22} jx_M = \dot{E};$$

$$\dot{I}_{22} (R_2 + jx_{L2} + R_3 - jx_C) - \dot{I}_{11} (R_3 - jx_C) - \dot{I}_{11} jx_M = 0.$$

Подставляем данные

$$\dot{I}_{11}(20 + j40 + 20 - j60) - \dot{I}_{22}(20 - j60 + j20) = 120;$$

$$\dot{I}_{22}(20 + j40 + 20 - j60) - \dot{I}_{11}(20 - j60 + j20) = 0.$$

Решаем полученную систему и находим контурные токи

$$\dot{I}_{11} = 2.23e^{-j26.5} \text{ А}, \quad \dot{I}_{22} = 2.23e^{-j63.4} \text{ А}$$

Через контурные токи находим токи ветвей $\dot{I}_1 = \dot{I}_{11} = 2.23e^{-j26.5} \text{ А},$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{22} = 2.23e^{-j63.4}, \quad \dot{I}_3 = \dot{I}_{11} - \dot{I}_{22} = 1.41e^{j45} \text{ А}.$$

5.5. Развязка индуктивной связи

Развязка индуктивной связи используется с целью упрощения расчетов. Последовательно соединенные индуктивно связанные катушки могут быть заменены эквивалентными схемами без индуктивных связей, как показано на рис. 5.5.

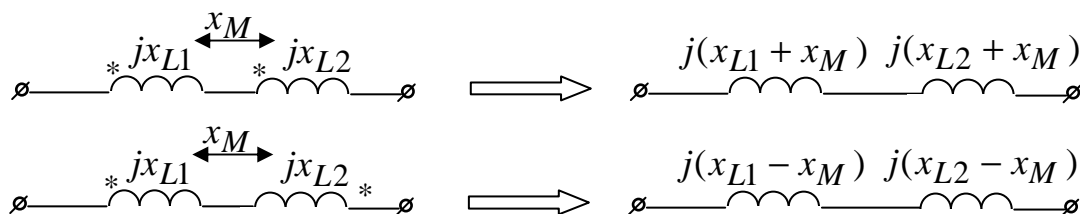


Рис. 5.5

При развязке индуктивных связей катушек, имеющих общий узел (рис. 5.6), ориентируются только на положение зажимов относительно общего узла.

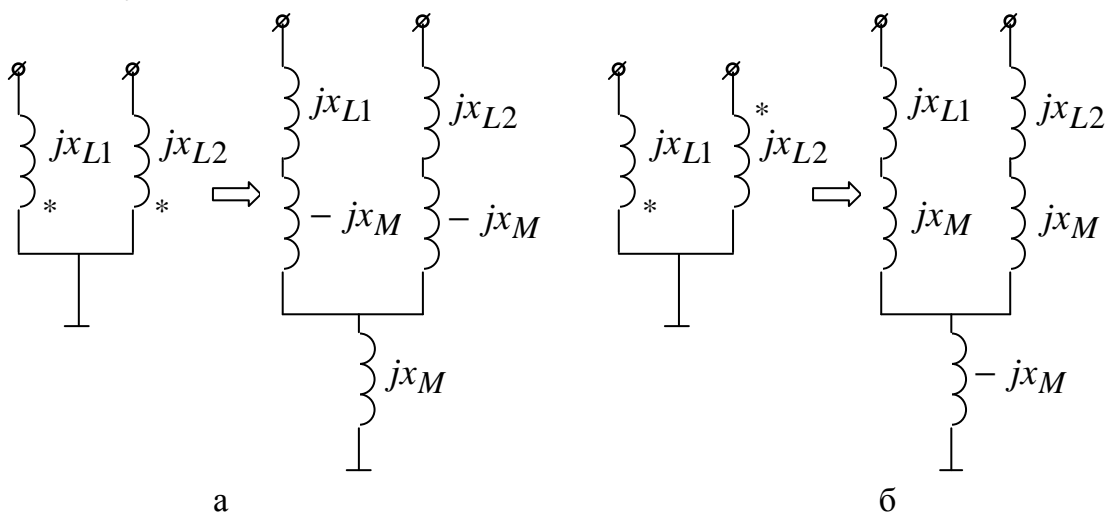


Рис. 5.6

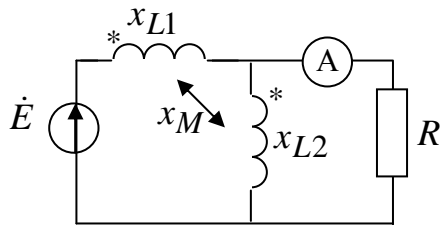
Правило развязки:

- если индуктивно связанные элементы подключены к общему узлу одноименными зажимами, то в эквивалентной схеме без индуктивной связи последовательно к каждому из них подключается сопротивление $-jx_M$, а в общую ветвь сопротивление jx_M (рис. 5.6, а);
- если индуктивно связанные элементы подключены к общему узлу разноименными зажимами, то в эквивалентной схеме без индуктивной связи последовательно к каждому элементу подключается сопротивление jx_M , а в общую ветвь сопротивление $-jx_M$ (рис. 5.6, б).

После развязки схема может быть рассчитана любым методом.

Пример.5.2.

Методом эквивалентного генератора определить показание амперметра I_A , если $\dot{E} = 114.7e^{j30}$ В, $R = x_{L2} = x_M = 10$ Ом, $x_{L1} = 20$ Ом.



Решение.

Сделаем развязку индуктивной связи (рис. 5.7).

$$\text{Ток } \dot{I}_A = \frac{\dot{U}_x}{\underline{Z}_\Gamma + (R - jx_M)}.$$

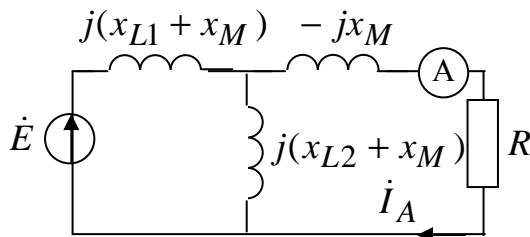


Рис. 5.7

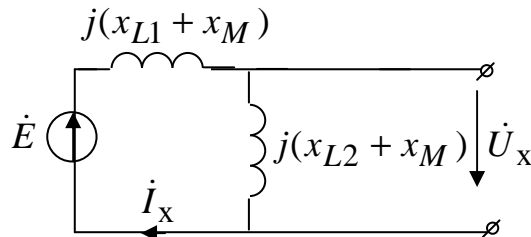


Рис. 5.8

Найдем напряжение холостого хода (рис. 5.8) $\dot{U}_x = \dot{I}_x(jx_{L2} + jx_M)$,

$$\text{где } \dot{I}_x = \frac{\dot{E}}{jx_{L1} + jx_{L2} + 2jx_M} = \frac{114.7e^{j30}}{50j} = 2.23e^{-j60} \text{ А,}$$

$$\text{тогда } \dot{U}_x = 2.23e^{-j60}(j10 + j10) = 45.88e^{j30} \text{ В.}$$

$$\underline{Z}_\Gamma = \frac{(jx_{L1} + jx_M) \cdot (jx_{L2} + jx_M)}{jx_{L1} + jx_{L2} + 2jx_M} = \frac{-600}{50j} = 12e^{j90} \text{ Ом.}$$

$$\text{Ток } \dot{I}_A = \frac{45.88e^{j30}}{12e^{j90} + (10 - j10)} = 4.5e^{j18.6} \text{ А. Амперметр покажет ток 4.5А.}$$

5.6. Двухобмоточный трансформатор в линейном режиме

Трансформатор предназначен для преобразования величин переменных токов и напряжений при неизменной частоте. В простейшем случае он представляет собой две обмотки на замкнутом сердечнике из ферромагнитного материала (рис. 5.9).

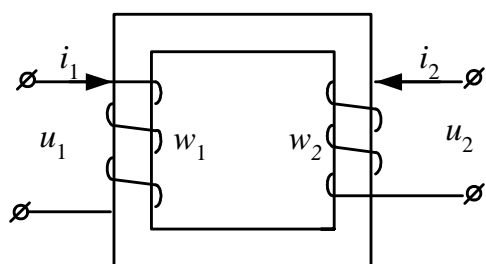


Рис. 5.9

Обмотка трансформатора, к которой подводится питание, называется **первичной** (u_1, i_1, w_1), другая обмотка, к которой подается нагрузка, называется **вторичной** (u_2, i_2, w_2). Передача энергии из первичной во вторичную обмотку происходит благодаря явлению взаимной индукции.

Если сердечник во всех режимах работы трансформатора ненасыщен, то параметры трансформатора можно считать постоянными. Комплексная схема замещения такого линейного трансформатора представлена на рис. 5.10.

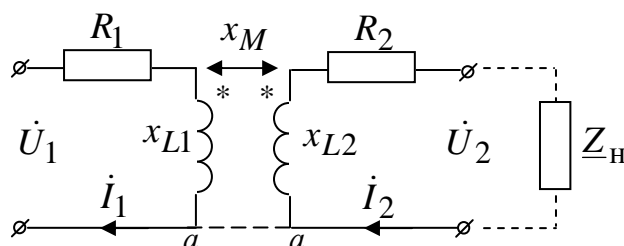


Рис. 5.10

Если в режиме холостого хода ($Z_H = \infty, I_2 = 0$) $U_1 > U_2$, то трансформатор называют понижающим, если $U_1 < U_2$ – повышающим.

Коэффициент трансформации – это отношение напряжения на зажимах обмотки высшего напряжения к напряжению на зажимах обмотки низшего напряжения в режиме холостого хода:

$$k_{\text{тр}} = \frac{U_{\text{ВН}}^x}{U_{\text{НН}}^x}.$$

Для схемы рис. 5.10 по законам Кирхгофа запишем уравнения трансформатора

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 R_1 + jx_{L1} \dot{I}_1 - jx_M \dot{I}_2 &= \dot{U}_1; \\ \dot{I}_2 R_2 + jx_{L2} \dot{I}_2 + \dot{U}_2 - jx_M \dot{I}_1 &= 0, \end{aligned}$$

где $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_H = \dot{I}_2 (R_H + jx_H)$.

Построим векторную диаграмму токов и напряжений для первичной и вторичной цепей.

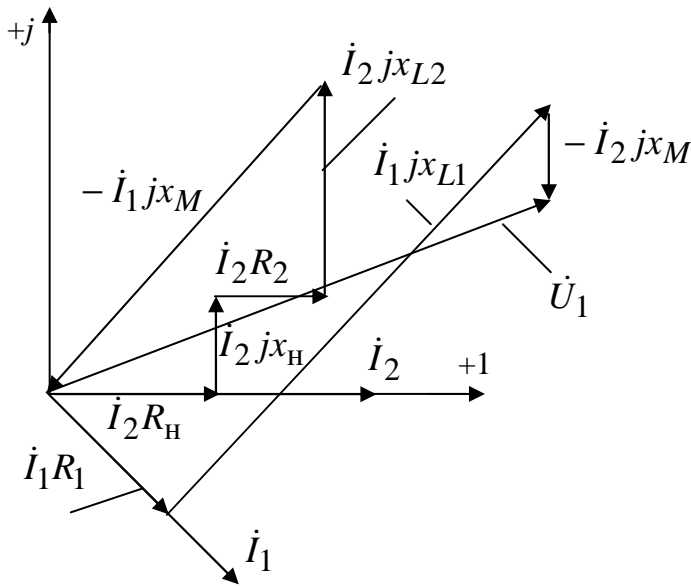


Рис. 5.11

Точка *a* является общей для обеих обмоток и в реальных трансформаторах заземляется по технике безопасности. Из этой точки начнем строить векторную диаграмму. Для этого зададимся током \dot{I}_2 и отложим векторы \dot{I}_2 , $\dot{I}_2 R_H$, $\dot{I}_2 jx_H$, $\dot{I}_2 R_H$, $\dot{I}_2 jx_{L2}$ (рис. 5.11), где $\phi_H > 0$. Соединив конец вектора $\dot{I}_2 jx_{L2}$ с началом векторной диаграммы получим вектор

$-\dot{I}_1 jx_M$. Вектор \dot{I}_1 отложим под углом 90° к вектору $-\dot{I}_1 jx_M$ (в сторону опережения). Затем строим вектора $\dot{I}_1 R_1$, $\dot{I}_1 jx_{L1}$, $-\dot{I}_2 jx_M$. Их сумма равна \dot{U}_1 (рис. 5.11).

Решив уравнения трансформатора относительно тока первичной обмотки, получим

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{(R_1 + R_{BH}) + j(x_{L1} + x_{BH})},$$

где $R_{BH} = \frac{x_M^2}{(R_2 + R_H)^2 + (x_{L2} + x_H)^2} (R_2 + R_H)$ – вносимое активное сопротивление;

$x_{BH} = -\frac{x_M^2}{(R_2 + R_H)^2 + (x_{L2} + x_H)^2} (x_{L2} + x_H)$ – вносимое реактивное сопротивление.

R_{BH} всегда больше нуля и в нем поглощается энергия, которая в реальной цепи передается из первичной обмотки во вторичную.

Чтобы передать максимальную активную мощность во вторичную обмотку (в сопротивление R_{BH}) должны выполняться соотношения:

$$R_{BH} = R_1 \text{ и } x_{L1} + x_{BH} = 0.$$

Если $U_1 > U_2$ и $R_1 \ll x_{L1}$ и одинаковом магнитном потоке коэффициент трансформации равен

$$k_{\text{тр}} = \frac{w_1}{w_2},$$

где w_1, w_2 – числа витков первичной и вторичной обмоток.

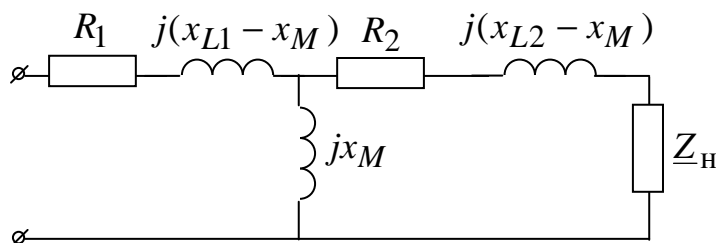


Рис. 5.12

К схеме трансформатора (рис. 5.10) можно применить правило развязки, если за общий узел принять точку a . Эквивалентная схема трансформатора без индуктивной связи представлена на рис. 5.12.

Тест для самоконтроля

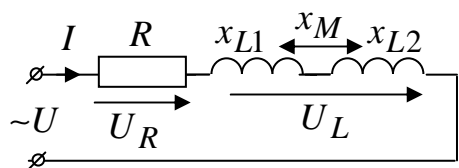


Рис. 5.13

1. Как изменятся действующие значения тока I и напряжений U_R и U_L (рис. 5.13) при уменьшении расстояния между двумя индуктивно связанными и согласно включенными катушками? Указать правильный ответ.

а) U_R увеличится; б) U_L уменьшится;

в) I увеличится; г) U_R не изменится; д) I уменьшится.

2. Как изменятся действующие значения тока I и напряжений U_R и U_L и активная мощность цепи P (рис. 5.13) при увеличении расстояния между двумя индуктивно связанными и встречно включенными катушками? Указать правильный ответ.

а) I увеличится; б) U_R увеличится; в) U_L не изменится;

г) P уменьшится.

3. Электрическая цепь рис. 5.13 содержит две индуктивно связанные и согласно включенные катушки, имеющие индуктивности $L_1 = 0.5$ Гн и $L_2 = 2$ Гн. Определить индуктивное сопротивление цепи в двух положениях катушек: коэффициент связи $k = 0.5$ и $k = 0.25$, если $\omega = 400$ рад/с.

а) $x = 600$ Ом ($k = 0.5$), $x = 800$ Ом ($k = 0.25$);

б) $x = 800$ Ом ($k = 0.5$), $x = 600$ Ом ($k = 0.25$);

в) $x = 1200 \text{ Ом}$ ($k = 0.5$), $x = 1400 \text{ Ом}$ ($k = 0.25$);

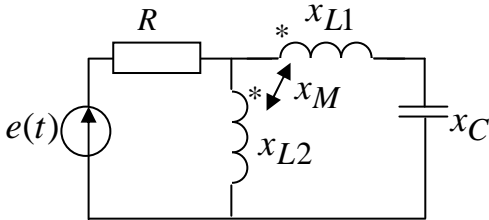
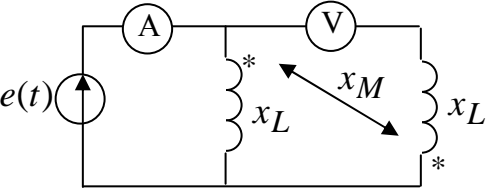
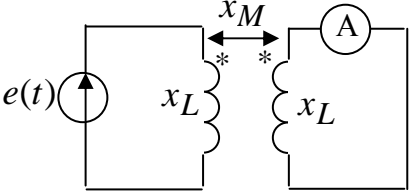
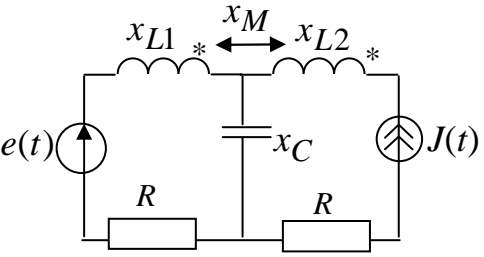
г) $x = 1400 \text{ Ом}$ ($k = 0.5$), $x = 1200 \text{ Ом}$ ($k = 0.25$).

4. Будет ли работать трансформатор, если к первичной обмотке подвести постоянное напряжение?

а) да; б) нет.

Ответы: 1-д; 2-г; 3-г; 4-б.

Задачи к теме 5

<p>1. Определить входное сопротивление цепи, если $R = 10 \text{ Ом}$, $x_{L1} = 20 \text{ Ом}$, $x_{L2} = x_C = 10 \text{ Ом}$, $x_M = 5 \text{ Ом}$.</p>	
<p>2. Амперметр показывает 10 А, $x_L = 10 \text{ Ом}$, $x_M = 5 \text{ Ом}$. Определить показание вольтметра.</p>	
<p>3. Определить показание амперметра, если $e(t) = 30\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ В}$, $x_L = 10 \text{ Ом}$, $x_M = 5 \text{ Ом}$.</p>	
<p>4. Определить вырабатываемую источником ЭДС мощность, если $e(t) = 100\sqrt{2} \sin(\omega t) \text{ В}$, $J(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ А}$, $R = x_{L1} = x_{L2} = x_C = 20 \text{ Ом}$, $x_M = 10 \text{ Ом}$ Ответ: -1000 ВА</p>	
<p>Ответы: 1) $12.5e^{j36.8} \text{ Ом}$; 2) 150 В; 3) 2 А; 4) -1000 ВА</p>	

6. Трехфазные цепи

Новые слова и словосочетания

трехфазная система	фазный ток
симметричная система	линейный ток
линейное напряжение	статор
фазное напряжение	ротор
фазный множитель	нейтральный провод

6.1. Получение трехфазных ЭДС. Трехфазные источники

Трехфазная цепь является частным случаем многофазных электрических систем, представляющих собой совокупность электрических цепей, в которых действуют ЭДС одинаковой частоты, сдвинутые друг относительно друга на определенный угол.

Каждая из частей многофазной системы, характеризующаяся одинаковым током, называется *фазой*.

Таким образом, понятие «фаза» имеет в электротехнике два различных значения:

- фаза как аргумент синусоидально изменяющейся величины;
- фаза как часть многофазной цепи.

Важной предпосылкой развития многофазных электрических систем явилось открытие явления вращающегося магнитного поля (Г.Феррарис и Н.Тесла) в 1888г. Первые электрические двигатели были двухфазными, но они имели невысокие рабочие характеристики.

В настоящее время наибольшее распространение получили трехфазные системы. На трехфазном токе работают все крупные электростанции и потребители. Это связано с рядом их преимуществ по сравнению, как с однофазными, так и с другими многофазными системами:

- экономичность передачи электроэнергии на большие расстояния;
- возможность сравнительно простого получения кругового вращающегося магнитного поля, необходимого для работы как асинхронного, так и синхронного двигателя;
- возможность получения в одной установке двух эксплуатационных напряжений – фазного и линейного.

Большой вклад в разработку трехфазных систем внес выдающийся русский ученый М.О. Доливо-Добровольский, считающийся основоположником трехфазных систем. Им были разработаны основные звенья генерирования, передачи, распределения и преобразования электро-

энергии трехфазного тока: трехфазный генератор, трансформатор и асинхронный двигатель.

Источником трехфазного напряжения является трехфазный синхронный генератор (рис. 6.1), на статоре 1 которого размещается обмотка 2, состоящая из трех частей (фаз). Фазы этой обмотки располагаются на статоре таким образом, чтобы их магнитные оси были сдвинуты в пространстве друг относительно друга на угол 120° .

На рис. 6.1. каждая фаза обмотки статора условно показана состоящей из одного витка. Начала фаз обозначаются буквами A, B, C , а концы – X, Y, Z .

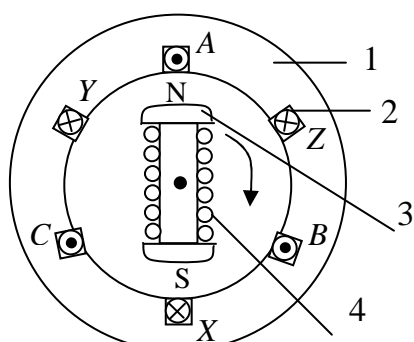


Рис. 6.1

Ротор 3 – это электромагнит, возбуждаемый постоянным током обмотки возбуждения 4, расположенной на роторе. При вращении ротора турбиной с равномерной скоростью в обмотках фаз статора индуцируются синусоидальные ЭДС одинаковой амплитуды и частоты, с начальными фазами, отличающимися друг от друга на 120° . На рис. 6.2 показаны график мгновенных значений и векторная диаграмма ЭДС трехфазного генератора.

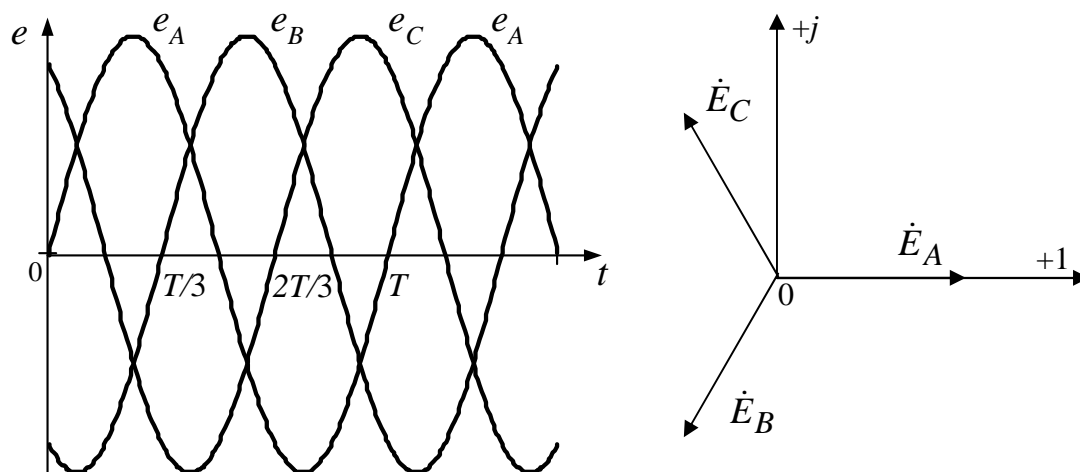


Рис.6.2

При построении графика мгновенных значений начальная фаза e_A выбрана равной нулю $\psi_A = 0$. Тогда мгновенные значения ЭДС запишутся в виде

$$e_A = E_m \sin \omega t; \quad e_B = E_m \sin(\omega t - 120^\circ); \quad e_C = E_m \sin(\omega t + 120^\circ).$$

Им соответствуют комплексные действующие значения:

$$\dot{E}_A = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = E_\phi; \quad \dot{E}_B = E_\phi e^{-j120^\circ}; \quad \dot{E}_C = E_\phi e^{j120^\circ}.$$

Такая система называется симметричной. Система ЭДС (напряжений, токов) называется *симметричной*, если она состоит из одинаковых по модулю ЭДС (напряжений, токов) одной и той же частоты, но сдвинутых относительно друг друга на 120° .

Фазный множитель a – это комплексная величина $a = e^{j120^\circ}$, которая применяется при расчете трехфазных цепей для упрощения записи. Таким образом, можно записать $\dot{E}_A = E_\phi$; $\dot{E}_B = E_\phi a^2$; $\dot{E}_C = E_\phi a$.

Алгебраическая сумма симметричной трехфазной системы равна нулю:

$$\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = E_\phi(1 + a^2 + a) = E_\phi(1 - 0.5 - 0.866j - 0.5 + 0.866j) = 0.$$

6.2. Способы соединения трехфазных источников

Существует два основных способа соединения обмоток генераторов и трансформаторов (источников) в трехфазных цепях: соединение звездой и соединение треугольником.

При соединении фаз источника звездой (условное обозначение Y) все концы фазных обмоток генератора соединяются в общий узел N – нейтральная точка источника (рис. 6.3). **Линейные провода** – это провода соединяющие генератор с приемниками. **Линейные напряжения** – это напряжения между линейными проводами ($\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$).

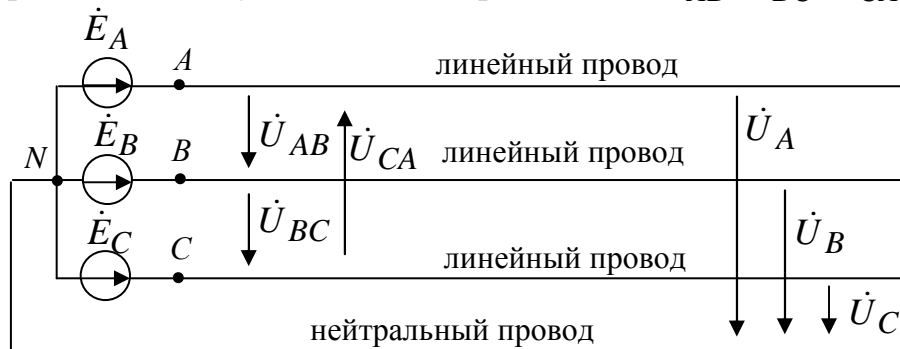


Рис. 6.3

Нейтральный провод – это провод, соединяющий нейтральные точки источника и приемника.

Фазные напряжения источника – это напряжения между линией и нейтральным проводом ($\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$), при этом $\dot{U}_A = \dot{E}_A$; $\dot{U}_B = \dot{E}_B$; $\dot{U}_C = \dot{E}_C$.

По второму закону Кирхгофа $\dot{U}_{AB} = \dot{E}_A - \dot{E}_B$; $\dot{U}_{BC} = \dot{E}_B - \dot{E}_C$; $\dot{U}_{CA} = \dot{E}_C - \dot{E}_A$, при этом линейные напряжения больше фазных ЭДС в $\sqrt{3}$ раз (рис. 6.4): $\dot{U}_л = \sqrt{3}\dot{E}_ф e^{j30}$.

Так как линейные напряжения определяются фазными ЭДС, то они также образуют симметричную систему и не зависят от сопротивления приемников. Векторная диаграмма представлена на рис. 6.4.

При соединении фаз источника треугольником (условное обозначение Δ) нейтральный провод отсутствует (рис 6.5). При этом линейные напряжения равны фазным ЭДС генератора и также образуют симметричную систему: $\dot{U}_{AB} = \dot{E}_A$; $\dot{U}_{BC} = \dot{E}_B$; $\dot{U}_{CA} = \dot{E}_C$.

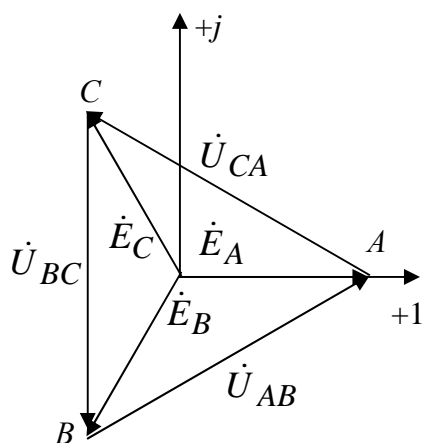


Рис. 6.4

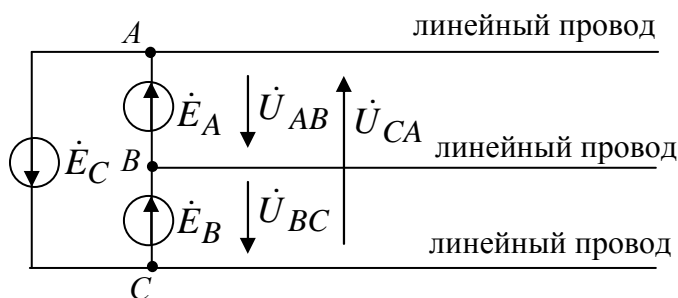


Рис. 6.5

6.3. Классификация и способы соединения потребителей

Приемники, включаемые в трехфазную цепь, могут быть либо однофазными, либо трехфазными. К однофазным приемникам относятся электрические лампы накаливания и другие осветительные приборы, различные бытовые приборы, однофазные двигатели и т.д. К трехфазным приемникам относятся трехфазные асинхронные двигатели и индукционные печи.

Обычно комплексные сопротивления фаз трехфазных приемников равны между собой, например, $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z} = Ze^{j\varphi}$. Такие приемники называют **симметричными**.

Если это условие не выполняется, то приемники называют **несимметричными**. При этом, если $Z_A = Z_B = Z_C$, то трехфазный приемник называют **равномерным**, если $\varphi_A = \varphi_B = \varphi_C$, то **однородным**.

Приемники также могут соединяться звездой (рис. 6.6, а), при этом $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ – **фазные напряжения приемника**, или напряжения на сопротивлении приемника. Общая точка звезды n называется **нейтральной точкой приемника**. **Линейные токи** – это токи, текущие в линейных проводах ($\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$). Ток, текущий в нейтральном проводе называется **током нейтрального (нулевого) провода** \dot{I}_N . Напряжение $\dot{U}_N = \dot{I}_N \underline{Z}_N$ называется **напряжением смещения**, \underline{Z}_N – сопротивление нулевого провода.

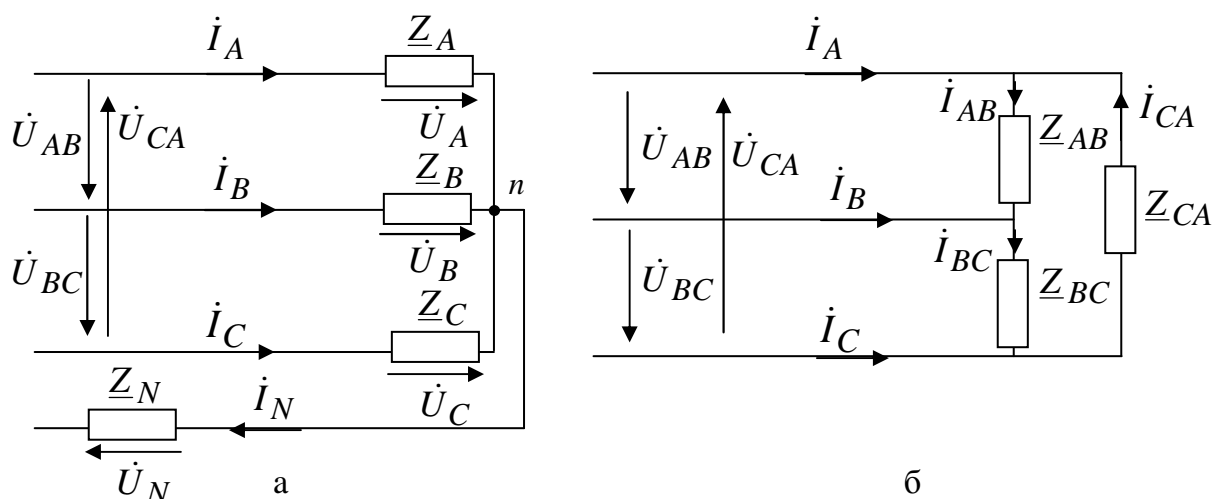


Рис. 6.6

При соединении приемников треугольником фазные напряжения приемника будут равны соответствующим линейным напряжениям (рис. 6.6, б).

Фазные токи – это токи, текущие в нагрузке ($\dot{I}_{AB}, \dot{I}_{BC}, \dot{I}_{CA}$). Линейные токи могут быть выражены через фазные по первому закону Кирхгофа: $\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}$; $\dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}$; $\dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}$.

При соединении нагрузки звездой фазные токи равны линейным.

На практике применяются различные комбинации соединений, например: обмотки генератора могут соединяться звездой, а нагрузка – звездой или треугольником; обмотки генератора соединены треугольником, а нагрузка – звездой или треугольником.

6.4 Расчет симметричных трехфазных цепей

В симметричном режиме симметричная система ЭДС питает симметричную нагрузку. В этом режиме системы токов и напряжений будут также симметричны, поэтому расчет ведется для одной фазы, а токи и напряжения остальных фаз находятся поворотом найденных векторов на угол 120° или -120° .

Способ соединения трехфазных потребителей звездой

Пример 6.1. Соединение звезда-звезда (рис. 6.7). Известны фазные ЭДС генератора и сопротивления фаз $\underline{Z}_A, \underline{Z}_B, \underline{Z}_C = \underline{Z} = Ze^{j\varphi}$.

Найти все линейные токи: $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$.

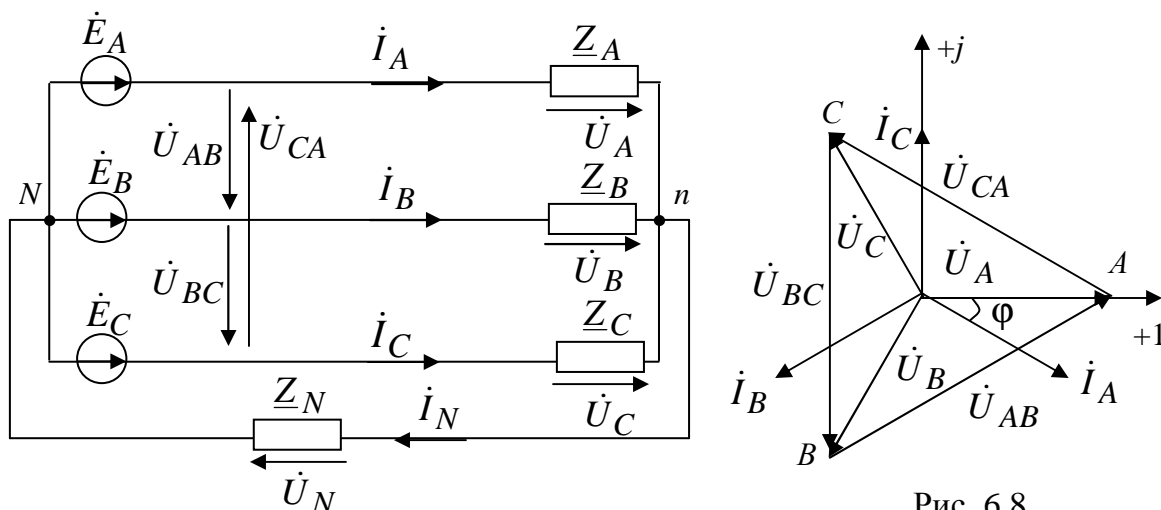


Рис. 6.7

Рис. 6.8

Решение. Нейтральные точки генератора и нагрузки в симметричном режиме могут быть соединены, так как они имеют одинаковые потенциалы. Тогда ток в фазе A : $\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_A}{\underline{Z}}$. Токи в фазах B и C выражаются через ток фазы A : $\dot{I}_B = a^2 \dot{I}_A$; $\dot{I}_C = a \dot{I}_A$. Линейные токи равны между собой и сдвинуты друг относительно друга на 120° .

Нейтральный провод не вносит при симметричном режиме никаких изменений, так как сумма линейных токов равна нулю и ток в нулевом проводе отсутствует: $\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = (1 + a^2 + a)\dot{I}_A = 0$.

Следовательно, и напряжение смещения $\dot{U}_N = \dot{I}_N \underline{Z}_N = 0$.

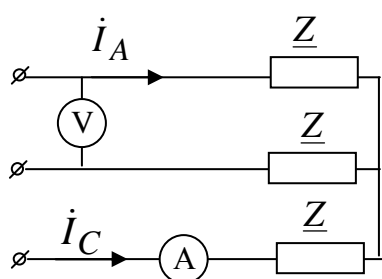
Фазное напряжение $\dot{U}_A = \dot{I}_A \underline{Z}$, тогда $\dot{U}_B = a^2 \dot{U}_A$; $\dot{U}_C = a \dot{U}_A$.

Линейные напряжения определяются как разности соответствующих фазных напряжений, например: $\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B$. Также можно считать как $\dot{U}_{AB} = \sqrt{3}\dot{U}_A e^{j30^\circ}$, тогда $\dot{U}_{BC} = a^2\dot{U}_{AB}$; $\dot{U}_{CA} = a\dot{U}_{AB}$.

Векторная диаграмма для симметричного режима представлена на рис. 6.8 ($\varphi = 30^\circ$).

Пример 6.2. Симметричная трехфазная цепь с сопротивлением фаз $\underline{Z} = 8 + 6j$ Ом подключена к симметричной сети. Определить показания амперметра и ток \dot{I}_C , если вольтметр показывает 380В.

Решение. В случае симметричной нагрузки при соединении фаз звездой $\dot{U}_л = \sqrt{3}\dot{U}_ф e^{j30^\circ}$. Напряжение в фазе A $\dot{U}_A = 380/\sqrt{3} e^{-j30^\circ} = 220 e^{-j30^\circ}$ В.



Ток в фазе A определяем по закону Ома:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}} = \frac{220 e^{-j30^\circ}}{8 + j6} = 22 e^{-j66.8^\circ} \text{ А.}$$

В симметричном режиме модули токов равны, значит, амперметр покажет 22А. Ток фазы C будет опережать ток фазы A на 120° :

$$\dot{I}_C = a\dot{I}_A = 22 e^{-j66.8^\circ} e^{j120^\circ} = 22 e^{j53.2^\circ} \text{ А.}$$

Способ соединения трехфазных потребителей треугольником

Пример 6.3. Определить напряжение \dot{U}_{BC} симметричного трехфазного источника (рис. 6.9), если известно сопротивление $\underline{Z} = 300 e^{-j30^\circ}$ Ом и ток $\dot{I}_A = 1.27 e^{j0^\circ}$ А.

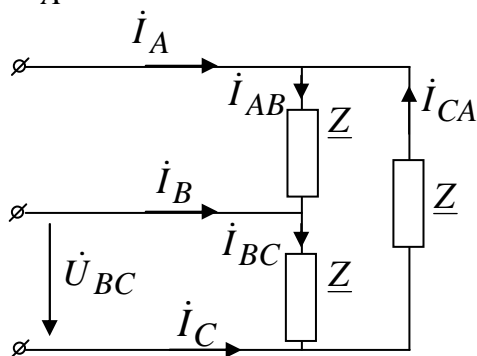


Рис. 6.9

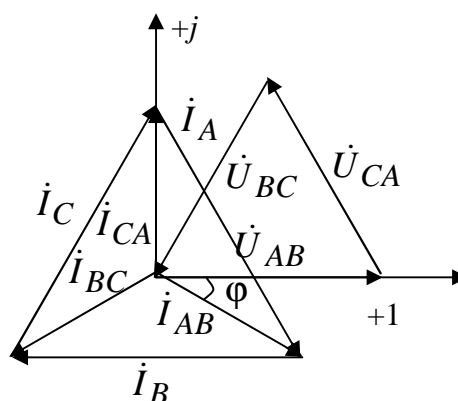


Рис. 6.10

Решение. При симметричной нагрузке

$\dot{I}_Л = \sqrt{3}\dot{i}_\phi e^{-j30}$ (рис. 6.10). Следовательно, можно найти фазный ток

$$\dot{I}_{AB}: \dot{I}_{AB} = \frac{\dot{I}_A}{\sqrt{3}} e^{j30} = \frac{1.27}{\sqrt{3}} e^{j30} = 0.734 e^{j30} \text{ А.}$$

При симметричной нагрузке фазные и линейные токи образуют симметричные системы, значит

$$\dot{I}_{BC} = \dot{I}_{AB} e^{-j120} = 0.734 e^{j(30-120)} = 0.734 e^{-j90} \text{ А.}$$

По закону Ома $\dot{U}_{BC} = \dot{I}_{BC} \underline{Z} = 0.734 e^{-j90} \cdot 300 e^{-j30} = 220 e^{-j120} \text{ В.}$

Векторная диаграмма представлена на рис. 6.10.

Расчет сложной симметричной цепи

Пример 6.4. Сложная симметричная цепь (рис. 6.11, а)

$\dot{E}_A = E_\phi$; $\dot{E}_B = E_\phi a^2$; $\dot{E}_C = E_\phi a$, также заданы комплексные сопротивления участков каждой из фаз $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3, \underline{Z}_4$. Нужно найти все токи.

Решение.

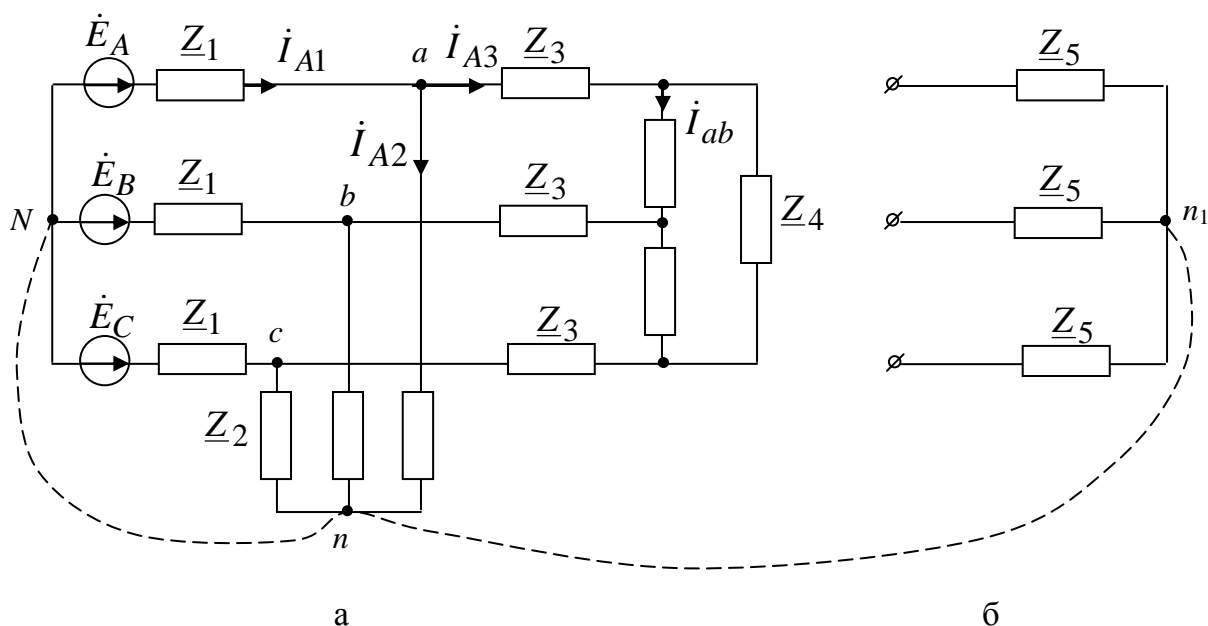


Рис. 6.11

При расчете все симметричные треугольники преобразовываются в звезды. В нашей задаче симметричный треугольник с сопротивлениями сторон \underline{Z}_4 преобразован в звезду, сопротивление каждого луча которой

равно $\frac{\underline{Z}_4 \cdot \underline{Z}_4}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_4} = \frac{\underline{Z}_4}{3}$. Затем рассчитываем сопротивление эквивалентной звезды $\underline{Z}_5 = \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_4}{3}$ (рис. 6.11, б).

На векторной диаграмме нейтральные точки всех звезд (N, n, n_1) в силу симметрии лежат в центре тяжести равностороннего треугольника

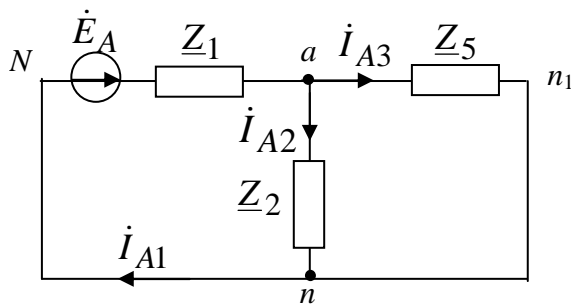


Рис. 6.12

линейных напряжений. Следовательно, потенциалы точек одинаковы, и если их соединить нейтральным проводом (показан пунктиром на рис. 6.11), то ток в нем будет равен нулю, и режим работы не изменится. В этом случае фазы работают независимо друг от друга и одну из них (например, фазу A) можно выде-

литель вместе с нейтральным проводом (рис. 6.12).

Тогда по закону Ома и правилу параллельных ветвей имеем:

$$i_{A1} = \frac{\dot{E}_A}{\underline{Z}_{\text{ЭКВ}}},$$

где $\underline{Z}_{\text{ЭКВ}} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_5}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_5}$; $i_{A2} = i_{A1} \frac{\underline{Z}_5}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_5}$; $i_{A3} = i_{A1} \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_5}$.

В одной из фаз треугольника $i_{ab} = \frac{i_{A3}}{\sqrt{3}} e^{j30}$. Токи в остальных участках фаз легко найти с помощью фазового оператора.

Например, $i_{B1} = a^2 i_{A1}$, $i_{C1} = a i_{A1}$ и т.д.

6.5. Расчет несимметричных трехфазных цепей

Расчет несимметричной трехфазной цепи не отличается от расчета обычной однофазной цепи с несколькими источниками. Если цепь сложная, то обычно применяют метод узловых потенциалов.

Если цепь не очень сложная, то с помощью эквивалентных преобразований ее упрощают до схемы с двумя узлами и находят линейные токи. Затем по законам Ома и Кирхгофа определяют все остальные токи.

Рассмотрим несколько примеров.

Способ соединения трехфазных потребителей звездой

Соединение потребителей звездой без нулевого провода применяется только при симметричной нагрузке всех трех фаз. Между тем условие равномерной загрузки фаз не всегда выполняется (например, при осветительной нагрузке) и напряжения на фазах получаются неодинаковыми. Кроме того, в данной схеме недопустимо включение или отключение одной фазы нагрузки. В таких случаях применяется соединение нагрузки звездой с нулевым проводом (рис. 6.7).

Данная цепь может рассматриваться как трехконтурная цепь с тремя источниками ЭДС. Так как в схеме имеются только два узла, проведем расчет методом узловых потенциалов.

В схеме рис. 6.7. действует симметричная система ЭДС $\dot{E}_A = E_\phi$; $\dot{E}_B = E_\phi a^2$; $\dot{E}_C = E_\phi a$. Пусть $\phi_N = 0$, тогда уравнение узловых потенциалов

$$\phi_n \left(\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_N} \right) = \frac{\dot{E}_A}{Z_A} + \frac{\dot{E}_B}{Z_B} + \frac{\dot{E}_C}{Z_C} \quad \text{и напряжение}$$

$$\text{смещения } \dot{U}_N = \phi_n - \phi_N = \frac{Y_A \cdot \dot{E}_A + Y_B \cdot \dot{E}_B + Y_C \cdot \dot{E}_C}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_N}, \quad \text{где } Y_A = \frac{1}{Z_A};$$

$$Y_B = \frac{1}{Z_B}; \quad Y_C = \frac{1}{Z_C}; \quad Y_N = \frac{1}{Z_N} \quad \text{— проводимости соответствующих вет-$$

вей. Зная напряжение смещения, по второму закону Кирхгофа, находим

$$\text{линейные токи: } \dot{I}_A = \frac{\dot{E}_A - \dot{U}_N}{Z_A}; \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{E}_B - \dot{U}_N}{Z_B}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{E}_C - \dot{U}_N}{Z_C}.$$

$$\text{Ток нейтрального провода } \dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_N}{Z_N}.$$

Фазные напряжения определяются в виде

$$\dot{U}_A = \dot{E}_A - \dot{U}_N; \quad \dot{U}_B = \dot{E}_B - \dot{U}_N; \quad \dot{U}_C = \dot{E}_C - \dot{U}_N.$$

Замечания

1. При различных сопротивлениях фаз и наличии сопротивления в нулевом проводе $Z_N \neq 0$ фазные напряжения различны.
2. Если нулевой провод отсутствует ($Z_N = \infty$ и $Y_N = 0$), то все вышеприведенные формулы справедливы, причем $\dot{I}_N = 0$ и фазные напряжения также будут различны.
3. Если $Z_N = 0$, то $\dot{U}_N = 0$ и фазные напряжения образуют симметричную систему: $\dot{U}_A = \dot{E}_A$; $\dot{U}_B = \dot{E}_B$; $\dot{U}_C = \dot{E}_C$.

Вывод: ток нейтрального провода выравнивает фазные напряжения (при $\underline{Z}_N = 0$).

Пример 6.5. Трехфазный источник с $U_{\text{л}} = 100$ В симметричен. Определить показание вольтметра, если известны $\underline{Z}_1 = 200$ Ом, $\underline{Z}_2 = -j200$ Ом (рис. 6.13).

Решение. Ток $\dot{I}_C = -\dot{I}_A$, пусть $\dot{U}_{AB} = 100e^{j0}$ В. По второму закону Кирхгофа $\dot{I}_A(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) + \dot{U}_{CA} = 0$. Найдем линейный ток фазы А:

$$\dot{I}_A = \frac{-\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{-100e^{j120}}{200 - 200j} = -0.355e^{j165} = 0.355e^{-j15} \text{ А.}$$

Показание вольтметра найдем по второму закону Кирхгофа:

$$\dot{U}_V = \dot{I}_A \underline{Z}_1 - \dot{U}_{AB} = 0.355e^{-j15} \cdot 200 - 100 = 36.4e^{-j150} \text{ В.}$$

Вольтметр покажет 36.4 В. Так как в схеме нет нейтрального провода, симметрия фазных напряжений нарушается (рис. 6.14).

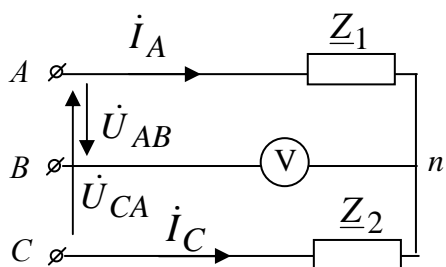


Рис. 6.13

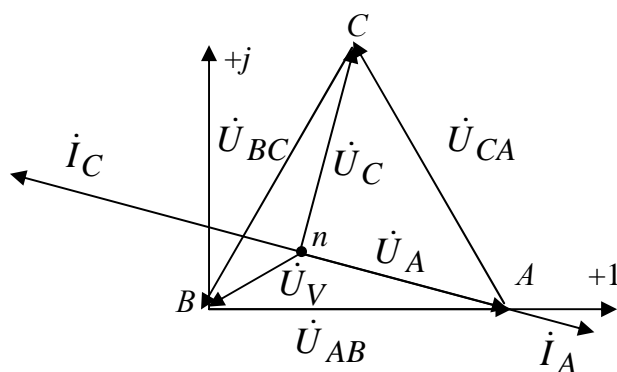


Рис. 6.14

Способ соединения трехфазных потребителей треугольником

При соединении потребителей треугольником сопротивления фаз могут быть неодинаковыми и даже, в крайнем случае, включаться или отключаться независимо друг от друга.

Если на зажимах несимметричной трехфазной нагрузки заданы линейные напряжения $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$ (рис. 6.15), то по закону Ома фазные токи равны:

$$\dot{I}_{AB} = \dot{U}_{AB} / \underline{Z}_{AB}; \quad \dot{I}_{BC} = \dot{U}_{BC} / \underline{Z}_{BC}; \quad \dot{I}_{CA} = \dot{U}_{CA} / \underline{Z}_{CA}.$$

Фазные напряжения равны линейным и линейные токи определяются в соответствии с первым законом Кирхгофа как разности фазных токов: $\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}$; $\dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}$; $\dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}$.

Пример 6.6.

Несимметричная трехфазная цепь, представленная на рис. 6.15 с сопротивлениями фаз $\underline{Z}_{AB} = 100j \text{ Ом}$, $\underline{Z}_{BC} = 100 \text{ Ом}$, $\underline{Z}_{CA} = -100j \text{ Ом}$ подключена к трехфазной сети с линейным напряжением $U_{\text{л}} = 100 \text{ В}$.

Определить: 1) линейный ток \dot{I}_A ; 2) напряжение на сопротивлении \underline{Z}_{BC} после обрыва линейного провода C .

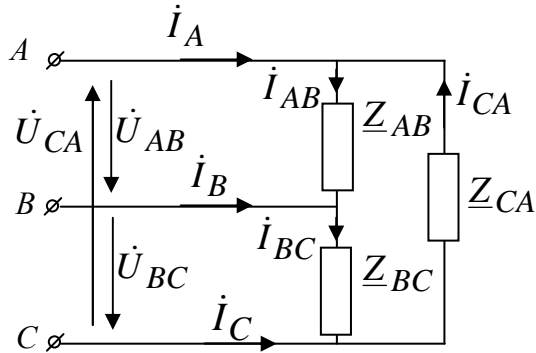


Рис. 6.15

Решение. 1) Для несимметричной цепи линейный ток находим по первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA},$$

$$\text{где } \dot{I}_{AB} = \dot{U}_{AB} / \underline{Z}_{AB};$$

$$\dot{I}_{CA} = \dot{U}_{CA} / \underline{Z}_{CA},$$

Полагая $\dot{U}_{AB} = 100 \text{ В}$ и помня, что система линейных напряжений симметрична, подставляем данные:

$$\dot{I}_A = \frac{100}{j100} - \frac{100e^{j120}}{-100j} = -j - 1e^{j210} = 0.99e^{-j30} \text{ А.}$$

2) При обрыве линейного провода C сопротивления \underline{Z}_{BC} и \underline{Z}_{CA} оказываются соединенными последовательно и подключенными к линейному напряжению \dot{U}_{AB} :

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_{BC} + \underline{Z}_{CA}} = \frac{100}{100 - 100j} = 0.7e^{j45} \text{ А.}$$

Напряжение на сопротивлении \underline{Z}_{BC} после обрыва линейного провода C : $\dot{U} = \dot{I}\underline{Z}_{BC} = 0.7e^{j45} \cdot 100 = 70e^{j45} \text{ В.}$

6.6. Мощность в трехфазных цепях. Способы измерения активной мощности

Активная мощность симметричного трехфазного приемника

$$P = 3U_{\phi}I_{\phi} \cos \varphi \text{ [Вт].}$$

Принимая во внимание, что при соединении ветвей приемника звездой $U_{\phi} = U_{\text{л}} / \sqrt{3}$ и $I_{\phi} = I_{\text{л}}$, а при соединении треугольником $U_{\phi} = U_{\text{л}}$ и $I_{\phi} = I_{\text{л}} / \sqrt{3}$, получим независимо от вида соединения

$$P = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \varphi,$$

где φ – фазовый сдвиг между фазным током и фазным напряжением.

Аналогично для реактивной и полной мощностей симметричного трехфазного приемника имеем

$$Q = 3U_{\phi} I_{\phi} \sin \varphi = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \sin \varphi \text{ [Var]}; \quad S = 3U_{\phi} I_{\phi} = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \text{ [ВА]}.$$

В несимметричном режиме мощность приемников рассчитывается как в однофазной цепи:

$$P_{\text{п}} = \sum_k I_k^2 R_k; \quad Q_{\text{п}} = \sum_i I_i^2 x_{Li} - \sum_k I_k^2 x_{Ck}.$$

Если известны фазные ЭДС цепи, соединенной звездой (с нейтральным проводом или без него), то комплексная мощность источников рассчитывается как сумма комплексных мощностей фаз:

$$\dot{S}_{\text{и}} = \dot{S}_A + \dot{S}_B + \dot{S}_C = \dot{E}_A I_A^* + \dot{E}_B I_B^* + \dot{E}_C I_C^* = P_{\text{и}} + jQ_{\text{и}}.$$

Если в цепи без нейтрального провода известны только линейные напряжения, то по первому закону Кирхгофа можно выразить, например ток $\dot{I}_C = -(\dot{I}_A + \dot{I}_B)$. Тогда $I_C^* = -(I_A^* + I_B^*)$ и

$$\begin{aligned} \dot{S}_{\text{и}} &= \dot{E}_A I_A^* + \dot{E}_B I_B^* + \dot{E}_C (-I_A^* - I_B^*) = (\dot{E}_A - \dot{E}_C) I_A^* + (\dot{E}_B - \dot{E}_C) I_B^* = \\ &= \dot{U}_{AC} I_A^* + \dot{U}_{BC} I_B^* = P_{\text{и}} + jQ_{\text{и}}, \text{ где } \dot{U}_{AC} = -\dot{U}_{CA}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно получить еще две формулы.

Для проверки правильности расчетов составляется баланс мощности по рассмотренным выше формулам и считается относительная погрешность:

$$\delta_P = \frac{|P_{\text{и}} - P_{\text{п}}|}{P_{\text{и}}} \cdot 100\% \leq 3\%; \quad \delta_Q = \frac{|Q_{\text{и}} - Q_{\text{п}}|}{Q_{\text{п}}} \cdot 100\% \leq 3\%.$$

У симметричного трехфазного приемника мощности всех трех фаз одинаковы, поэтому достаточно измерить активную мощность одной фазы P_{ϕ} , тогда активная мощность всей цепи $P = 3P_{\phi}$.

На рис. 6.16, а показано включение ваттметра, который измеряет мощность фазы А: $P_{\text{в}} = U_A I_A \cos \angle \dot{U}_A, \dot{I}_A$ (фазы приемника соединены звездой с доступной нейтральной точкой). Если фазы приемника соединены треугольником, то мощность одной фазы можно измерить, используя схему рис. 6.16, б ($P_{\text{в}} = U_{AC} I_{CA} \cos \angle \dot{U}_{AC}, -\dot{I}_{CA}$).

В случае если нейтральная точка приемника недоступна, или зажимы фаз приемника, включенного треугольником, не выведены, применяют схему рис. 6.17 с использованием искусственной нейтральной точки n' . В этой схеме дополнительно в две фазы включают резисторы с сопротивлением, равным сопротивлению цепи напряжения ваттметра.

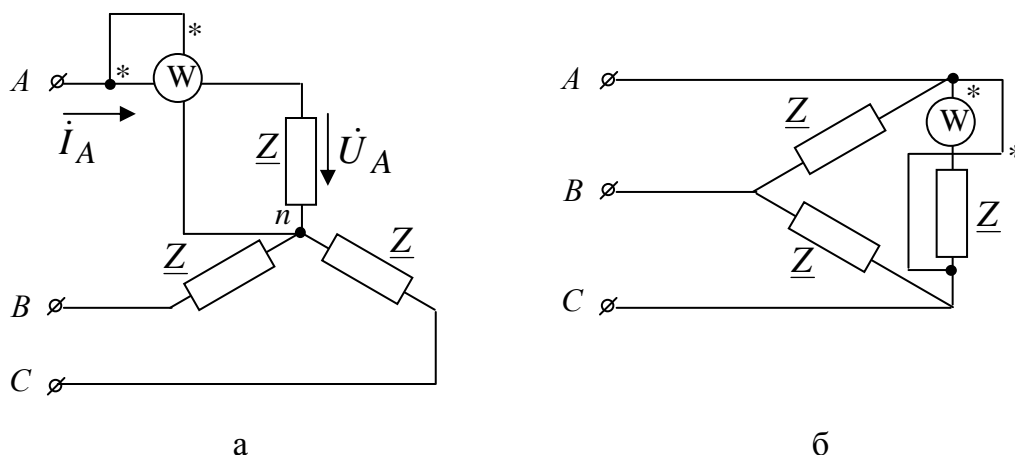


Рис. 6.16

При несимметричном приемнике для измерения активной мощности в трехфазной системе с нейтральным проводом используют три ваттметра, каждый из которых измеряет мощность одной фазы (рис. 6.18). Активная мощность трехфазной системы равна сумме показаний трех ваттметров:

$$P = P_{w1} + P_{w2} + P_{w3} = U_A I_A \cos \angle \dot{U}_A, \dot{I}_A + U_B I_B \cos \angle \dot{U}_B, \dot{I}_B + U_C I_C \cos \angle \dot{U}_C, \dot{I}_C.$$

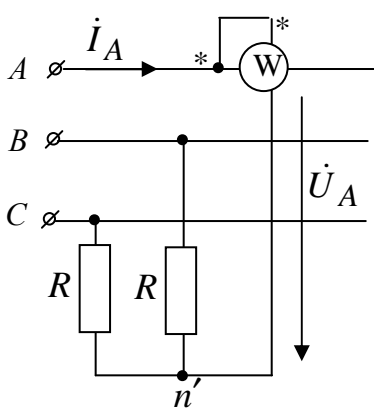


Рис. 6.17

В случае симметричной цепи достаточно включить один ваттметр, а результат утроить.

Если в схеме отсутствует нулевой провод, тогда измерение может быть произведено с помощью двух ваттметров (рис. 6.19). В этом случае активная мощность цепи будет равна сумме показаний двух ваттметров:

$$P = P_{w1} + P_{w2} = U_{AC} I_A \cos \angle \dot{U}_{AC}, \dot{I}_A + U_{BC} I_B \cos \angle \dot{U}_{BC}, \dot{I}_B,$$

где $\dot{U}_{AC} = -\dot{U}_{CA}$. Возможны две другие схемы включения ваттметров.

Ваттметры трехфазного тока, устанавливаемые на распределительных щитах, представляют собой два (для трехпроводной системы) или три (для четырехпроводной) измерительных механизма, связанных общей

осью и воздействующих на общую стрелку. Эти измерительные механизмы включаются в трехфазную цепь соответственно методам измерения с помощью двух или трех ваттметров.

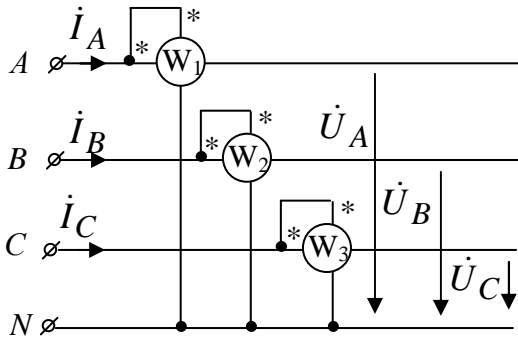


Рис. 6.18

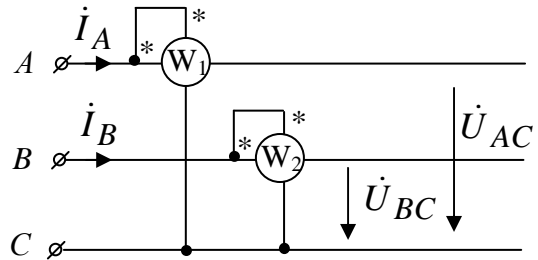
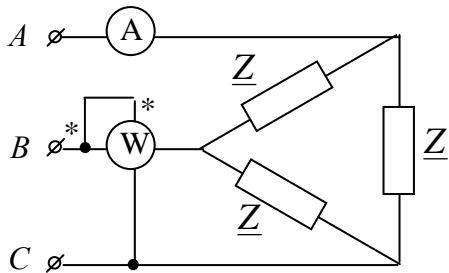


Рис. 6.19

Пример 6.7. Трехфазный источник симметричен. Определить показание ваттметра, если $\underline{Z} = 50j$ Ом, и амперметр показывает 7.61А.

Решение. Показание ваттметра $P_W = U_{BC} I_B \cos \angle \dot{U}_{BC}, \dot{I}_B$. Примем начальную фазу линейного тока фазы A равной нулю: $\dot{I}_A = 7.61e^{j0}$ А, то



гда ток $\dot{I}_B = 7.61e^{-j120}$. Фазный ток

$$\dot{I}_{BC} = \frac{\dot{I}_B}{\sqrt{3}} e^{j30} = 4.4e^{-j90} \text{ (так как приемник симметричный).}$$

Линейное напряжение найдем по закону Ома: $\dot{U}_{BC} = \dot{I}_{BC} \underline{Z} = 4.4e^{-j90} \cdot 50j = 220e^{j0}$ В.

Тогда ваттметр покажет

$$P_W = 220 \cdot 7.61 \cos(0 + 120^\circ) = -837.1 \text{ Вт.}$$

Тест для самоконтроля

1. В каком из приведенных выражений допущена ошибка, если $\dot{U}_{BC} = 380e^{-j30}$ и система линейных напряжений симметрична?

а) $\dot{U}_{AB} = 380e^{j90}$; б) $\dot{U}_{CA} = 380e^{j210}$; в) $\dot{U}_B = 220$; г) $\dot{U}_{AB} = 380e^{-j150}$.

2. Возможно ли смещение нейтральной точки приемника n на диаграмме напряжений при включенном нейтральном проводе, если его сопротивление равно нулю?

а) нет; б) да; в) не хватает информации

3. Почему обрыв нейтрального провода в четырехпроводной трехфазной системе является аварийным режимом? Указать правильный ответ.

- а) увеличится напряжение на всех фазах приемника энергии, соединенного треугольником;
- б) на одних фазах приемника энергии, соединенного треугольником, напряжение увеличится, на других уменьшится;
- в) на одних фазах приемника энергии, соединенного звездой, напряжение увеличится, на других уменьшится;
- г) на всех фазах приемника энергии, соединенного звездой, напряжение возрастет.

4. Какая из приведенных формул при симметричной нагрузке, соединенной звездой содержит ошибку?

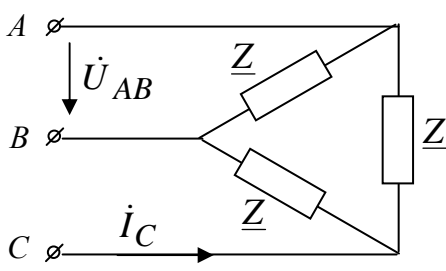
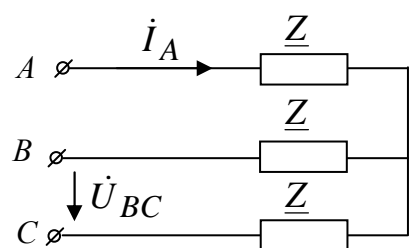
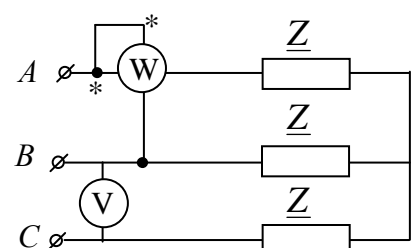
а) $\dot{U}_Л = \sqrt{3}\dot{U}_Ф e^{-j30}$; б) $I_Л = I_Ф$; в) $P = \sqrt{3}U_Л I_Л \cos \varphi$; $P = 3U_Ф I_Ф \cos \varphi$.

5. Какая из приведенных формул при симметричной нагрузке, соединенной треугольником содержит ошибку?

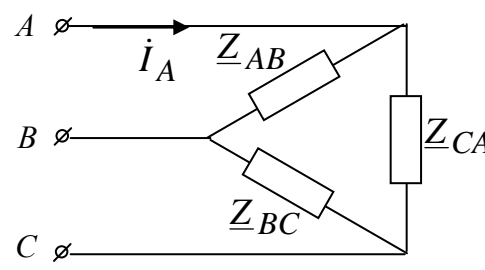
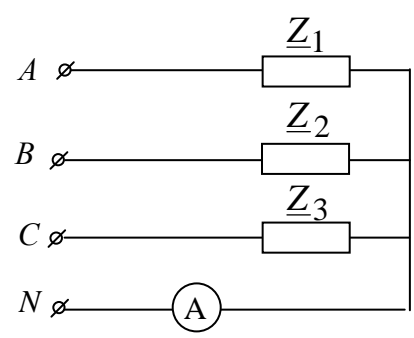
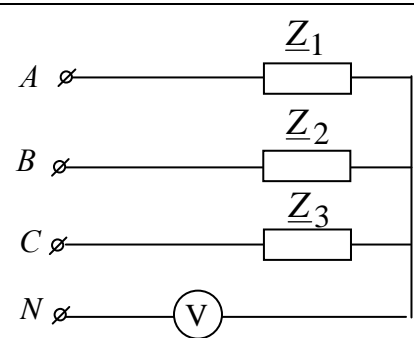
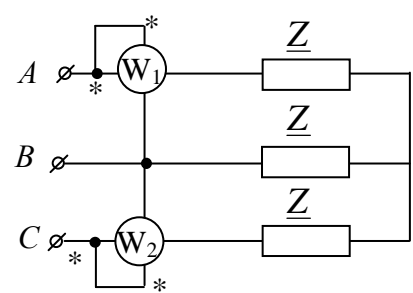
а) $\dot{I}_Л = \sqrt{3}\dot{I}_Ф e^{-j30}$; б) $U_Л = U_Ф$; в) $P = 3U_Л I_Л \cos \varphi$.

Ответы: 1-г; 2-а; 3-в; 4-а; 5-в.

Задачи к теме 6

1.	<p>Определить ток \dot{I}_C, если $\underline{Z} = j400 \text{ Ом}$ и напряжение симметричного трехфазного источника $\dot{U}_{AB} = 380e^{-j30}$.</p>	
2.	<p>Определить напряжение \dot{U}_{BC} симметричного трехфазного источника, если $\underline{Z} = j200 \text{ Ом}$ и ток $\dot{I}_A = 0.636e^{-j30} \text{ А}$.</p>	
3.	<p>Трехфазный источник симметричен. Определить показание ваттметра, если показание вольтметра $U = 380 \text{ В}$ и $\underline{Z} = j100 \text{ Ом}$.</p>	

Задачи к теме 6

4.	<p>Определить ток \dot{I}_A, если $\underline{Z}_{AB} = -j20 \text{ Ом}$, $\underline{Z}_{BC} = -j20 \text{ Ом}$, $\underline{Z}_{CA} = -j10 \text{ Ом}$ и линейное напряжение симметричного трехфазного источника, если $\dot{U}_{AB} = 220 \text{ В}$.</p>	
5.	<p>Трехфазный источник с фазной ЭДС $E_\phi = 200 \text{ В}$ симметричен. Определить показание амперметра, если $\underline{Z}_1 = 100 \text{ Ом}$, $\underline{Z}_2 = -j100 \text{ Ом}$ и $\underline{Z}_3 = j100 \text{ Ом}$.</p>	
6.	<p>Трехфазный источник с фазной ЭДС $E_\phi = 100 \text{ В}$ симметричен. Определить показание вольтметра, если $\underline{Z}_1 = j50 \text{ Ом}$, $\underline{Z}_2 = j200 \text{ Ом}$ и $\underline{Z}_3 = -j200 \text{ Ом}$.</p>	
7.	<p>В цепь трехфазного источника с $U_\Delta = 200 \text{ В}$ включены два ваттметра, показания которых $P_{W1} = 0$, $P_{W2} = 1.73 \text{ кВт}$. Определить модули линейных токов.</p>	
<p>Ответы: 1) $1.64e^{-j30} \text{ А}$; 2) $220e^{-j30} \text{ В}$; 3) -418 Вт; 4) $29e^{j50} \text{ А}$; 5) 5.46 А; 6) 175 В; 7) 10 А.</p>		

7. Цепи с источниками периодических несинусоидальных токов и напряжений

Новые слова и словосочетания

постоянная составляющая
гармоника
мощность искажения

амплитудночастотный спектр
фазочастотный спектр
фильтр

7.1. Разложение в ряд Фурье

На практике часто приходится встречаться с периодическими несинусоидальными токами и напряжениями. Так, например, в различных устройствах автоматики, радиотехники и телемеханики применяются периодические импульсы различной формы: пилообразной, ступенчатой, прямоугольной. При прохождении этих импульсов через различные электрические цепи их форма может существенно изменяться. В цепях, содержащих элементы с нелинейными сопротивлениями (например, транзистор, диод, тиристор и т.д.), даже при синусоидальных ЭДС также возникают несинусоидальные токи и напряжения. Пример несинусоидальных периодических сигналов представлен на рис. 7.1, 7.2.

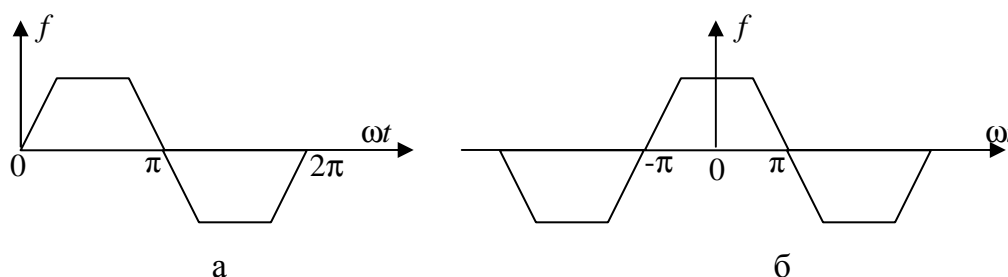


Рис. 7.1

Для расчета таких цепей несинусоидальные ЭДС и токи источников тока представляются в виде ряда Фурье, который в общем случае содержит постоянную составляющую, основную гармонику с периодом, равным периоду самой функции, и высшие гармоники, частота которых в целое число раз больше частоты основной гармоники. Затем, основываясь на принципе наложения, производится расчет постоянных и гармонических составляющих искомых токов и напряжений. Результат записывается в виде суммы мгновенных значений постоянной и всех гармонических составляющих.

Из курса математики известна формула разложения несинусоидальной функции $f(t)$ с периодом T в ряд Фурье:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos k\omega t = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk} \sin(k\omega t + \psi_k),$$

где A_0 – постоянная составляющая; $A_{mk} = \sqrt{B_k^2 + C_k^2}$ – амплитуда k -ой гармоники; $\psi_k = \arctg \frac{C_k}{B_k}$ – фаза k -ой гармоники; k – порядковый номер (порядок) гармоники.

Постоянная составляющая A_0 и коэффициенты B_k, C_k определяются по формулам

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) d\omega t; \quad C_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cos k\omega t d\omega t; \quad B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \sin k\omega t d\omega t.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи разложения:

- функция, симметричная относительно оси абсцисс $f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$ (рис. 7.1, а), содержит только нечетные гармоники;
- функция, симметричная относительно оси ординат $f(\omega t) = f(-\omega t)$ (рис. 7.1, б), содержит постоянную составляющую и косинусы (без начальных фаз):

$$f(t) = A_0 + C_1 \cos \omega t + C_2 \cos 2\omega t + C_3 \cos 3\omega t + \dots;$$

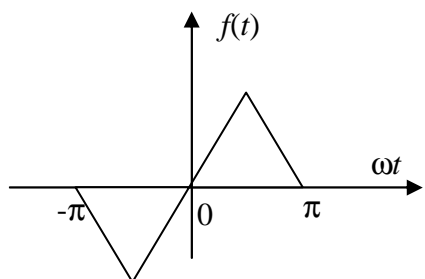


Рис. 7.2

- функция, симметричная относительно начала координат $f(\omega t) = -f(-\omega t)$ (рис. 7.2), содержит только синусы (без начальных фаз):

$$f(t) = B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + B_3 \sin 3\omega t + \dots$$

Условие симметрии относительно оси абсцисс не зависит от выбора начала отсчета времени, остальные виды симметрии связаны с выбором начала отсчета времени.

7.2. Действующие и средние значения несинусоидальных величин

Если, например, ток представлен в виде ряда Фурье

$$i = I_0 + I_{m1} \sin(\omega t + \psi_1) + I_{m2} \sin(2\omega t + \psi_2) \dots + I_{mk} \sin(k\omega t + \psi_k) + \dots$$

то можно определить его действующее, среднее и среднее по модулю значение.

Действующее значение тока рассчитывается по формуле

$$I = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i^2(\omega t) d\omega t}.$$

Подставив i в эту формулу и взяв интеграл, получим, что действующее значение не зависит от начальных фаз гармоник и определяется как

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 \dots + I_k^2 + \dots},$$

где I_0 – постоянная составляющая тока;

$I_1 = \frac{I_{m1}}{\sqrt{2}}, I_k = \frac{I_{mk}}{\sqrt{2}}$ – действующие значения гармоник тока.

Аналогично для напряжения, представленного в виде ряда Фурье, действующее значение:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 \dots} = \sqrt{U_0^2 + \frac{U_{m1}^2}{2} + \frac{U_{m2}^2}{2} + \dots}.$$

Среднее за период значение (постоянную составляющую) определяют как

$$I_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i(\omega t) d\omega t.$$

Для синусоиды и всех симметричных относительно оси абсцисс сигналов эта величина равна нулю. Поэтому для кривых, симметричных относительно оси абсцисс, определяют среднее по модулю значение:

$$I_{\text{ср}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |i(\omega t)| d\omega t.$$

В отличие от действующего значения оно зависит от углов ψ_k . Если за начало отсчета принять момент прохождения через нуль первой гармоники тока, то для кривых, не содержащих постоянную составляющую, после интегрирования получим:

$$I_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi} \left[I_{m1} + \sum_{k=3,5,7} \frac{1}{k} I_{mk} \cos(\psi_k - k\psi_1) \right].$$

Пример 7.1. Пусть ЭДС и ток заданы в виде ряда Фурье

$e(t) = 100 + 80\sin(\omega t + 30^\circ) + 60\sin(3\omega t + 20^\circ) + 50\sin(5\omega t + 45^\circ)$, В и

$i(t) = 6 + \sqrt{2}8\sin(\omega t + 30^\circ) + 7.07\sin(3\omega t - 60^\circ)$, А, тогда действующее

значение ЭДС $E = \sqrt{100^2 + \frac{80^2}{2} + \frac{60^2}{2} + \frac{50^2}{2}} = 127.5 \text{ В}$, а действующее

значение тока $I = \sqrt{6^2 + 8^2 + \frac{7.07^2}{2}} = 11.18 \text{ А}$.

Пример 7.2. Для тока, представленного в виде ряда Фурье

$$i(t) = 4.23 \sin(\omega t + 151^\circ) + 3.68 \sin(3\omega t + 100^\circ) + 5.34 \sin(5\omega t + 120^\circ), \text{ А.}$$

среднее по модулю значение рассчитывается как

$$I_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi} \left[4.23 + \frac{3.68}{3} \cos(100^\circ - 3 \cdot 151^\circ) + \frac{5.34}{5} \cos(120^\circ - 5 \cdot 151^\circ) \right] = 3.53 \text{ А.}$$

Гармонический состав функции, разложенной в ряд Фурье, можно задать при помощи дискретных спектров амплитуд и фаз, которые показывают зависимость амплитуд гармоник и их начальных фаз от номеров гармоник. На рис. 7.3 представлены амплитудно- и фазочастотный спектры для тока $i = 3 + 4 \sin(\omega t + 90^\circ) + 2 \sin(2\omega t - 45^\circ) + 0.5 \sin(3\omega t + 30^\circ)$.

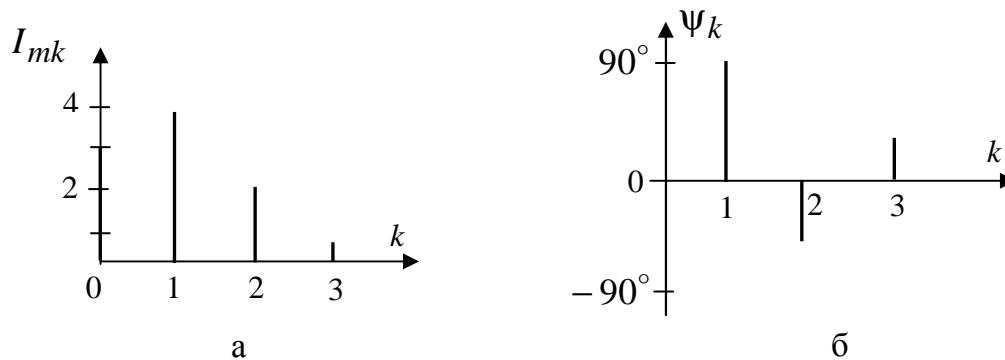


Рис. 7.3. Дискретный спектр: а – амплитуды; б – фазы

Несинусоидальные токи и напряжения могут измеряться приборами различных систем.

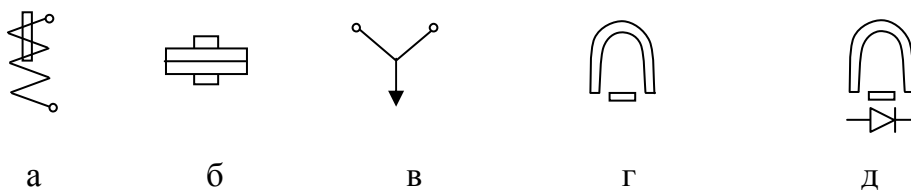


Рис. 7.4.. Условные значки:

а – электромагнитная система; б – электродинамическая; в – тепловая;
г – магнитоэлектрическая; д – магнитоэлектрическая с выпрямителем

Так приборы электромагнитной, электродинамической и тепловой систем реагируют на действующее значение, магнитоэлектрические приборы с выпрямителем – на среднее по модулю значение величины, магнитоэлектрические – на постоянную составляющую. На лицевой

стороне прибора (амперметра или вольтметра) имеется условный значок, показывающий, какой системы данный прибор. На рис. 7.4. приведены эти условные значки.

7.3. Коэффициенты, характеризующие форму несинусоидальных функций

Коэффициент формы – это отношение действующего значения к среднему по модулю значению: $K_{\Phi} = \frac{I}{I_{\text{ср}}}$.

Коэффициент амплитуды – это отношение наибольшего значения к действующему значению: $K_a = \frac{I_{\text{max}}}{I}$. Для синусоиды $K_a = 1.41$.

Коэффициент искажения – отношение действующего значения основной гармоники к действующему значению функции: $K_{\text{и}} = \frac{I_1}{I}$. Для синусоиды $K_{\text{и}} = 1$.

Коэффициент гармоник – это отношение действующего значения высших гармоник к действующему значению основной гармоники:

$$K_{\Gamma} = \frac{1}{I_1} \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} I_k^2}.$$

В вышеприведенных формулах расчет велся для кривой тока, разложенной в ряд Фурье, но эти формулы применяются для любой несинусоидальной функции представленной в виде ряда Фурье.

Пример 7.3. Кривая напряжения представлена в виде ряда $u(t) = 4 \sin \omega t + 2 \sin 3\omega t + \sqrt{2} \sin 5\omega t$, найти коэффициенты гармоник и искажения.

Решение. Действующее значение функции

$$U = \sqrt{\frac{4^2}{2} + \frac{2^2}{2} + \frac{(\sqrt{2})^2}{2}} = 3.32.$$

Находим коэффициенты:

$$K_{\text{и}} = \frac{U_1}{U} = \frac{4/\sqrt{2}}{3.32} = 0.854; \quad K_{\Gamma} = \frac{\sqrt{\frac{2^2}{2} + \frac{\sqrt{2}^2}{2}}}{4/\sqrt{2}} = 0.61.$$

7.4. Мощность в цепях с несинусоидальными сигналами

Пусть на вход некоторой пассивной цепи приложено несинусоидальное периодическое напряжение

$u(t) = U_0 + \sqrt{2}U_1 \sin(\omega t + \psi_1) + \sqrt{2}U_2 \sin(2\omega t + \psi_2) + \dots$, под действием этого напряжения протекает входной ток

$i(t) = I_0 + \sqrt{2}I_1 \sin(\omega t + \psi_1 - \phi_1) + \sqrt{2}I_2 \sin(2\omega t + \psi_2 - \phi_2) + \dots$

При этом средняя за период $T = 2\pi/\omega$ вырабатываемая активная мощность источника напряжения составит

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \phi_1 + U_2 I_2 \cos \phi_2 + \dots = P_0 + P_1 + P_2 + \dots$$

Таким образом, *активная мощность равна сумме активных мощностей постоянной составляющей и отдельных гармоник.*

По аналогии с гармоническим током условно введем понятие реактивной мощности, которая определяется как сумма реактивных мощностей отдельных гармоник:

$$Q = U_1 I_1 \sin \phi_1 + U_2 I_2 \sin \phi_2 + \dots = Q_1 + Q_2 + \dots,$$

причем реактивная мощность от постоянных составляющих тока и напряжения равна нулю: $Q_0 = 0$.

Полная вырабатываемая мощность будет равна

$$S = UI = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots} \cdot \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots},$$

где U, I – действующие значения напряжения и тока.

Очевидно, что $S^2 \neq P^2 + Q^2$.

В цепях с периодическими напряжениями и токами вводится такое понятие, как *мощность искажения T*, которая характеризует степень различия по форме кривых напряжения и тока:

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}.$$

Мощность искажения тем больше, чем больше различаются по форме кривые напряжения и тока. Мощность искажения равна нулю, когда форма кривых тока и напряжения одинакова, причем для гармонических кривых напряжения и тока мощность искажения также равна нулю.

Отношение активной мощности к полной называется *коэффициентом мощности* $\cos \phi = \frac{P}{S}$.

Для несинусоидальных величин это будет условный $\cos \varphi_{\text{ЭКВ}}$, т.е. косинус угла сдвига фаз между эквивалентными синусоидами напряжения и тока, которые имеют те же действующие значения, что и несинусоидальное напряжение и ток, и потребляемая цепью мощность остается такой же, как при действительном несинусоидальном режиме:

$$\cos \varphi_{\text{ЭКВ}} = \frac{P}{UI}.$$

7.5. Расчет цепей с источниками несинусоидальных периодических токов и напряжений

Если известно разложение источников (ЭДС или тока) в ряд Фурье, то применяется принцип наложения, согласно которому цепь рассчитывается последовательно от действия постоянной составляющей, первой и других гармоник. При этом в подсхеме для постоянной составляющей индуктивность замыкается накоротко, а емкость представляется разрывом цепи. Расчет гармонических составляющих ведется комплексным методом. При этом в комплексной схеме для k -ой гармоники индуктивность L заменяется индуктивным сопротивлением $jx_L^{(k)} = jk\omega L$, а емкость C – емкостным сопротивлением $-jx_C^{(k)} = \frac{-j}{k\omega C}$.

На последнем этапе расчета мгновенные составляющие искомой величины записываются в виде суммы для нахождения мгновенного значения или вычисляется ее действующее значение.

Пример 7.4. Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных сопротивления $R = 30 \text{ Ом}$, индуктивности $L = 0.159 \text{ Гн}$ и емкости $C = 7.08 \text{ мкФ}$. Цепь питается от источника напряжения

$$u(t) = 50 + 400 \sin(\omega t - 30^\circ) + 120 \sin 3\omega t + 50 \sin(5\omega t + 20^\circ), \text{ В.}$$

Частота первой гармоники $f = 50 \text{ Гц}$. Найти мгновенное значение тока в цепи.

Решение. Расчет цепи производим символическим методом отдельно для постоянной составляющей и каждой гармоники напряжения.

Постоянная составляющая тока в данной схеме равна нулю, так как через емкость постоянный ток не течет.

Комплексные амплитуды напряжения гармоник

$$\dot{U}_{m1} = 400e^{-j30} \text{ В}; \quad \dot{U}_{m3} = 120 \text{ В}; \quad \dot{U}_{m5} = 50e^{j20} \text{ В.}$$

Определяем комплексные сопротивления цепи токам 1, 3 и 5-ой гармоник: $\omega = 2\pi f = 314 \text{ 1/с}$;

$$x_L^{(1)} = \omega L = 314 \cdot 0.159 = 50 \text{ Ом}; \quad x_C^{(1)} = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{314 \cdot 7.08} = 450 \text{ Ом}.$$

$$\underline{Z}^{(1)} = R + jx_L^{(1)} - jx_C^{(1)} = 30 + j50 - j450 = 400e^{-j85.7} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}^{(3)} = R + j3x_L^{(1)} - j\frac{x_C^{(1)}}{3} = 30 + j3 \cdot 50 - j\frac{450}{3} = 30 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}^{(5)} = R + j5x_L^{(1)} - j\frac{x_C^{(1)}}{5} = 30 + j5 \cdot 50 - j\frac{450}{5} = 162e^{j79.4} \text{ Ом}.$$

Расчет тока для первой гармоники:

$$\dot{I}_{m1} = \frac{\dot{U}_{m1}}{\underline{Z}^{(1)}} = \frac{400e^{-j30}}{400e^{-j85.7}} = 1e^{j55.7} \text{ А}; \quad i_1(t) = 1\sin(\omega t + 55.7^\circ) \text{ А}.$$

Расчет тока для третьей гармоники:

$$\dot{I}_{m3} = \frac{\dot{U}_{m3}}{\underline{Z}^{(3)}} = \frac{120}{30} = 4 \text{ А}; \quad i_3(t) = 4\sin 3\omega t \text{ А}.$$

Расчет тока для пятой гармоники:

$$\dot{I}_{m5} = \frac{\dot{U}_{m5}}{\underline{Z}^{(5)}} = \frac{50e^{j20}}{162e^{j79.4}} = 0.308e^{-j59.4} \text{ А}; \quad i_5(t) = 0.308\sin(5\omega t - 59.4^\circ) \text{ А}.$$

Мгновенное значение несинусоидального тока в цепи:

$i(t) = 1\sin(\omega t + 55.7^\circ) + 4\sin 3\omega t + 0.308\sin(5\omega t - 59.4^\circ) \text{ А}$, а действующее

$$I = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{4^2}{2} + \frac{0.308^2}{2}} = 2.92 \text{ А}.$$

7.6. Зависимость формы кривой тока от характера цепи при несинусоидальном напряжении

Сопротивление электрической цепи, содержащей индуктивные катушки и конденсаторы, зависит от частоты, и, следовательно, оно оказывается разным для разных гармоник. Поэтому если к зажимам такой цепи приложено периодическое несинусоидальное напряжение, то кривая тока в цепи отличается по форме от кривой напряжения.

Кривая тока подобна кривой напряжения, только если цепь обладает одним активным сопротивлением R , которое не зависит от частоты.

Тогда для всех гармоник тока и напряжения $I_{mk} = \frac{U_{mk}}{R}$ т.е. формы кривых тока и напряжения одинаковы и мощность искажения равна нулю.

Рассмотрим катушку с индуктивностью L и активным сопротивлением $R_k = 0$. Ее сопротивление для k -ой гармоники $x_L^{(k)} = k\omega L$ растет с ростом порядка гармоники. Тогда амплитуды высших гармоник в кривой тока $I_{mk} = \frac{U_{mk}}{k\omega L}$ будут уменьшаться с ростом порядка гармоники (для второй гармоники в 2 раза, для третьей в 3 и т.д.).

Таким образом, кривая тока в катушке будет более синусоидальна, чем кривая напряжения. Говорят, что индуктивность сглаживает кривую тока. Этим пользуются для сглаживания кривой тока после выпрямителей, включая в цепь между выпрямителем и приемником индуктивную катушку (сглаживающий фильтр). Напряжение на выходе выпрямителя содержит, кроме постоянной составляющей, еще и гармоники. Катушка не оказывает сопротивления постоянной составляющей, но ее сопротивление высшим гармоникам тем больше, чем выше порядок гармоники.

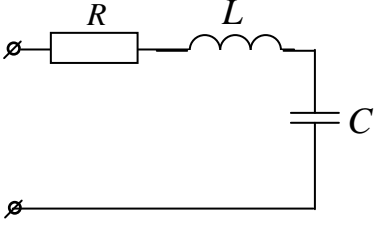
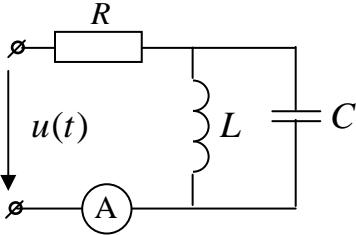
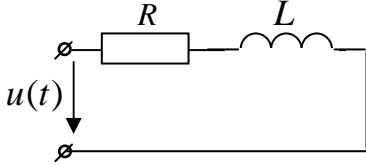
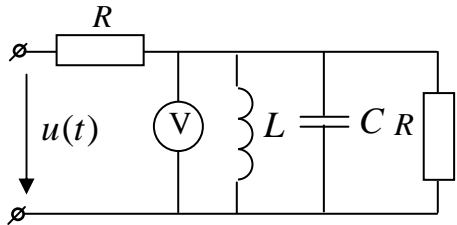
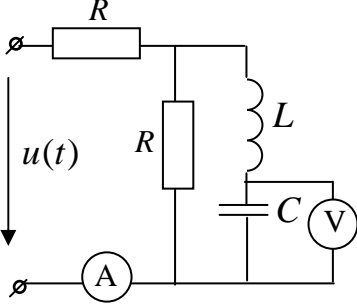
Рассмотрим конденсатор без потерь. Его сопротивление $x_C^{(k)} = \frac{1}{k\omega C}$ убывает с ростом порядка гармоники. Тогда амплитуды высших гармоник в кривой тока $I_{mk} = k\omega C U_{mk}$ будут увеличиваться с ростом порядка гармоники (для второй гармоники в 2 раза, для третьей в 3 и т.д.). Говорят, что конденсатор искажает кривую тока по сравнению с кривой напряжения.

Тест для самоконтроля

1. Действующее значение тока, представленного в виде ряда Фурье, $i(t) = 3 + 2\sin(\omega t + 30^\circ) + \sqrt{2}\sin(3\omega t + 10^\circ)$, А равно
а) 3.46 А; б) 3.873 А; в) 1.73 А; г) 2.45 А
2. Среднее по модулю значение напряжения, представленного в виде ряда $u(t) = 20\sin(\omega t + 30^\circ) + 10\sin(3\omega t + 10^\circ) + 15\sin(5\omega t + 210^\circ)$, В равно
а) 10 В; б) 14.1 В; в) 15 В; г) 22 В
3. Сопротивление индуктивного элемента для третьей гармоники $x_L^{(3)} = 90$ Ом, тогда сопротивление для первой гармоники
а) 270 Ом; б) 10 Ом; в) 30 Ом; г) 90 Ом
4. Сопротивление емкостного элемента для первой гармоники $x_C^{(1)} = 50$ Ом, тогда сопротивление для пятой гармоники равно
а) 250 Ом; б) 50 Ом; в) 10 Ом; г) 25 Ом

Ответы: 1-а; 2-б; 3-в; 4-в.

Задачи к теме 7

1.	<p>Комплексное сопротивление ветви R, L, C для основной гармоники $\underline{Z}^{(1)} = 40 \text{ Ом}$, а третьей $\underline{Z}^{(3)} = 40\sqrt{2}e^{j45^\circ} \text{ Ом}$. Определите сопротивление индуктивности для второй гармоники.</p>	
2.	<p>В цепи с входным напряжением $u(t) = 40 + 45\sqrt{2} \sin \omega t + 20\sqrt{2} \sin 3\omega t$, В. В определить показание амперметра электродинамической системы, если $\omega L = 10 \text{ Ом}$, $1/\omega C = 90 \text{ Ом}$, $R = 10 \text{ Ом}$.</p>	
3.	<p>Определить активную и полную мощности цепи с параметрами $R = 10 \text{ Ом}$, $\omega L = 5 \text{ Ом}$ при входном напряжении $u(t) = 60 + 80\sqrt{2} \sin 2\omega t$, В.</p>	
4.	<p>Определить показание вольтметра электродинамической системы, если известно, что в цепи резонанс на первой гармонике, $R = 30 \text{ Ом}$, $L = 0,4 \text{ Гн}$, $u(t) = 30 + 40\sqrt{2} \sin(100t + 30^\circ)$, В.</p>	
5.	<p>В резонансной цепи определить показание амперметра электродинамической системы и вольтметра магнитоэлектрической системы, если $R = 100 \text{ Ом}$ и $u(t) = 200 + 100\sqrt{2} \sin \omega t$, В.</p>	

Ответы: 1) $x_L^2 = 30 \text{ Ом}$; 2) $I_A = 5 \text{ А}$; 3) $P = 680 \text{ Вт}$, $S = 824 \text{ ВА}$;
 4) $U_V = 20 \text{ В}$; 5) $U_V = 100 \text{ В}$, $I_A = 1.41 \text{ А}$

СОДЕРЖАНИЕ

	Введение.....	3
Тема 1.	Основные элементы и законы электрических цепей.....	3
	1.1. Основные величины, характеризующие электрическую цепь.....	4
	1.2. Источники и приемники электромагнитной энергии.....	5
	1.3. Топологические понятия электрической цепи.....	11
	1.4. Законы Кирхгофа.....	13
	Тест для самоконтроля.....	14
Задачи к теме 1.....		15
Тема 2.	Методы расчета и свойства линейных электрических цепей.....	16
	2.1. Метод эквивалентного преобразования.....	16
	2.2. Расчет схем с использованием законов Кирхгофа.....	20
	2.3. Метод контурных токов.....	22
	2.4. Метод узловых потенциалов.....	23
	2.5. Метод эквивалентного генератора.....	25
	2.6. Метод наложения.....	28
	2.7. Свойства линейных электрических цепей.....	30
	2.8. Применение матриц к расчету линейных электрических цепей.....	31
	Тест для самоконтроля.....	38
Задачи к теме 2.....		39
Тема 3.	Расчет цепей с гармоническими токами и напряжениями....	41
	3.1. Гармонические токи и напряжения.....	41
	3.2. Синусоидальный ток в резистивном элементе.....	43
	3.3. Синусоидальный ток в индуктивном элементе.....	43
	3.4. Синусоидальный ток в емкостном элементе.....	44
	3.5. Символический метод расчета электрических цепей...	44
	3.6. Расчет линейных электрических цепей в комплексной форме.....	49
	3.7. Мощность в цепи синусоидального тока.....	53
	Тест для самоконтроля	56
Задачи к теме 3.....		57
Тема 4.	Резонанс в цепях синусоидального тока.....	60
	4.1. Резонанс напряжений.....	60
	4.2. Резонанс токов.....	63
	4.3. Резонанс токов в параллельном контуре	

	с потерями.....	66
	Тест для самоконтроля.....	68
Задачи к теме 4.....		69
Тема 5. Расчет линейных электрических цепей с взаимной индуктивностью.....		70
5.1. Индуктивно связанные элементы.....		70
5.2. Последовательное соединение катушек.....		72
5.3. Параллельное соединение катушек.....		73
5.4. Расчет сложных цепей с индуктивно связанными элементами.....		74
5.5. Развязка индуктивной связи.....		76
5.6. Двухобмоточный трансформатор в линейном режиме.....		78
Тест для самоконтроля.....		80
Задачи к теме 5.....		81
Тема 6. Трехфазные цепи.....		82
6.1. Получение трехфазных ЭДС. Трехфазные источники.....		82
6.2. Способы соединения трехфазных источников.....		84
6.3. Классификация и способы соединения потребителей.....		85
6.4. Расчет симметричных трехфазных цепей.....		87
6.5. Расчет несимметричных трехфазных цепей.....		90
6.6. Мощность в трехфазных цепях. Способы измерения активной мощности.....		93
Тест для самоконтроля.....		96
Задачи к теме 6.....		97
Тема 7. Цепи с источниками периодических несинусоидальных токов и напряжений.....		99
7.1. Разложение в ряд Фурье.....		99
7.2. Действующие и средние значения несинусоидальных величин.....		100
7.3. Коэффициенты, характеризующие форму несинусоидальных функций.....		103
7.4. Мощность в цепях с несинусоидальными сигналами.....		104
7.5. Расчет цепей с источниками несинусоидальных периодических напряжений и токов.....		105
7.6. Зависимость формы кривой тока от характера цепи при несинусоидальном напряжении.....		106
Тест для самоконтроля.....		107
Задачи к теме 7.....		108

Учебное издание

ШАНДАРОВА Елена Борисовна

Теоретические основы электротехники Часть 1

Учебное пособие

Научный редактор
доктор ф.-м. н.,
профессор

Подписано к печати 15.01.09. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».


Печать RISO. Усл.печ.л. 4,47. Уч.-изд.л. 4,05.

Заказ . Тираж экз.



Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2000



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.