

§ 1. Метод Эйлера

Задача нахождения частного решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y) \quad (6.1)$$

может быть приближенно решена численными методами. Для нахождения частного решения уравнения (6.1) на отрезке $[a, b]$ его делят на равные частичные отрезки $[x_i, x_{i+1}]$, где

$$x_i = x_0 + i \cdot h, \quad x_0 = a, \quad x_n = b, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Используя формулу первой разностной производной, уравнение (5.40) можно представить в виде

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i). \quad (6.2)$$

Тогда значения искомой функции $y = y(x)$ на отрезке $[a, b]$ находят по формуле (6.2). При этом начальный шаг h устанавливают с помощью неравенства

$$h < \sqrt{\Delta},$$

где Δ - заданная предельная абсолютная погрешность.

Заданная точность Δ достигается, если для всех i выполняется неравенство

$$\frac{1}{3} \left| y_{2i}^{(h)} - y_i^{(2h)} \right| < \Delta, \quad (6.3)$$

где $y_i^{(h)}$ и $y_i^{(2h)}$ - значения искомой функции, полученные по методу Эйлера (6.2) при шагах вычисления h и $2h$ соответственно. После вычисления значений искомой функции с шагом h и $2h$ их сравнивают по формуле (6.3). Вычисления заканчивают, когда неравенство (6.3) выполняется для всех i . Решением задачи является функция $\{y_i^{(h)}\}$.

Пример. Решить методом Эйлера на отрезке $[0, 0.3]$ уравнение

$$y' = x + y^2$$

с начальным условием $y(0) = 0$ при $\Delta = 0.01$.

Исходя из неравенства $h < \sqrt{\Delta}$, выберем начальный шаг вычислений $h = 0.06$. Тогда $n = \frac{0.03 - 0}{0.06} = 5$. Проводя вычисления с одним запасным знаком, находим по формуле (6.2) значения

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + 0.06 \cdot \left[0 + 0^2 \right] = y_0 = 0 \\ y_2 &= y_1 + 0.06 \cdot \left[0.06 + 0^2 \right] = 0.004 \\ y_3 &= y_2 + 0.06 \cdot \left[0.12 + 0.004^2 \right] = 0.011 \\ y_4 &= y_3 + 0.06 \cdot \left[0.18 + 0.011^2 \right] = 0.022 \\ y_5 &= y_4 + 0.06 \cdot \left[0.24 + 0.022^2 \right] = 0.036 \end{aligned}$$

Уменьшим шаг в два раза, т.е. $h = 0.03$, так что теперь $n = 10$.

Вычисления повторим, а результаты поместим в таблицу.

Таблица 11

Расчетная таблица

$y_i^{(0.06)}$	$y_i^{(0.03)}$	$\frac{1}{3} \left[y_i^{(0.06)} - y_{2i}^{(0.03)} \right]$
$y_0 = 0.000$	$y_0 = 0.000$	0
	$y_1 = 0.000$	
$y_1 = 0.000$	$y_2 = 0.001$	0.0003
	$y_3 = 0.003$	
$y_2 = 0.004$	$y_4 = 0.006$	0.0007
	$y_5 = 0.010$	
$y_3 = 0.011$	$y_6 = 0.014$	0.001
	$y_7 = 0.019$	
$y_4 = 0.022$	$y_8 = 0.025$	0.001
	$y_9 = 0.032$	
$y_5 = 0.036$	$y_{10} = 0.040$	0.001

Из таблицы видно, что левая часть неравенства (6.3) не превосходит 0.001. Поэтому $y_i^{(0.03)}$ с точностью до 0.001 представляют искомую функцию, т.е. все найденные знаки верные.

§ 2. Метод Рунге-Кутты

По методу Рунге-Кутты значения искомой функции $y = y(x)$ на отрезке $[a, b]$ последовательно находят по формулам

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

где

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} [q_1^{(i)} + 2q_2^{(i)} + 2q_3^{(i)} + q_4^{(i)}],$$

$$q_1^{(i)} = h \cdot f(x_i, y_i),$$

$$q_2^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{q_1^{(i)}}{2}\right),$$

$$q_3^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{q_2^{(i)}}{2}\right),$$

$$q_4^{(i)} = h \cdot f(x_{i+1}, y_i + q_3^{(i)}),$$

$x_{i+1} = x_i + h$, $x_0 = a$, $x_n = b$, $h = \frac{b-a}{n}$. Начальный шаг h устанавливают с помощью неравенства

$$h < \sqrt[4]{\Delta},$$

где Δ - заданная предельная абсолютная погрешность.

Заданная точность Δ достигается, если для всех i выполняется неравенство

$$\frac{1}{15} |y_{2i}^{(h)} - y_i^{(2h)}| < \Delta.$$

§3. Метод итераций

В предыдущих параграфах были рассмотрены разностные методы решения дифференциальных уравнений. Здесь мы изложим метод последовательных приближений (метод итераций).

Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y), \quad (6.4)$$

удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$ на заданном отрезке. Интегрируя уравнение (6.4) в пределах от x_0 до x с учетом начального условия представим его в интегральной форме

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(x, y) dx + y_0.$$

Если y_0 выбрать в качестве нулевого приближения, то n -ое приближение можно найти по формуле

$$y_n(x) = \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}(x)) dx + y_0. \quad (6.5)$$

Метод итераций основывается на теореме.

Теорема. Если $f(x, y), f'_y(x, y)$ непрерывны в замкнутой области D ,

$D\{x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$, то в некотором интервале $x_0 - l \leq x \leq x_0 + l$

существует единственное решение уравнения (6.4), удовлетворяющее начальному условию. Погрешность при замене решения $y(x)$ его n -м приближением дается формулой

$$|y - y_n| \leq \frac{MN^n l^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (6.6)$$

где $l = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, $|f(x, y)| \leq M$, $|f'_y(x, y)| \leq N$.

Пример. Найдем второе приближение уравнения $y' = x + y^2$, удовлетворяющее начальному условию $y_0 = 0, x_0 = 0$ на отрезке $[-0.5, 0.5]$, и найдем погрешность при замене решения его 2-м приближением.

Согласно формуле (6.5)

$$y_1(x) = \int_0^x x dx = \frac{x^2}{2}, \quad y_2(x) = \int_0^x \left(x + \frac{x^4}{4}\right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20}.$$

Пусть $a = \frac{1}{2}, b = 1$. Тогда $M = \frac{3}{2}, N = 2, t = \frac{1}{2}$. По формуле (6.6)

получим $|y - y_2| \leq \frac{\frac{3}{2} \cdot 2^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} = \frac{1}{8}$.

§4. Метод прогонки

Метод используется для решения дифференциальных уравнений второго порядка. Найдем на отрезке $[a, b]$ решение неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = f(x), \quad (6.7)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$$

Построим на отрезке $[a, b]$ равномерную сетку

$$x_i = a + i \cdot h, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Перепишем уравнение (6.7) для $x = x_i$, заменив вторую производную соотношением

$$y''(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2},$$

а первую производную одной из разностных формул

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_i) - y(x_{i-1}))}{h},$$

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h},$$

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2 \cdot h}.$$

Тогда получим систему разностных уравнений

$$y_0 = \alpha, \quad y_n = \beta,$$

$$a_j y_{j-1} + b_j y_j + c_{j+1} y_{j+1} = g_j, \quad (6.8)$$

где y_j приближенное значение решения в точке x_j , $j = 1, 2, \dots, n-1$. Если для аппроксимации первой производной воспользоваться разностной формулой $y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}$, то коэффициенты и правые части системы (6.8) определяются по формулам

$$a_j = A(x_j),$$

$$b_j = C(x_j)h^2 - B(x_j)h - 2A(x_j),$$

$$c_j = A(x_j) + B(x_j)h,$$

$$g_j = f(x_j)h^2.$$

В методе прогонки решение системы (6.8) ищем в виде

$$y_i = L_i y_{i+1} + K_i, \quad (6.9)$$

где L_i, K_i – прогоночные коэффициенты, Сравнивая (6.9) при $i = 0$ и краевые условия $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$, получим

$$L_0 = 0, \quad K_0 = \alpha.$$

Рекуррентные формулы для прогоночных коэффициентов L_i, K_i получим, если в j -ое уравнение системы (6.8)

$$a_j y_{j-1} + b_j y_j + c_{j+1} y_{j+1} = g_j$$

подставим вместо y_{j-1} правую часть выражения (6.9) $y_{i-1} = L_{i-1}y_i + K_{i-1}$, и затем полученное выражение приведем к виду (6.9). Тогда формулы прямой прогонки для L_i, K_i будут иметь вид

$$L_j = -\frac{c_j}{a_j L_{j-1} + b_j}, K_j = \frac{g_j - a_j K_{j-1}}{a_j L_{j-1} + b_j}, L_0 = 0, K_0 = \alpha, j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (6.10)$$

После нахождения прогоночных коэффициентов L_j, K_j по формулам (6.10) решение уравнения (6.7) находится по формуле обратной прогонки

$$y_l = L_l y_{l+1} + K_l, y_0 = \alpha, y_n = \beta,$$

где уже $l = n-1, n-2, \dots, 1$.

Замечание. Методы, применяемые в предыдущих параграфах для численного интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка, без всяких изменений могут быть использованы для интегрирования систем дифференциальных уравнений первого порядка. С точки зрения метода вычислений в каждом из уравнений системы можно считать «лишние» функции известными функциями. Это позволяет воспользоваться методами, построенными для интегрирования одного уравнения. С другой стороны, для того, чтобы действительно знать значения указанных «лишних» функций в нужных точках, приходится все уравнения системы интегрировать одновременно.

§5. Метод сеток решения уравнения в частных производных

Постановка задачи

Пусть в области D , ограниченной контуром Γ , поставлена задача математической физики, т.е. задано линейное дифференциальное уравнение в частных производных

$$L(U) = f \quad (6.11)$$

и дополнительные условия (граничные и начальные условия).

Так как задача нахождения решения уравнения (6.11) в D трудно разрешима, то ставится задача приближенно найти решения на

некотором множестве точек из D . Это множество точек называется **сеткой**. Его берут конечным и достаточно густым, чтобы оно приближенно заменяло область D . При этом расположение узлов сетки может быть любым.

Обозначим через D_h множество точек сетки. Пусть $(x_i, y_k) \in D_h$. Очевидно, что значений $U(x_i, y_k)$ конечное число, и эти значения определяются дифференциальным уравнением, начальными и граничными условиями, присоединенными к этому уравнению, областью D и контуром Γ .

Суть метода сеток состоит в том, что на основе этой информации составляется соответствующим образом система алгебраических уравнений, отражающая свойства дифференциального уравнения, начальных и граничных условий и позволяющая приближенно вычислить значения $U(x_i, y_k)$. Рассмотрим пример выбора прямоугольной сетки. Проведем на плоскости $ХОУ$ совокупность прямых $x = x_0 + ih$, $y = y_0 + kl$, где x_0, y_0 — координаты точки M , лежащая внутри D , h — шаг сетки по направлению x , l — шаг сетки по направлению y ($h > 0$; $l > 0$). Точки пересечения называются **узлами**.

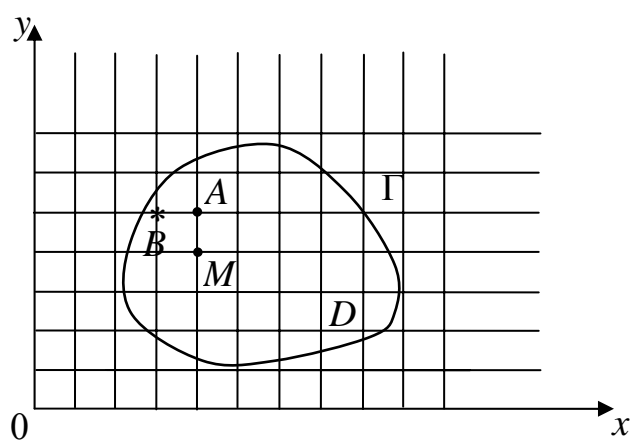


Рис. 1

Два узла называются **соседними**, если они удалены друг от друга в направлении оси OX или OY на расстояние, равное шагу сетки h или l соответственно.

Будем рассматривать только те узлы, которые принадлежат замкнутой области $\bar{D} = D \cup \Gamma$.

Точка (x_i, y_k) называется **внутренним узлом**, если четыре ее соседние точки (x_{i-1}, y_k) , (x_{i+1}, y_k) , (x_i, y_{k-1}) , (x_i, y_{k+1}) принадлежат \bar{D} .

Множество внутренних узлов будем обозначать через D_h^* .

Те узлы, у которых хотя бы один соседний узел не принадлежит замкнутой области \bar{D} , называются **граничными узлами**.

Множество граничных узлов обозначается через Γ^* . На рисунке точки A и M — внутренние узлы (обозначено \bullet), B — граничный узел (обозначено $*$).

Множество внутренних и граничных узлов образует прямоугольную сеточную область D_h .

Ясно, что при замене области D на сеточную область D_h происходит искажение области D , особенно, если шаги h и l большие.

Мы не останавливаемся на рассмотрении других сеток, таких, как треугольная сетка, сетка параллелограммов и других.

Замена производных конечно-разностными отношениями

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка, заданное в D

$$L(U) = A \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2D \frac{\partial U}{\partial x} + 2E \frac{\partial U}{\partial y} + GU = f(x, y). \quad (6.12)$$

Задача: представить дифференциальное уравнение (6.12) в точке $(x_i, y_k) \in D$ через значение искомой функции в узлах сетки. Такую замену можно выполнить путем выражения каждой производной, входящей в уравнение через значения функции в узлах сетки.

Для этой цели запишем разложение функции $U(x, y)$ в окрестности точки (x_i, y_k) по формулам Тейлора с дополнительным членом в форме Лагранжа и подсчитаем значения $U(x_{i+1}, y_k)$ и $U(x_{i-1}, y_k)$. Имеем

$$U(x_{i+1}, y_k) = U(x_i, y_k) + \frac{h}{1!} \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{(x_i, y_k)} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{(x_i, y_k)} + \dots + \frac{h^n}{n!} \frac{\partial^n U}{\partial x^n} \Big|_{(x_i, y_k)} + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} U}{\partial x^{n+1}} \Big|_{(x_i + \Theta_1 h, y_k)}, \quad (6.13)$$

где $0 < \Theta_1 < 1$,

$$U(x_{i-1}, y_k) = U(x_i, y_k) - \frac{h}{1!} \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{(x_i, y_k)} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{(x_i, y_k)} - \dots$$

$$(-1)^n \frac{h^n}{n!} \frac{\partial^n U}{\partial x^n} \Big|_{(x_i, y_k)} + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} U}{\partial x^{n+1}} \Big|_{(x_i - \Theta_2 h, y_k)},$$
(6.14)

где $0 < \Theta_2 < 1$.

Здесь мы предполагаем, что функция $U(x, y)$ в области \bar{D} имеет непрерывные частные производные до n -го порядка включительно.

Из (6.13) и (6.14), положив $n = 1$, получаем

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{(x_i, y_k)} = \frac{U(x_{i+1}, y_k) - U(x_i, y_k)}{h} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{(x_i + \Theta_1 h, y_k)},$$
(6.15)

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{(x_i, y_k)} = \frac{U(x_i, y_k) - U(x_{i-1}, y_k)}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{(x_i - \Theta_2 h, y_k)},$$
(6.16)

где $0 < \Theta_1 < 1$, $0 < \Theta_2 < 1$.

При $n = 2$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{(x_i, y_k)} = \frac{U(x_{i+1}, y_k) - U(x_{i-1}, y_k)}{h} - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \Big|_{(x_i + \Theta_3 h, y_k)},$$
(6.17)

где $-1 < \Theta_3 < 1$.

Точно так же можно получить выражение частной производной $\frac{\partial U}{\partial y}$ в точке (x_i, y_k) через значения функции $U(x, y)$ в узлах сетки

$$\frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{(x_i, y_k)} = \frac{U(x_i, y_{k+1}) - U(x_i, y_k)}{l} - \frac{l}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Big|_{(x_i, y_k + \tau_1 l)},$$
(6.18)

$$\frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{(x_i, y_k)} = \frac{U(x_i, y_k) - U(x_i, y_{k-1})}{l} - \frac{l}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Big|_{(x_i, y_k - \tau_2 l)},$$
(6.19)

где $0 < \tau_1 < 1$, $0 < \tau_2 < 1$.

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{(x_i, y_k)} = \frac{U(x_i, y_{k+1}) - U(x_i, y_{k-1})}{l} - \frac{l^2}{6} \left. \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} \right|_{(x_i, y_k + \tau_3 l)}, \quad (6.20)$$

где $-1 < \tau_3 < 1$.

Складывая равенства (6.133) и (6.14), записанные при $n = 3$, нетрудно

получить выражение $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ через $U(x_{i+1}, y_k)$, $U(x_i, y_k)$ и

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{(x_i, y_k)} = \frac{U(x_{i+1}, y_k) - 2U(x_i, y_k) + U(x_{i-1}, y_k)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \left. \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right|_{(x_i + \Theta' h, y_k)}, \quad (6.21)$$

где $-1 < \Theta' < 1$,

и аналогично

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right|_{(x_i, y_k)} = \frac{U(x_i, y_{k+1}) - 2U(x_i, y_k) + U(x_i, y_{k-1})}{l^2} - \frac{l^2}{12} \left. \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} \right|_{(x_i, y_k + \tau' l)}, \quad (6.22)$$

где $-1 < \tau' < 1$.

Укажем замену и для производной $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right|_{(x_i, y_k)} &= \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] \Big|_{(x_i, y_k)} = \frac{\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{(x_i, y_{k+1})} - \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{(x_i, y_{k-1})}}{2l} + o(l^2) = \\ &= \frac{1}{2l} \left[\frac{U(x_{i+1}, y_k) - U(x_{i-1}, y_k)}{2h} + o(h^2) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{U(x_{i+1}, y_{k-1}) - U(x_{i-1}, y_{k-1})}{2h} + o(l^2) \right] = \\ &= \frac{U(x_{i+1}, y_{k+1}) - U(x_{i-1}, y_{k+1}) - U(x_{i+1}, y_{k-1}) + U(x_{i-1}, y_{k-1})}{4hl} + o(h^2 + l^2) \end{aligned} \quad (6.23)$$

Выражения (6.15)–(6.23) для замены частных производных разностными отношениями не является единственными. Если брать дополнительные значения функции U в других узлах сетки, то можно получить более точные выражения, но будут и более сложными.

Теперь можно непосредственно перейти к решению задачи: заменить дифференциальное уравнение (6.12) в точке (x_i, y_k) так называемым сеточным уравнением.

Обозначим $f(x_i, y_k) = f_{ik}$. Подставляя формулы (6.17), (6.20)–(6.23) в уравнение (6.12), получим сеточное уравнение, заменяющее дифференциальное уравнение в точке (x_i, y_k)

$$L_h(U_{ik}) = f_{ik},$$

где под U_{ik} понимается приближенное значение функции $U(x, y)$ в точке (x_i, y_k) .

Например, для уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f(x, y)$$

сеточное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{U(x_{i+1}, y_k) - 2U(x_i, y_k) - U(x_{i-1}, y_k)}{h^2} + \\ & + \frac{U(x_i, y_{k+1}) - 2U(x_i, y_k) - U(x_i, y_{k-1})}{l^2} + o(h^2 + l^2) = f_{ik}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

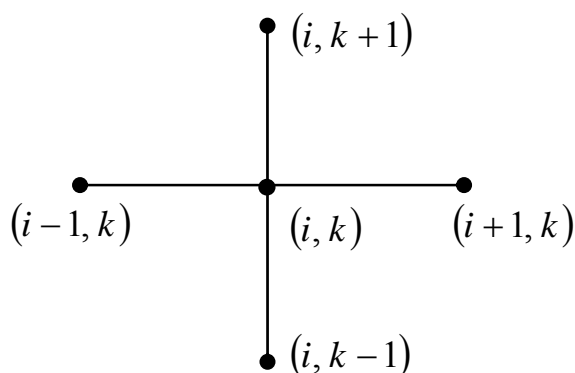
Если решение уравнения (6.12) имеет в области D непрерывные частные производные до 4-го порядка включительно, то в равенстве (6.24) величиной $o(h^2 + l^2)$ при достаточно малых h и l можно пренебречь. Окончательно получим

$$\begin{aligned} & \frac{U(x_{i+1}, y_k) - 2U(x_i, y_k) - U(x_{i-1}, y_k)}{h^2} + \\ & + \frac{U(x_i, y_{k+1}) - 2U(x_i, y_k) - U(x_i, y_{k-1})}{l^2} = f_{ik}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Заметим, что сеточное уравнение (6.25) имеет особенно простой вид, когда шаги h и l равны между собой.

Член $o(h^2 + l^2)$ имеет смысл погрешности, с которой сеточный оператор $L_h(U_{ik})$ заменяет дифференциальный оператор $L(U)$ во внутренней точке сеточной области.

Для замены дифференциального оператора сеточным привлекается схема точек, получившая название «крест».



Отметим, что сеточное уравнение (6.25) имеет место для всех внутренних узлов сеточной области, т.е. для точек множества D_h^* . Заменой в каждом узле сетки дифференциального уравнения сеточным сводим решение дифференциального уравнения к системе разностных уравнений.

Погрешность замены дифференциального уравнения разностным, оценивается неравенством

$$|R_{i,k}| \leq \frac{h^2}{6} M_4, \quad \text{где} \quad M_4 = \max_D \left\{ \left| \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right|, \left| \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} \right| \right\}.$$

Рассмотрим метод сеток решения краевых задач для основных уравнений математической физики (волнового уравнения, уравнения теплопроводности, уравнения Пуассона).

I. Метод сеток для уравнений эллиптического типа

Ставится задача Дирихле для уравнения Пуассона, т.е. требуется найти функцию $U(x, y)$, которая в области D удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (6.26)$$

а на контуре Γ этой области граничному условию $U|_{\Gamma} = \varphi(M)$, где φ — заданная непрерывная функция на Γ , M — точка, принадлежащая контуру Γ .

Заменяя в каждом внутреннем узле сетки уравнение (6.26) сеточным уравнением (6.25), получим совокупность линейных алгебраических уравнений относительно значений U_{ik} функции $U(x, y)$ в узлах (i, k) .

Теперь необходимо граничные условия заменить сеточными уравнениями

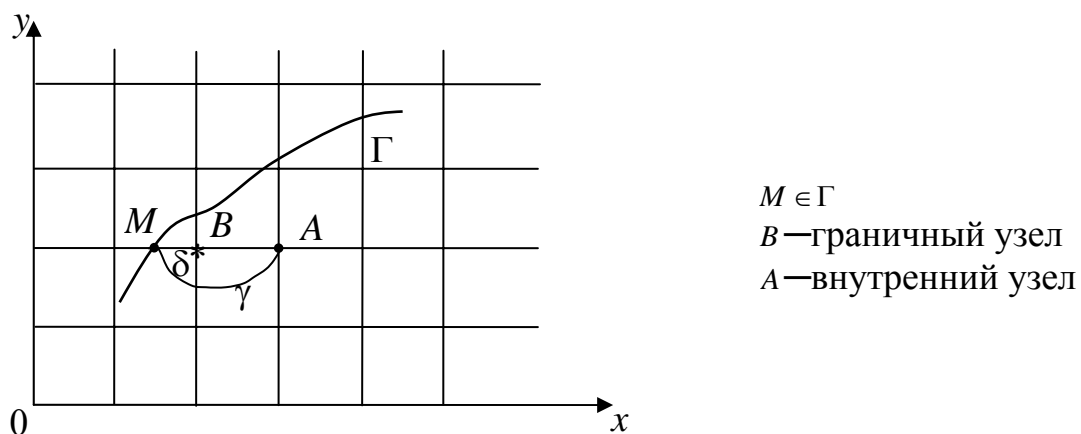


Рис. 2

Требуется определить, каким следует брать сеточное значение функции в точке B .

Здесь возможны несколько способов. Простейшие из них:

Способ 1. В качестве значения $U(B)$ берут значение функции φ в точке контура, ближайшей к точке B , т.е. полагают $U(B) = \varphi(M)$. Такая замена выполняется с погрешностью $o(h)$.

Способ 2. Для вычисления значения функции $U(B)$ используют значения функции в точках $M(x, y)$ и $A(x + \gamma, y)$, где $\gamma = \delta + h$ (см. Рис. 2).

Воспользуемся разложениями Тейлора. Имеем:

$$U(B) = \varphi(M) + \frac{\delta}{1!} U'_x(M) + \frac{\delta^2}{2!} U''_{xx}(M) + \dots,$$

$$U(A) = \varphi(M) + \frac{\gamma}{1!} U'_x(M) + \frac{\gamma^2}{2!} U''_{xx}(M) + \dots.$$

Откуда, исключая $U'_x(M)$

$$\gamma U(B) - \delta U(A) = \frac{(\gamma - \delta)}{h} \varphi(M) + \frac{\gamma^2 \delta - \delta^2 \gamma}{2!} U''_{xx}(M) + \dots,$$

$$\Rightarrow U(B) = \frac{h \varphi(M) + \delta U(A)}{h + \delta} + o(h^2).$$

Если h достаточно мало, то членом $o(h^2)$ можно пренебречь, и мы получим

$$U_B = \frac{h \varphi(M) + \delta U(A)}{h + \delta}. \quad (6.27)$$

Формула (6.27) называется **формулой Коллатца**.

Замечание. Для уменьшения погрешности при замене криволинейной области D на сеточную область D_h иногда к области D_h кроме граничных узлов Γ^* добавляют узлы, лежащие за пределами D , но удаленных от узлов, лежащих на Γ и ближайших внутренних узлов по направлению осей Ox и Oy не более, чем на h и l соответственно.

Такие узлы будем называть также граничными узлами. Для них составляются сеточные уравнения следующего вида (например, для узла C , см. Рис. 3)

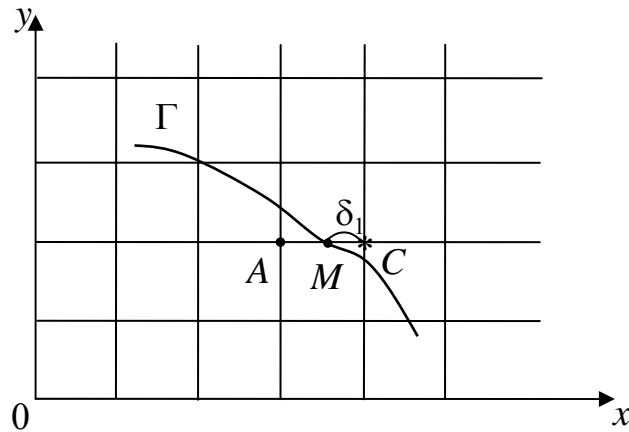


Рис. 3

$$U_C = \frac{\delta_1 U(A) - h\varphi(M)}{\delta_1 - h}. \quad (6.28)$$

Записав для каждого узла уравнение (6.27) и (6.28), присоединяем их к системе сеточных уравнений для внутренних узлов. Полученную систему алгебраических уравнений относительно значений U_{ik} решаем любым известным методом, например, методом Гаусса.

Погрешность приближенного решения, полученного разностным методом, складывается из трех погрешностей:

- 1) погрешности замены дифференциального уравнения разностным;
- 2) погрешности аппроксимации краевых условий;
- 3) погрешности, получаемой в результате того, что система разностных уравнений решается приближенным методом.

Задача 1. Применяя метод сеток с шагом $h = 1/4$, найти решение уравнения Лапласа в квадрате с вершинами $A(0;0)$, $B(0;1)$, $C(1;1)$, $D(1;0)$ при условиях: $U|_{AB} = 30y$, $U|_{BC} = 30(1 - x^2)$, $U|_{CD} = 0$, $U|_{AD} = 0$

Решение. Строим сетку с шагом $h = 1/4$ в квадрате $ABCD$. Отметим индексы узлов (см. Рис. 4).

(0,4)	(1,4)	(2,4)	(3,4) (4,4)
(0,3)	(1,3)	(2,3)	(3,3) (4,3)
(0,2)	(1,2)	(2,2)	(3,2) (4,2)
(0,1)	(1,1)	(2,1)	(3,1) (4,1)
	(1,0)	(2,0)	(3,0) (4,0)

Рис.4

В каждом внутреннем узле (в этой задаче 9 внутренних узлов) уравнение Лапласа $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$ заменяем сеточным уравнением.

Например, для узла (1,1) в силу равенства (16) будем иметь:

$$\frac{U_{21} - 2U_{11} + U_{01}}{1/16} + \frac{U_{12} - 2U_{11} + U_{10}}{1/16} = 0$$

и так далее для всех узлов. Получим систему сеточных уравнений

$$\begin{cases} U_{21} + U_{01} + U_{12} + U_{10} - 4U_{11} = 0, \\ U_{31} + U_{11} + U_{22} + U_{20} - 4U_{21} = 0, \\ U_{41} + U_{21} + U_{32} + U_{30} - 4U_{31} = 0, \\ U_{22} + U_{02} + U_{13} + U_{11} - 4U_{12} = 0, \\ U_{32} + U_{12} + U_{23} + U_{21} - 4U_{22} = 0, \\ U_{42} + U_{22} + U_{33} + U_{31} - 4U_{32} = 0, \\ U_{23} + U_{03} + U_{14} + U_{12} - 4U_{13} = 0, \\ U_{33} + U_{13} + U_{24} + U_{22} - 4U_{23} = 0, \\ U_{43} + U_{23} + U_{34} + U_{32} - 4U_{33} = 0. \end{cases} \quad (6.29)$$

Учитывая граничные условия, найдем численные значения функции $U(x, y)$, в граничных узлах.

$$\begin{aligned} U_{10} = U_{20} = U_{30} = U_{41} = U_{42} = U_{43} &= 0, \\ U_{01} = \frac{30}{4} = 7.5, \quad U_{02} = 15, \quad U_{03} = 30 \cdot \frac{3}{4} = 22.5, \\ U_{14} = 28.13, \quad U_{24} = 22.5, \quad U_{34} = 13.13. \end{aligned}$$

В остальных узлах краевые условия не используются. Перепишем систему (6.29)

$$\begin{cases} U_{21} + U_{12} - 4U_{11} = -7.5, \\ U_{31} + U_{11} + U_{22} - 4U_{21} = 0, \\ U_{22} + U_{13} + U_{11} - 4U_{12} = -15, \\ U_{32} + U_{12} + U_{23} + U_{21} - 4U_{22} = 0, \\ U_{23} + U_{12} - 4U_{13} = -50.63, \\ U_{33} + U_{13} + U_{22} - 4U_{23} = -22.5. \\ U_{21} + U_{32} - 4U_{31} = 0, \\ U_{22} + U_{33} + U_{31} - 4U_{32} = 0, \\ U_{23} + U_{32} - 4U_{33} = -13.13. \end{cases}$$

Решая эту систему методом Гаусса, получим

$$U_{11} = 5.37, \quad U_{21} = 3.7, \quad U_{31} = 1.88,$$

$$U_{12} = 10.28, \quad U_{22} = 7.53, \quad U_{32} = 3.99, \\ U_{13} = 18.25, \quad U_{23} = 12.28, \quad U_{33} = 5.88.$$

Мы получили приближенное решение уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$ в квадрате $ABCD$ при заданных краевых условиях.

II. Метод сеток для уравнений параболического типа

Для уравнений параболического типа метод сеток имеет многие общие черты с методом сеток в случае уравнений эллиптического типа, но в силу того, что задачи для уравнений параболического типа имеют иную природу по сравнению с задачами для эллиптических уравнений, после замены дифференциальных уравнений и граничных условий сеточные уравнения в случае параболического типа допускают решение их по шагам в направлении оси времени.

Рассмотрим смешанную задачу для одномерного уравнения теплопроводности (к ней, в частности, приводит задача о распространении тепла в однородном стержне).

Найти функцию $U(x, t)$, которая в области $G = \{a < x < b, t > 0\}$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, начальному условию $U(x, 0) = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$ и граничным условиям:

$$\beta_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \gamma_1 U \Big|_{x=a} = \Psi_1(t), \\ \beta_2 \frac{\partial U}{\partial x} + \gamma_2 U \Big|_{x=b} = \Psi_2(t), \quad t \geq 0.$$

Построим прямоугольную сетку точек $(a + ih, kl)$, где $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{0, m}$, $h = \frac{b-a}{n}$. Будем считать $a = 0$, $b = 1$, $h = \frac{1}{n}$.

Узлы, лежащие на прямых $x = 0$, $x = 1$, $t = 0$ считаются граничными узлами, все другие — внутренними. Для внутренних узлов выписываем сеточные уравнения, аппроксимирующие

дифференциальные уравнения, т.е. производную $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ в узле (i, k) заменяем разностным отношением

$$\frac{U_{i+1,k} - 2U_{i,k} + U_{i-1,k}}{h^2},$$

а производную $\frac{\partial U}{\partial t}$ одним из трех разностных отношений

$$\frac{U_{i,k+1} - U_{i,k}}{l}, \quad \frac{U_{i,k} - U_{i,k-1}}{l}, \quad \frac{U_{i,k+1} - U_{i,k-1}}{2l}.$$

В соответствии с этими способами замены производной $\frac{\partial U}{\partial t}$ получим три типа сеточных уравнений, заменяющих дифференциальное уравнение $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$.

Если ввести обозначение $\alpha = \frac{l}{h^2}$, то будем иметь

$$U_{i,k+1} = (1 - 2\alpha)U_{i,k} + \alpha(U_{i+1,k} + U_{i-1,k}), \quad (6.30)$$

$$(1 + 2\alpha)U_{i,k} - \alpha(U_{i+1,k} + U_{i-1,k}) = U_{i,k-1}, \quad (6.31)$$

$$U_{i,k+1} = 2\alpha(U_{i+1,k} - 2U_{i,k} + U_{i-1,k}) + U_{i,k-1}. \quad (6.32)$$

Для узлов, лежащих на прямой $t = 0$, из начальных условий имеем

$$U_{i0} = \varphi_i. \quad (6.33)$$

Для граничных узлов, лежащих на прямых $x = 0$, $x = 1$ запишем соотношения

$$\beta_{1k} \frac{U_{1k} - U_{0k}}{h} + \gamma_{1k} U_{0k} = \Psi_{1k},$$

$$\beta_{2k} \frac{U_{nk} - U_{n-1,k}}{h} + \gamma_{2k} U_{nk} = \Psi_{2k}.$$

Сеточное уравнение (6.30) в совокупности с начальными условиями (6.33) называется **разностной схемой I**, уравнение (6.31) с условиями (6.33) — **разностной схемой II**, уравнение (6.32) с условиями (6.33) — **разностной схемой III**.

Разностная схема I является рекурсивным правилом, так как по формуле (6.33) можно вычислить значение функции U_{ik} на нулевом слое при $k=0$, а по формуле (6.30) затем последовательно, полагая $k=0,1,2,\dots$ можно вычислить значение сеточной функции на первом, втором и других слоях. Разностную схему I по этой причине называют явной. Явной также будет схема III, так как по ней можно вести вычисления, как и по схеме I, если значения сеточной функции U_{i1} на первом слое уже вычислены по какому-либо способу. При вычислениях по разностной схеме II уже для определения значений сеточной функции U_{i1} на первом слое необходимо решать систему линейных алгебраических уравнений. Схема II называется неявной.

Доказано, что при $0 < \alpha \leq 1/2$ схема I устойчива, схема III неустойчива. Схема II устойчива при любом α .

При $\alpha = 1/2$ уравнение (6.30) принимает наиболее удобный вид

$$U_{i,k+1} = \frac{U_{i-1,k} + U_{i+1,k}}{2}, \quad (6.34)$$

а при $\alpha = 1/6$ (достигается наилучшая точность)

$$U_{i,k+1} = \frac{1}{6}(U_{i-1,k} + 4U_{i,k} + U_{i+1,k}).$$

Отметим, что сеточные уравнения (6.30) и (6.31) заменяют дифференциальное уравнение с погрешностью $o(l + h^2)$, а уравнение (6.32) — с погрешностью $o(l^2 + h^2)$ в предположении, что решение уравнения $U(x,t)$ имеет в полуплоскости $t > 0$ непрерывные производные по t до 3-го порядка, а по x — до 4-го порядка включительно.

Оценки погрешностей приближенных решений, полученных из разностных схем I, II, III в области $a \leq x \leq b$, $0 \leq t \leq T$, соответственно имеют вид:

$$|U - \tilde{U}| \leq \frac{T}{3} M_1 h^2,$$

$$|U - \tilde{U}| \leq T \left(\frac{l}{2} + \frac{h^2}{12} \right) M_1,$$

$$|U - \tilde{U}| \leq \frac{T}{135} M_2 h^4,$$

где \tilde{U} – точное решение задачи,

$$M_1 = \max \left\{ \left| \varphi^{(4)}(x) \right|, \left| \Psi_1''(t) \right|, \left| \Psi_2''(t) \right| \right\}, \quad M_2 = \max \left\{ \left| \varphi^{(6)}(x) \right|, \left| \Psi_1^{(4)}(t) \right|, \left| \Psi_2^{(4)}(t) \right| \right\}.$$

Замечание. Разностная схема называется сходящейся при заданном способе стремления h и l к нулю, если решения системы сеточных уравнений стремится при этом к точному решению задачи для дифференциального уравнения. Те сходящиеся разностные схемы, для которых малые погрешности, допускаемые в процессе решения сеточных уравнений не могут привести к большим отклонениям от точного решения системы, называются устойчивыми схемами.

Задача 2. Найти приближенное решение уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

удовлетворяющее условиям

$$U(x, 0) = [1.1 \cdot x^2 + 1.1] \cdot \sin(\pi \cdot x), \quad x \in [0; 1],$$

$$U(0, t) = U(1, t) = 0, \quad t \in [0; 0.02]$$

взяв по аргументу x шаг $h = 0.1$. Для решения будем использовать уравнение (6.34). При выводе уравнения (6.34) предполагалось, что

$\alpha = \frac{l}{h^2}$, $\alpha = \frac{1}{2}$. Положив $h = 0.1$, получим шаг $l = \frac{h^2}{2} = 0.005$.

Используя начальные условия, найдем значения функции на нулевом слое $t = 0$

$$\begin{aligned}
 U_{00} &= 0, U_{10} = U(0.1;0) = \left[1.1 \cdot 0.1^2 + 1.1\right] \sin(0.1\pi) = 0.34317, \\
 U_{20} &= U(0.2;0) = 0.67213, U_{30} = U(0.3;0) = 0.96967 \\
 U_{40} &= U(0.4;0) = 1.21330, U_{50} = 1.37501, U_{60} = 1.42323, U_{70} = 1.32705, \\
 U_{80} &= 1.06222, U_{90} = 0.61797.
 \end{aligned}$$

Далее, значения функции на первом слое находим по формуле (6.34), используя значения на нулевом слое и краевые условия при $k = 0, (t = 0.005)$

$$U_{i1} = \frac{U_{i+1,0} + U_{i-1,0}}{2}.$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned}
 U_{11} &= \frac{1}{2}(U_{20} + U_{00}) = \frac{1}{2}(0.67213 + 0) = 0.33607, \\
 U_{21} &= \frac{1}{2}(U_{30} + U_{10}) = \frac{1}{2}(0.96967 + 0.34317) = 0.65642, \\
 U_{31} &= 0.94271, U_{41} = 1.17234, U_{51} = 1.31826, U_{61} = 1.35103, \\
 U_{71} &= 1.24272, U_{81} = 0.97251, U_{91} = 0.53111
 \end{aligned}$$

Аналогично, значения функции на втором слое вычисляем по формуле (6.34) при $k = 1$

$$U_{i2} = \frac{U_{i+1,1} + U_{i-1,1}}{2}.$$

И так далее на всех слоях, т.е. при $t = 0.01$ (второй слой), $t = 0.015$ (третий слой) и $t = 0.02$ (четвертый слой). Результаты вычислений представим в виде таблицы:

Таблица 12

Расчетная таблица

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
t	U_{1k}	U_{2k}	U_{3k}	U_{4k}	U_{5k}	U_{6k}	U_{7k}	U_{8k}	U_{9k}
0.02	0.31065	0.60232	0.85466	1.04521	1.14988	1.14460	1.01787	0.76358	0.41201
0.15	0.31969	0.62129	0.88494	1.08803	1.20549	1.2172	1.08370	0.82401	0.44346
0.01	0.32821	0.63939	0.91437	1.13049	1.26168	1.28049	1.16177	0.88692	0.48625
0.005	0.33607	0.65642	0.94271	1.17234	1.31826	1.35101	1.24272	0.97251	0.53111
0	0.34311	0.67213	0.96697	1.21330	1.37501	1.42322	1.32705	1.06222	0.61797

III. Метод сеток для уравнений гиперболического типа

Дифференциальные уравнения гиперболического типа часто встречаются в физических задачах, связанных с переносом энергии и с процессами колебаний.

Применим метод сеток для решения смешанной задачи колебания струны, которая состоит в отыскании дважды непрерывно дифференцируемой функции $U(x, y)$, удовлетворяющей в области

$D = \{y > 0, a < x < b\}$ уравнению $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$, а на границе области

при $y = 0$ начальным условиям

$$U(x, 0) = \varphi(x), \frac{\partial U(x, 0)}{\partial y} = \psi(x), x \in (a, b)$$

и при $x = a, x = b$ краевым условиям

$$U(a, y) = \Phi_a(y), U(b, y) = \Phi_b(y).$$

Выберем прямоугольную сетку, положив

$$x_i = ih, y_k = kl, h > 0, l > 0, i = 0, 1, \dots, l = 0, 1, \dots$$

Множество внутренних узлов обозначим через D_h^* , а множество граничных узлов - Γ_h^* .

Используя формулы замены производных разностным отношением и схему точек «крест», заменим заданное дифференциальное уравнение сеточным

$$\frac{U_{i,k+1} - 2U_{i,k} + U_{i,k-1}}{l^2} - \frac{U_{i+1,k} - 2U_{i,k} + U_{i-1,k}}{h^2} = 0.$$

Обозначим $\alpha = \frac{l}{h}$, тогда уравнение запишется в виде

$$U_{i,k+1} = 2U_{i,k} - U_{i,k-1} + \alpha^2 [U_{i+1,k} - 2U_{i,k} + U_{i-1,k}] = 0 \quad (6.35)$$

Доказано, что при $\alpha \leq 1$ это уравнение устойчиво. В частности при $\alpha = 1$ оно имеет простой вид:

$$U_{i,k+1} = U_{i+1,k} + U_{i-1,k} - U_{i,k-1}.$$

Из формулы (6.35) видно, что если сетка достаточно мала, то зная значения решения в узлах $k-1$ и k -го слоев, можно найти решение во всех узлах $k+1$ -го слоя.

Таким образом, для решения задачи необходимо знать значения решения на двух начальных слоях $k=0$ и $k=1$. Их можно найти из начальных условий одним из двух следующих способов.

Первый способ. В начальных условиях задачи заменим производную

$$\frac{\partial U(x,0)}{\partial y} = \frac{U_{i1} - U_{i0}}{l}.$$

Тогда для определения значений в узлах первых двух горизонтальных рядов будем иметь

$$U_{i0} = \varphi_i, \quad \frac{U_{i1} - U_{i0}}{l} = \psi_i,$$

или

$$U_{i0} = \varphi_i, \quad U_{i1} = U_{i0} - l\psi_i.$$

Второй способ. Привлечем еще один горизонтальный ряд $k=-1$ и заменим производную по формуле

$$\frac{\partial U(x,0)}{\partial y} = \frac{U_{i1} - U_{i,-1}}{2l}.$$

Тогда из начальных условий будем иметь

$$U_{i0} = \varphi_i, \quad \frac{U_{i1} - U_{i,-1}}{2l} = \psi_i.$$

Значения $U_{i,-1}$ исключим, используя сеточное уравнение (6.35) для узла $(i,0)$, считая, что заданное дифференциальное уравнение $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$ удовлетворяется и на начальной прямой. Тогда получим

$$U_{i,1} = 2U_{i,0} - U_{i,-1} + \alpha^2 [U_{i+1,0} - 2U_{i,0} + U_{i-1,0}] = 0,$$

или

$$2U_{i1} = 2U_{i0} + 2l\psi_i + \alpha^2 [U_{i+1,0}] - 2U_{i0} + U_{i-1,0}.$$

Итак, значения решения на первых двух рядах будут определяться следующим образом

$$\begin{aligned} U_{i0} &= \varphi_i, \\ U_{i1} &= \frac{1}{2} \left[2\varphi_i + 2l\psi_i + \alpha^2 \{ \varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1} \} \right] \end{aligned} \quad (6.36)$$

Второй способ в некоторых случаях предпочтительнее, так как в этом случае мы имеем лучшую аппроксимацию начальных условий.

Чтобы получить методом сеток решение, сколь угодно близкое к точному решению задачи для гиперболического уравнения, нельзя произвольно выбирать соотношения шагов сетки по осям OX и OY .

Выше было замечено, что сеточное уравнение (6.35) устойчиво при $\alpha \leq 1$. При $\alpha = 1$ соотношения (6.36) особенно просты

$$\begin{aligned} U_{i0} &= \varphi_i, \\ U_{i1} &= \frac{1}{2} [2h\psi_i + \{ \varphi_{i+1} + \varphi_{i-1} \}]. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Задача 3. Найти приближенное решение уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad x \in (0;1), \quad y \in (0;0.5),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$U(x,0) = [1.1x^2 + 1.1] \sin(\pi x), \quad \frac{\partial U(x,0)}{\partial y} = 0$$

и граничным условиям

$$U(0, y) = 0, \quad U(1, y) = 0$$

для $0 \leq y \leq 0.5, 0 \leq x \leq 1$, взяв по аргументу x шаг $h = 0.1$.

Решение. Наиболее простой вид сеточное уравнение для дифференциального уравнения гиперболического типа принимает при $\alpha = \frac{h}{l} = 0.1$. Значения $U(x, y)$ на двух начальных слоях найдем вторым способом. Так как в нашей задаче $\psi = 0$, то согласно (6.37)

$$U_{i1} = \frac{1}{2} [\varphi_{i+1} + \varphi_{i-1}].$$

Последовательные вычисления значений функции $U(x, y)$, соответствующие $y = 0$ (нулевой уровень) дают

$U_{10} = 0.34317$	$U_{20} = 0.67213$	$U_{30} = 0.96967$
$U_{40} = 1.21330$	$U_{50} = 1.37501$	$U_{60} = 1.42322$
$U_{70} = 1.32705$	$U_{80} = 1.06222$	$U_{90} = 0.61797$

Теперь вычислим значения функции $U(x, y)$ на первом слое $y = 0.1$

$U_{11} = 0.33607$	$U_{21} = 0.65642$	$U_{31} = 0.94271$
$U_{41} = 1.17234$	$U_{51} = 1.31826$	$U_{61} = 1.35103$
$U_{71} = 1.24272$	$U_{81} = 0.97251$	$U_{91} = 0.53111$

Последующие значения функции на следующих слоях вычислим по формуле

$$U_{i,k+1} = U_{i+1,k} + U_{i-1,k} - U_{i,k-1}.$$

Для второго слоя ($y = 0.2$)имеем

$$U_{12} = U_{21} + U_{01} - U_{10} = 0.65642 + 0 - 0.34317 = 0.31325$$

$$U_{22} = U_{31} + U_{11} - U_{20} = 0.94271 + 0.33607 - 0.67213 = 0.60665$$

$$U_{32} = U_{41} + U_{21} - U_{30} = 1.17234 + 0.65642 - 0.96967 = 0.85909$$

$$U_{42} = U_{51} + U_{31} - U_{40} = 1.31826 + 0.94271 - 1.21330 = 1.04767$$

$$U_{52} = U_{61} + U_{41} - U_{50} = 1.35103 + 1.17234 - 1.37501 = 1.14836$$

$$U_{62} = U_{71} + U_{51} - U_{60} = 1.24272 + 1.31826 - 1.42322 = 1.13776$$

$$U_{72} = U_{81} + U_{61} - U_{70} = 0.97251 + 1.35103 - 1.32705 = 0.99649$$

$$U_{82} = U_{91} + U_{71} - U_{80} = 0.53111 + 1.24272 - 1.06222 = 0.71161$$

$$U_{92} = U_{10,1} + U_{81} - U_{90} = 0 + 0.97251 - 0.61797 = 0.35454$$

Значения U_{10} , $U_{10,1}$ известны из граничных условий задачи:

$$U_{01} = U(0, y) = 0, U_{10,1} = U(1, y) = 0.$$

Аналогично вычисляются значения $U(x, y)$ на всех остальных слоях.

Так на третьем слое

$$U_{13} = U_{22} + U_{02} - U_{11} = 0.60665 + 0 - 0.33607 = 0.27058$$

$$U_{23} = U_{32} + U_{12} - U_{21} = 0.85909 + 0.31325 - 0.65642 = 0.51502$$

и т.д.

Таблица 13

Расчетная таблица

X	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Y	U_{0k}	U_{1k}	U_{2k}	U_{3k}	U_{4k}	U_{5k}	U_{6k}	U_{7k}	U_{8k}	U_{9k}	$U_{10,k}$
0.5	0	0.10496	0.17869	0.19504	0.13640	0.00034	-0.13840	-0.19481	-0.17979	-0.10486	0
0.4	0	0.20267	0.37554	0.49194	0.53111	0.47957	0.33630	0.17485	0.07578	0.02298	0
0.3	0	0.27058	0.51592	0.71161	0.83511	0.86717	0.79282	0.60689	0.37752	0.18064	0
0.2	0	0.31325	0.60665	0.85909	1.04767	1.14836	1.13776	0.99649	0.71161	0.35454	0
0.1	0	0.33607	0.65642	0.94271	1.17234	1.31826	1.35103	1.24272	0.97251	0.53111	0
0	0	0.34317	0.67213	0.96967	1.21330	1.37501	1.42322	1.32705	1.06222	0.61797	0

Здесь во втором и последнем столбце граничные условия.