§1. Метод итераций

Пусть дано уравнение с одной неизвестной x

$$x = \varphi(x). \qquad (5.1)$$

Метод отыскания приближенных значений корня уравнения (5.1) с помощью формулы $x_n = \varphi(x_{n-1})$ называют просто методом итерации.

При решении таких уравнений возникает два вопроса:

1) о существовании решения уравнения (5.1);
2) о том, как найти это решение.

Ответ на эти вопросы дает следующая теорема.

Теорема. Если функция $\varphi(x)$ на отрезке $[x_0, x_0 + r]$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \le \alpha |x_1 - x_2|$, $\qquad (5.2)$

где $0 < \alpha < 1$;

2) $0 \le \rho \le r$, $\qquad (5.3)$

где $\rho = \dfrac{\varphi(x_0) - x_0}{1 - \alpha}$, то тогда существует единственное решение x_* уравнения (5.1) на отрезке $[x_0, x_0 + r]$, равное

$$x_* = \lim_{n \to \infty} x_n, \qquad (5.4)$$

где

$$x_n = \varphi(x_{n-1}),\ n = 1,2,...... \qquad (5.5)$$

При этом имеет место оценка погрешности метода

$$|x_* - x_n| \le \rho\, \alpha^n. \qquad (5.6)$$

Доказательство

Доказательство разобьем на 5 частей.

I. В первой части докажем, что по формуле (5.5) может быть найдена последовательность $\{x_n\}: x_1, x_2, ...$ такая, что

$$x_0 \le x_n \le x_0 + \rho. \qquad (5.7)$$

Доказательство этой части теоремы проведем по методу индукции. Для этого предположим, что члены последовательности $x_0, x_1.....x_{m-1}$, найденные по формуле (5.5) удовлетворяют условию

$$x_0 \le x_k \le x_0 + \rho, \qquad (5.8)$$

$k = 1,2,....m-1$. Покажем, что член x_m, найденный по формуле (5.5), тоже удовлетворяет условию

$$x_0 \le x_m \le x_0 + \rho. \qquad (5.9)$$

Из (5.5) следует, что

$$x_m = \varphi(x_{m-1}) \ge |(2)| \ge \varphi(x_0) - \alpha|x_{m-1} - x_0|. \qquad (5.10)$$

Из (5.8) и (5.10) вытекает

$$x_m \ge \varphi(x_0) - \alpha\rho. \qquad (5.11)$$

Здесь возможны 2 варианта:

Случай 1. $0 < \alpha \le \frac{1}{2}$;

Случай 2. $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$.

Других случаев быть не может, так как по условию теоремы $0 < \alpha < 1$.

Рассмотрим первый случай.

В первом случае

$$\alpha\rho \le (1-\alpha)\rho. \qquad (5.12)$$

Тогда из (5.11) с учетом (5.12) получим

$$x_m \ge \varphi(x_0) - (1-\alpha)\rho = \varphi(x_0) - (1-\alpha)\frac{\varphi(x_0) - x_0}{(1-\alpha)} = x_0,$$

т.е. в первом случае $x_m \ge x_0$.

Теперь рассмотрим второй случай.
Во втором случае

$$\frac{\varphi(x_0)-x_0}{\alpha} \le \frac{\varphi(x_0)-x_0}{1-\alpha}.$$

При этом возможны два варианта:

$$\text{a) } 0 \le x_{m-1}-x_0 \le \frac{\varphi(x_0)-x_0}{\alpha}; \qquad (5.13)$$

$$\text{b) } \frac{\varphi(x_0)-x_0}{\alpha} \le x_{m-1}-x_0 \le \rho. \qquad (5.14)$$

При условии (5.13) из (5.10) следует

$$x_m \ge \varphi(x_0)-\alpha|x_{m-1}-x_0| \ge \varphi(x_0)-\alpha\frac{\varphi(x_0)-x_0}{\alpha} = x_0.$$

Рассмотрим 2 вариант. По определению модуля

$$x_m \ge x_{m-1}-|x_m-x_{m-1}|. \qquad (5.15)$$

Вычитая из (5.5) при $n=m$ равенство (5) с $n=m-1$, и учитывая условие (5.2), находим

$$|x_m - x_{m-1}| = |\varphi(x_{m-1})-\varphi(x_{m-2})| \le \alpha|x_{m-1}-x_{m-2}| =$$
$$= \alpha|\varphi(x_{m-2})-\varphi(x_{m-3})| \le \alpha^2|x_{m-2}-x_{m-3}| \le \ldots.$$
$$\le \alpha^{m-1}|x_1-x_0| = \alpha^m\frac{|\varphi(x_0)-x_0|}{\alpha} \le |(14)| \le x_{m-1}-x_0$$

Откуда следует

$$x_{m-1}-|x_m-x_{m-1}| \le x_0. \qquad (5.16)$$

Учитывая (5.16) из (5.15) находим

$$x_m \ge x_0.$$

Тем самым доказана левая часть неравенства (5.9). По формуле (5.5)

$$x_m = \varphi(x_{m-1}) \le |(2)| \le \varphi(x_0) + \alpha|x_{m-1} - x_0| \le \left|\frac{\varphi(x_0) - x_0}{1-\alpha} = \rho\right| \le$$

$$\le (1-\alpha)\rho + x_0 + \alpha|x_{m-1} - x_0| \le |(2)| \le (1-\alpha)\rho + \alpha\rho + x_0 = x_0 + \rho$$

Тем самым первая часть теоремы доказана.

II. Во второй части докажем существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Очевидно, что

$$\begin{aligned} &|x_{n+p} - x_n| \le \sum_{m=p+1}^{n+p} |x_m - x_{m-1}| \le \sum_{m=p+1}^{n+p} \alpha^{m-1}|x_1 - x_0| < \\ &< r\sum_{m=p+1}^{n+p} \alpha^{m-1} = r\,\alpha^n \frac{1-\alpha^p}{1-\alpha} < r\frac{\alpha^n}{1-\alpha} \end{aligned} \quad . \quad (5.17)$$

Здесь $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n = 0$, так что последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной. Поэтому существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_*$ и $x_* \in [x_0, x_0 + \rho]$.

III. В третьей части докажем существование решения уравнения (5.1).

Так как $x_n = \varphi(x_{n-1})$, то

$$x_* = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi\left[\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right] = \varphi(x_*),$$

что и требовалось показать.

IV. В четвертой части докажем единственность решения уравнения (5.1).

Доказательство проведем по методу от противного. Предположим, что существует еще один корень x_{**} уравнения (5.1), т.е.

$$x_* = \varphi(x_*) \text{ и } x_{**} = \varphi(x_{**}).$$

Тогда $|x_* - x_{**}| = |\varphi(x_*) - \varphi(x_{**})| \le \alpha|x_* - x_{**}|$ и , следовательно, $x_* = x_{**}$.

V. В пятой части оценим погрешность метода итераций.

Нетрудно видеть, что

$$\left|x_* - x_n\right| = \left|\varphi(x_*) - \varphi(x_n)\right| \le \alpha\left|x_* - x_{n-1}\right| \le \ldots\ldots \le \alpha^n \left|x_* - x_0\right| \le \alpha^n \rho$$

Пример. Решим уравнение $x^3 - x - 1 = 0$ с двумя верными десятичными знаками, отрезком изоляции корня которого является отрезок $[1,2]$. Представим это уравнение в эквивалентном виде

$$x = \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{k}$, $f(x) = x^3 - x - 1$. Угловой коэффициент найдем из достаточного условия сходимости итерационного метода $|\varphi'(x)| < 1$, которое для данного уравнения принимает вид

$$\frac{f'(x)}{k} > 0,\ \ |k| \ge \frac{Q}{2},\ \ |f'(x)| \le Q.$$

Первое из этих неравенств определяет знак k, а второе – его модуль.

На отрезке изоляции корня $f'(x) = 3x^2 - 1, Q = f'(2) = 11$, так что $k > 0, |k| \ge \frac{11}{2}$. Полагая, например, $k = 6$, можно преобразовать данное уравнение к виду

$$x = \frac{1}{6}(1 + 7x - x^3).$$

Тогда наибольшее значение модуля производной функции $\varphi(x) = \frac{1}{6}(1 + 7x - x^3)$ на отрезке $[1,2]$ равно

$$M \equiv \max_{[1,2]}|\varphi'(x)| = |\varphi'(2)| = \frac{5}{6}.$$

Так как $\frac{1}{2} < M < 1$, то для получения приближения с требуемой точностью вычисления надо проводить с тем или иным числом запасных десятичных знаков.

Данные расчета представим в виде расчетной таблицы и в соответствии с основным рабочим правилом закончим вычисления, как только два последовательных вычисления с одним дополнительным знаком совпадут.

Таблица 5

Расчетная таблица

n	x_n	x_{n+1}
0	1	1.167
1	1.167	1.263
2	1.263	1.304
3	1.304	1.318
4	1.318	1.323
5	1.323	1.324
6	1.324	1.325
7	1.325	1.325

Таким образом, решение равно $x_* = 1.33 \pm 0.01$.

§2. Метод хорд

Решение алгебраических уравнений

$$f(x) = 0\,. \tag{5.18}$$

по методу хорд основывается на следующей теореме:
Теорема. Если функция $f(x)$ на отрезке изоляции корня $[a,b]$ удовлетворяет условиям
1) $f(a)f(b) < 0$, f -непрерывна на $[a,b]$, (5.19)
2) f', f''-непрерывны на $[a,b]$ и сохраняют знак, (5.20)
тогда существует единственное решение x_* уравнения (5.18) и

$$x_* = \lim_{n\to\infty}(x_n),$$

где

$$x_n = \begin{cases} x_{n-1} - \dfrac{(x_{n-1}-a)f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(a)}, \ x_0 = b,\ f(a)f(c) < 0 \\ x_{n-1} - \dfrac{(b-x_{n-1})f(x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})}, x_0 = a,\ f(a)f(c) \ge 0 \end{cases} \tag{5.21}$$

$c = a - \dfrac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}$. При этом имеет место оценка погрешности метода

$$\Delta_1 \le \frac{M-m}{m}\left|x_{n-1} - x_n\right|,$$

здесь $M = \max\limits_{[a,b]} |f'(x)|$, $m = \min\limits_{[a,b]} |f'(x)|$

Доказательство

Из условия (5.19) с учетом первой теоремы Больцано-Коши следует существование $\tilde{x}$ такого, что $f(\tilde{x}) = 0$. Нетрудно видеть, что уравнение (5.18) эквивалентно уравнению

$$x = \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Так как f, f' непрерывны и f' не меняет знак, то $\varphi(x)$-непрерывна на отрезке изоляции корня $[a, b]$.

Из (5.19), (5.20), (5.21) следует, что по формуле (5.21) можно построить последовательность $\{x_n\}$ такую, что все $x_n \in [a, b]$. Покажем, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_*$. По теореме Лагранжа

$$|x_* - x_n| = |\varphi(x_*) - \varphi(x_{n-1})| \le \alpha |x_* - x_{n-1}| \le .. \le \alpha^n |x_* - x_1|,$$

здесь $\alpha = \varphi'(x) = \dfrac{|f\, f''|}{f'^3} < 1$. Так как $\alpha < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n = 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - x_*| = 0$ и , следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_*$. Так как $\varphi(x)$-непрерывна, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_* = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi\left[\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right] = \varphi(x_*),$$

так что x_* является корнем уравнения (5.18). Единственность корня доказывается так же как и в методе итераций.

Оценим погрешность метода. Из (5.18) с учетом теоремы Лагранжа следует

$$|x_n - x_{n-1}| = \frac{|f(x_{n-1})|}{|K_{n-1}|} \ge m \frac{|x_* - x_{n-1}|}{|K_{n-1}|}, \qquad (5.22)$$

где $K_{n-1} = \dfrac{f(x_{n-1}) - f(a)}{x_{n-1} - a}$, $m = \min\limits_{[a,b]} |f'(x)|$. Тогда из (5.22) получим

$$|x_* - x_{n-1}| \le \frac{|x_n - x_{n-1}|}{m} |K_{n-1}|. \qquad (5.23)$$

По теореме Лагранжа

$$|K_{n-1}| = f'(\xi). \qquad (5.24)$$

Из монотонной сходимости последовательности $\{x_n\}$ к x_* следует, что

$$|x_* - x_{n-1}| = |x_{n-1} - x_n| + |x_n - x_*|. \qquad (5.25)$$

Подставляя (5.24) и (5.25) в (5.23), получим оценку для погрешности метода

$$|x_n - x_*| \le \frac{M - m}{m} |x_n - x_{n-1}|.$$

§3. Метод касательных

Решение алгебраических уравнений

$$f(x) = 0. \qquad (5.26)$$

по методу касательных основывается на следующей теореме:
Теорема. Если функция $f(x)$ на отрезке изоляции корня $[a,b]$ удовлетворяет условиям
1) $f(a)f(b) < 0$, f -непрерывна на $[a,b]$,
2) f', f''-непрерывны на $[a,b]$ и сохраняют знак,
тогда существует единственное решение x_* уравнения (1) и

$$x_* = \lim_{n \to \infty} (x_n),$$

где

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \qquad (5.27)$$

а начальное приближение выбирается из условия

$$x_0 = \begin{cases} a, f(a)f(c) < 0 \\ b, f(a)f(c) > 0 \\ c, f(a)f(c) = 0 \end{cases}$$

$c = a - \dfrac{(b-a)f(a)}{f(b) - f(a)}$. Оценка погрешности метода касательных дается неравенством

$$\Delta_2 \le \frac{\widetilde{M}}{2m}(x_n - x_{n-1})^2,$$

здесь $\widetilde{M} = \max\limits_{[a,b]} |f''(x)|$, $m = \min\limits_{[a,b]} |f'(x)|$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству предыдущей теоремы. Оценка погрешности находится с помощью формулы Тейлора

$$f(x_*) = 0 = f(x_{n-1}) + (x_* - x_{n-1})f'(x_{n-1}) + \frac{1}{2}(x_* - x_{n-1})^2 f''(\xi).$$

Откуда с учетом (5.27) находим оценку погрешности метода касательных

$$|x_* - x_n| = \frac{|x_* - x_{n-1}|^2}{2}\left|\frac{f''(\xi)}{f'(x_{n-1})}\right| \le \frac{\widetilde{M}}{2m}(x_n - x_{n-1})^2$$

Пример. Требуется решить по методу касательных следующее уравнение

$$x^2 + \ln(x) - 4 = 0$$

с точностью до 10^{-4}.

Первоначальный отрезок изоляции найдем графически: $[1,2]$. Сузим этот отрезок путем деления его пополам с учетом условия (5.19). При этом получим следующий отрезок изоляции корня $[1.75,2]$. Выберем начальное приближение x_0. Для этого найдем

$$c = 1.75 - \frac{(2-1.75) f(1.75)}{f(2) - f(1.75)} = 1.83820.$$

Тогда $f(1.75) f(c) < 0$. Следовательно, $x_0 = a = 1.75$. Найдем $\widetilde{M}, m$. Для этого найдем первую и вторую производные

$$f' = 2x + \frac{1}{x}, \ f'' = 2 - \frac{1}{x^2}.$$

Так как на отрезке изоляции корня эти производные монотонны, то они принимают экстремальные значения на краях отрезка, так что

$$\widetilde{M} = |f''(2)| = 1.75, \ m = |f'(1.75)| = 4.07143, \ \frac{\widetilde{M}}{m} = 0.21431$$

Последовательность приближенных значений корня находим по итерационной формуле (5.27). Расчетные данные представим в виде таблицы.

Таблица 6

Расчетная таблица

n	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$f'(x_{n-1})$	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	Δ
1	1.75000	-0.37788	4.07143	1.84287	0.09287	0.00185
2	1.84287	0.00749	4.22837	**1.84110**	0.00177	0.000001
3						

Из таблицы видно, что $x_* = 1.8411 \pm 0.0001$.

§ 4. Метод дихотомии (деления пополам)

Пусть $[a_0, b_0]$ отрезок изоляции корня x_*. В методе дихотомии на отрезке изоляции корня выбирают средину отрезка изоляции корня $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Затем в качестве нового отрезка изоляции корня $[a_1, b_1]$ берут тот из отрезков $\left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right]$ или $\left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]$, на концах которого функция $f(x)$ имеет разные знаки, что определяется непосредственной подстановкой. Применив затем указанный процесс к отрезку $[a_1, b_1]$, получим еще более узкий отрезок изоляции корня $[a_2, b_2]$ и т.д. Повторяя процесс уточнения корня, получим систему отрезков $[a_k, b_k]$ $(k = 0,1,2 \ldots)$, для которых

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq .. \leq x_* \leq \cdots \leq b_k \leq .. \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0.$$

Концы этих отрезков и дают нам приближенные значения корня. Уточнение корня повторяют до тех пор, пока не будет получен отрезок $[a_k, b_k]$, дающий приближение корня с требуемой точностью $\Delta = \frac{a_k + b_k}{2}$. При этом всегда имеет место сходимость метода дихотомии, так как, обозначая через d_k длину отрезка $[a_k, b_k]$, получим $d_k = \frac{d_0}{2^k}$. Следовательно, $d_k \to 0$ с ростом k и одновременно $a_k \to x_*,$ $b_k \to x_*$. Применяя метод дихотомии удобно пользоваться следующей расчетной таблицей:

Таблица 7

Расчетная таблица

k	$[a_k, b_k]$	c_k	$f(c_k)$	Знаки		
				$f(a_k)$	$f(c_k)$	$f(b_k)$

Пример. Методом дихотомии найдем значение корня уравнения

$$x^3 - x - 1 = 0,$$

отделенного на отрезке $[1,2]$, с погрешностью, не превышающей 0.005. Решение представим в виде расчетной таблицы:

Таблица 8

Расчетная таблица

k	$[a_k, b_k]$	c_k	$f(c_k)$	Знаки		
				$f(a_k)$	$f(c_k)$	$f(b_k)$
0	[1,2]	1.5	0.875	–	+	+
1	[1,1.5]	1.2	-0.472	–	–	+
2	[1.2,1.5]	1.3	-0.103	–	–	+
3	[1.3,1.5]	1.4	0.344	–	+	+
4	[1.3,1.4]	1.35	0.110	–	+	+
5	[1.3,1.35]	1.33	0.023	–	+	+
6	[1.3,1.33]	1.32	-0.020	–	–	+
7	[1.32,1.33]	1.325				

Из таблицы имеем $x_* = 1.325 \pm 0.005$.

§ 5. Метод Зейделя

Метод Зейделя используется для решения систем линейных уравнений. Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots x_n$:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a'_{nn}x_n + b_n = 0 \end{cases} \qquad (5.28)$$

определитель которой $D \neq 0$.

Известно, что при $D \neq 0$ система (5.28) имеет единственное решение. Будем искать это решение методом последовательных приближений. Введем следующие обозначения: $a'_{11} + 1 = a_{11}, a'_{22} + 1 = a_{22}, \ldots.$, тогда систему (5.28) можно переписать в нормальном виде:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n \end{cases}$$

Для краткости представим эту систему в виде:

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i + b_k,\ k = 1,2,...n \tag{5.29}$$

В качестве нулевого приближения $x_k^{(0)}$ примем нулевые значения всех неизвестных

$$x_k^{(0)} = 0,\ k = 1.2....n \tag{5.30}$$

Подставив (5.30) в (5.29), получим значения первого приближения

$$x_k^{(1)} = b_k \tag{5.31}$$

Подставив (5.31) в (5.30), получим значения второго приближения

$$x_k^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ri} b_i + b_k,\ k = 1,2,..n$$

Аналогично

$$x_k^{(p)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ri} x_i^{(p-1)} + b_k,\ k = 1,2,..n$$

<u>В основе метода Зейделя лежит следующая теорема.</u>

Если

$$\sum_{j=1}^{n} \left| a_{kj} \right| < 1,\ k = 1,2,...n$$

и $D \neq 0$, то тогда

$$\lim_{p \to \infty} x_k^{(p)} = q_k,$$

где $q_1, q_2,...$- решения данной системы.

Пример.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 - 3 = 0 \ (a) \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 - 2 = 0 \quad (b) \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 - 1 = 0 \quad (c) \\ 10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4 = 0 \ (d) \end{cases}$$

Приведем систему к нормальному виду. Для этого систему приведем сначала к такому виду, чтобы диагональные элементы матрицы системы были больше суммы модулей остальных элементов. В уравнении (b) $5 > 1 + 1 + 2$. Поэтому это уравнение можно принять за 3 уравнение новой системы. В уравнении (d) $10 > 2 + 1 + 1 + 2$. Поэтому это уравнение можно принять за первое уравнение новой системы. Для получения 2 уравнения новой системы составим такую алгебраическую сумму данных уравнений, чтобы коэффициент при x_2 был бы более суммы модулей остальных коэффициентов. Для этого из уравнения (a) вычтем уравнение (b): $x_1 + 5x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 - 1 = 0$. Теперь в новую систему вошли уравнения $(a), (b), (d)$. Поэтому в четвертое уравнение новой системы должно войти уравнение (c). Для этого сгруппируем уравнения следующим образом:

$$2(c) - (d) + 2(a) - (b):\ 3x_1 - 9x_4 - 10 = 0.$$

Итак, имеем новую систему:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 - 1 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 - 2 = 0 \\ 3x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 - 9x_4 - 10 = 0 \end{cases}$$

Разрешив теперь полученные уравнения новой системы относительно диагональных неизвестных, получим систему в нормальном виде:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \cdot x_1 - 0.2x_2 + 0.1x_3 - 0.2x_4 - 0.4 \\ x_2 = -0.2x_1 + 0 \cdot x_2 - 0.2x_3 + 0 \cdot x_4 + 0.2 \\ x_3 = 0.2x_1 - 0.4x_2 - 0 \cdot x_3 + 0.2x_4 - 0.4 \\ x_4 = \dfrac{1}{3}x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 - \dfrac{10}{9} \end{cases} \qquad (5.32)$$

Система (5.32) удовлетворяет указанной выше теореме. Заданная точность Δ достигается с помощью следующего неравенства

$$\left| x_k^{(p-1)} - x_k^{(p)} \right| < \Delta$$

для всех $k = 1,2,...n$. Найдем решение с точностью $\Delta = 0.1$. При этом получим

$$x_1^{(0)} = -0.4,\ x_2^{(0)} = 0.2,\ x_3^{(0)} = -0.4,\ x_4^{(0)} = -1.1$$
$$x_1^{(1)} = -0.26,\ x_2^{(1)} = 0.36,\ x_3^{(1)} = -0.78,\ x_4^{(1)} = -1.24$$
$$x_1^{(2)} = -0.29,\ x_2^{(2)} = 0.41,\ x_3^{(2)} = -0.83,\ x_4^{(2)} = -1.20,$$

где $\left| x_k^{(1)} - x_k^{(2)} \right| < 0.1$ для всех $k = 1,2,3,4$.

§ 6. Метод простой итерации

Процесс решения системы линейных уравнений методом простой итерации рассмотрим на примере трех уравнений. Пусть система трех уравнений с тремя неизвестными задана в нормальной форме

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + c_1, \\ x_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + c_2, \\ x_3 &= b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + c_3. \end{aligned} \qquad (5.33)$$

О приемах, позволяющих привести к нормальному виду, сказано в предыдущем параграфе.

Простой итерационный метод представляет собой видоизменение изложенного выше метода Зейделя. Если при вычислении k–го приближения любого неизвестного по методу Зейделя мы пользовались k–ми приближениями неизвестных, то при вычислении k–го приближения неизвестных по методу простых итераций используются только $k-1$– приближения. Приближения по методу простых итераций строится по формулам:

$$x_1^{(0)} = c_1, x_1^{(k)} = c_1 + \sum_{j=1}^{3} b_{1j} x_j^{(k-1)},$$

$$x_2^{(0)} = c_2, x_2^{(k)} = c_2 + \sum_{j=1}^{2} b_{2j} x_j^{(k-1)}, \qquad (5.34)$$

$$x_3^{(0)} = c_3, x_3^{(k)} = c_3 + \sum_{j=1}^{3} b_{3j} x_j^{(k-1)}.$$

$(k = 1{,}23 \ldots\ldots\ldots)$

Если каждая из последовательностей приближений имеет предел

$$\bar{x}_j = \lim_{k\to\infty} x_j^{(k)}, (j = 1{,}2{,}3), \qquad (5.35)$$

то совокупность чисел $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ является решением системы (5.33). Действительно, переходя в равенствах (5.34) к пределу при $k \to \infty$, будем иметь

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{3} b_{ij} \lim_{k\to\infty} x_j^{(k-1)} + c_i, (i = 1{,}2{,}3),$$

так что в силу (5.35)

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{3} b_{ij} \bar{x}_j + c_i,$$

и справедливость высказанного утверждения доказана.

Можно показать, что имеет место следующий достаточный признак сходимости итерационного процесса: если

$$max\left\{\sum_{j=1}^{3}|b_{1j}|, \sum_{j=1}^{3}|b_{2j}|, \sum_{j=1}^{3}|b_{3j}|\right\} < 1,$$

то процесс итераций по формулам (5.34) сходится.

Пример. Методом итерации найдем решение системы, представленной в нормальной форме,

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0.0092x_1 - 0.0061x_2 + 0.0701x_3 + 0.6636,\\
x_2 &= -0.0643x_1 + 0.0755x_2 - 0.0324x_3 - 0.8172,\\
x_3 &= -0.0210x_1 - 0.0130x_2 + 0.0817x_3 - 1.6411,
\end{aligned}$$

предполагая, что абсолютные погрешности коэффициентов и свободных членов системы не превышают 0.00001.

В данном примере

$$\sum_{j=1}^{3}|b_{1j}| = 0.0092 + 0.0061 + 0.0701 = 0.085,$$
$$\sum_{j=1}^{3}|b_{2j}| = 0.0643 + 0.0755 + 0.0324 = 0.172,$$
$$\sum_{j=1}^{3}|b_{3j}| = 0.0210 + 0.0130 + 0.0817 = 0.116.$$

Таким образом,

$$max\left\{\sum_{j=1}^{3}|b_{1j}|, \sum_{j=1}^{3}|b_{2j}|, \sum_{j=1}^{3}|b_{3j}|\right\} < 1,$$

откуда следует сходимость итерационного процесса для данной системы.

За нулевое приближение принимаем свободные члены системы:

$$x_1^{(0)} = 0.6636, x_2^{(0)} = -0.8172, x_3^{(0)} = -1.6411.$$

Последующие приближения вычисляем по формулам (5.33). При $k = 1$ имеем

$$x_1^{(1)} = 0.6636 + 0.0092 \cdot 0.6636 + (-0.0061) \cdot (-0.8172) + 0.0701 \cdot (-1.6411) = 0.55974,$$
$$x_2^{(1)} = -0.8172 + (-0.0643) \cdot 0.6636 + 0.0755 \cdot (-0.8172) + (-0.0324) \cdot (-1.6411) = -0.86838,$$
$$x_3^{(1)} = -1.641 + (-0.0210) \cdot 0.6636 + (-0.0130) \cdot (-0.8172) + 0.0817 \cdot (-1.6411) = -1.77849.$$

Затем полагаем k равным 2,3,4 и т.д. Результаты вычислений представим в табличном виде.

Таблица 9

Расчетная таблица

Приближения	x_1	x_2	x_3
$x_i^{(0)}$	0.66360	-0.8172	-1.6411
$x_i^{(1)}$	0.55974	-0.86838	-1.77849
$x_i^{(2)}$	0.54937	-0.86119	-1.78657
$x_i^{(3)}$	0.54866	-0.85966	-1.78740
$x_i^{(4)}$	0.54859	-0.85948	-1.78747
$x_i^{(5)}$	0.54859	-0.85945	-1.78749
$x_i^{(6)}$	0.54859	-0.85945	-1.78749

В данном случае 5 и 6 приближения имеют 5 одинаковых десятичных знаков. Округляя запасной знак, окончательно имеем

$$x_1 = x_1^{(6)} = 0.5486, x_2 = x_2^{(6)} = -0.8595, x_3 = x_3^{(6)} = -1.7875.$$

§ 7. Итерационный метод решения систем нелинейных уравнений

Метод используется для решения систем нелинейных уравнений

$$\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{x}), \qquad (5.36)$$

где $\vec{\varphi}(\vec{x}) = \left(\varphi_1(\vec{x}), \varphi_2(\vec{x}), \dots \varphi_n(\vec{x})\right)$–заданная вектор-функция, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3 \dots \dots x_n)$, x_i – неизвестные переменные. Множество $S(\vec{y}^0, r) = \{\vec{x}: \rho(\vec{x}, \vec{y}^0) \le r\}$ называется замкнутым шаром радиуса r с центром в точке $\vec{y}^0$, где расстояние $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = max|x_j - y_j|$, $1 \le j \le n$.

Метод основывается на следующей теореме.

Теорема. Пусть на замкнутом шаре S задана вектор функция $\vec{\varphi}(\vec{x})$, причем для любых $\vec{x}, \vec{y} \in S$ выполняется неравенство

$$\rho\left(\vec{\varphi}(\vec{x}), \vec{\varphi}(\vec{y})\right) \le \alpha\rho(\vec{x}, \vec{y}). \qquad (5.37)$$

и, кроме того,

$$\rho(\vec{\varphi}(\vec{y}^0), \vec{y}^0) \le (1 - \alpha)r, \qquad (5.38)$$

где $0 \le \alpha < 1$. Тогда на S существует единственное решение $\vec{x}_*$ уравнения (5.36), причем

$$\vec{x}_* = \lim_{k\to\infty} \vec{x}_k,$$

где

$$\vec{x}_k = \vec{\varphi}(\vec{x}_{k-1}),$$

$\vec{x}^0 \in S$ – произвольно, $k = 1,2,3 \dots\dots\dots$. При этом выполняются неравенства

$$\rho(\vec{x}_*, \vec{x}_k) \le \alpha^k \rho(\vec{x}_*, \vec{x}^0) \le 2\alpha^k r,$$

$$\rho(\vec{x}_*, \vec{x}_k) \le \frac{\alpha}{1-\alpha} \rho(\vec{x}_k, \vec{x}_{k-1}). \qquad (5.39)$$

Пример. Выясним существование решения системы нелинейных уравнений

$$2x - y = 0,$$
$$\cos(x) - y = 0,$$

в окрестности точки $\vec{y}^0 = \left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ и найдем решение этой системы с точностью 0.01. В данном примере $\varphi_1(x,y) = \frac{y}{2}, \varphi_2(x,y) = \cos(x)$. Выберем $r = \frac{\pi}{2}$, Тогда $S = \left\{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, 1 - \frac{\pi}{2} \le y \le 1 + \frac{\pi}{2}\right\}$. Найдем частные производные

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = 0, \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = \frac{1}{2}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = -\sin(x), \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = 0.$$

Откуда следует, что

$$\max_s \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| = 0, \max_s \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| = \frac{1}{2}, \max_s \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| \le \frac{1}{\sqrt{2}}, \max_s \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| = 0.$$

В соответствии с теоремой в качестве α может быть взята величина

$$\alpha = max\left\{0 + \frac{1}{2}, 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, условие (5.37) теоремы выполнено с $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$. Выясним, выполнено ли условие (5.38). Так как

$$\rho(\vec{\varphi}(\vec{y}^0), \vec{y}^0) = max\left\{\left|\varphi_1\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) - \frac{\pi}{4}\right|, \left|\varphi_2\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) - 1\right|\right\} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

то

$$\rho(\vec{\varphi}(\vec{y}^0), \vec{y}^0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < (1 - \alpha)r = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\pi}{2}.$$

Условие (5.38) тоже выполнено, так что согласно теореме система имеет единственное решение. Выбор $\vec{y}^0$ и r оказался удачным. Итерации проведем по формулам

$$x_k = \varphi_1(x_{k-1}, y_{k-1}), y_k = \varphi_2(x_{k-1}, y_{k-1}).$$

В качестве начального приближения естественно взять $x_0 = \frac{\pi}{4}, y_0 = 1$. Точность итераций согласно (5.39) оценивается неравенством

$$\rho(x_*, x_k) \le \frac{1}{\sqrt{2} - 1} max\{|x_k - x_{k-1}|, |y_k - y_{k-1}|\}.$$

Результаты вычислений представим в табличном виде:

Таблица 10

Расчетная таблица

k	x_{k-1}	x_k	$\frac{1}{\sqrt{2}-1}\lvert x_{k-1} - x_k\rvert$	y_{k-1}	y_k	$2.414\lvert y_{k-1} - y_k\rvert$
1	$\frac{\pi}{4}$	0.5	0.688	1	0.707	0.707
2	0.5	0.353	0.355	0.707	0.938	0.558
3	0.353	0.469	0.280	0.938	0.892	0.111
4	0.469	0.446	0.056	0.892	0.902	0.024
5	0.446	0.451	0.012	0.902	0.900	0.005
6	0.451	0.450	0.002	0.900	0.900	0.000

Окончательно имеем $x_* = x_6 = 0.45 \pm 0.01, y_* = y_6 = 0.90 \pm 0.01.$