§1. Первая разностная производная

Пусть $x_i = x_0 + ih, \; i = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots$ Обозначим $f(x_i) \equiv f_i, \; f'(x_i) \equiv f_i' \ldots\ldots\ldots$ Разложим функцию $f(x)$ по формуле Тейлора до первой производной в окрестности точки x_0

$$f(x_0 + \Delta x) = f_0 + f_0' \Delta x + R_1(\xi), \qquad (3.1)$$

где $R_1(\xi) = \dfrac{f''(\xi)}{2!} \Delta x^2, \quad x_0 < \xi < x_0 + \Delta x$. Положим $\Delta x = h$. Пренебрегая в (3.1) остаточным членом $R_1(\xi)$ получим приближенную формулу для первой производной

$$f_0' \approx \frac{f_1 - f_0}{h}.$$

§2 Центральная разностная производная

Разложим функцию $f(x)$ по формуле Тейлора до второй производной в окрестности точки x_0

$$f(x_0 + \Delta x) = f_0 + f_0' \Delta x + f_0'' \frac{\Delta x^2}{2!} + R_2(\xi), \qquad (3.2)$$

где $R_2(\xi) = \dfrac{f'''(\xi)}{3!} \Delta x^3, \; x_0 < \xi < x_0 + \Delta x$. Положим сначала $\Delta x = h$. Тогда из (3.2) получим

$$f_1 = f_0 + f_0' h + f_0'' \frac{h^2}{2} + R_2^{(+)}(\xi), \qquad (3.3)$$

здесь $R_2^{(+)}(\xi) = \dfrac{f'''(\xi_+)}{3!} h^3, \; x_0 < \xi_+ < x_1$. Возьмем $\Delta x = -h$. Тогда из (3.2) получим

$$f_{-1} = f_0 - f_0' h + f_0'' \frac{h^2}{2} - R_2^{(-)}(\xi), \qquad (3.4)$$

$R_2^{(-)}(\xi) = \dfrac{f'''(\xi_-)}{3!} h^3, \; x_{-1} < \xi_- < x_0$. Вычтем из (3.3) формулу (3.4). При этом получим

$$f_1 - f_{-1} = 2 f_0' h + \left[R_2^{(+)} + R_2^{(-)}\right].$$

Откуда найдем еще одну формулу дифференцирования

$$f_0' \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}.$$

§3. Вторая разностная производная

Разложим функцию $f(x)$ по формуле Тейлора до третьей производной в окрестности точки x_0

$$f(x_0 + \Delta x) = f_0 + f_0' \Delta x + f_0'' \frac{\Delta x^2}{2!} + f_0''' \frac{\Delta x^3}{3!} + R_3(\xi), \qquad (3.5)$$

$$R_3(\xi) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \Delta x^4, \quad x_0 < \xi < x_0 + \Delta x.$$

Возьмем в (3.5) $\Delta x = h$. При этом получим

$$f_1 = f_0 + f_0' h + f_0'' \frac{h^2}{2} + \frac{f_0'''}{6} h^3 + R_3^{(+)}(\xi), \qquad (3.6)$$

$$R_3^{(+)}(\xi) = \frac{f^{(4)}(\xi_+)}{4!} h^4, \quad x_0 < \xi_+ < x_1.$$

Возьмем в (3.5) $\Delta x = -h$. При этом получим

$$f_{-1} = f_0 - f_0' h + f_0'' \frac{h^2}{2} - \frac{f_0'''}{6} h^3 + R_3^{(-)}(\xi), \qquad (3.7)$$

$R_3^{(-)}(\xi) = \frac{f^{(4)}(\xi_-)}{4!} h^4, \quad x_{-1} < \xi_- < x_0$. Складывая формулы (3.6) и (3.7), получим

$$f_1 + f_{-1} = 2 f_0 + f_0'' h^2 + \left[R_3^{(+)} + R_3^{(-)}\right].$$

Откуда найдем третью формулу дифференцирования

$$f_0'' \approx \frac{f_1 + f_{-1} - 2f_0}{h^2}.$$

§4. Погрешности разностных формул

Из формулы (3.1) следует, что погрешность первой формулы оценивается следующим неравенством

$$\Delta_1 = \frac{|R_1|}{h} \le \frac{h}{2}\max_{[x_0,x_1]}|f''(x)|.$$

Для оценки погрешностей следующих двух формул докажем Лемму.

Лемма. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, $\xi_i \in [a,b]$. Тогда существует точка $\xi \in [a,b]$, такая что

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) = nf(\xi).$$

Доказательство

Из 1 и 2 теорем Вейерштрасса следует, что

$$\min_{[a,b]} f(x) \le \frac{1}{n}\left(f(\xi_1) + f(\xi_2) + \ldots + f(\xi_n)\right) \le \max_{[a,b]} f(x).$$

Тогда по теореме о промежуточном значении непрерывной функции существует точка $\xi \in [a,b]$, такая что

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) = nf(\xi),$$

что и требовалось показать.

Тогда с учетом Леммы погрешность второй формулы оценивается с помощью следующего неравенства

$$\Delta_2 = \frac{\left|R_2^{(+)} + R_2^{(-)}\right|}{2h} \le \frac{h^2}{6} \max_{[x_{-1}, x_1]} \left| f'''(x) \right| .$$

Аналогично, погрешность третьей формулы оценивается неравенством