§1. Многочлен Лагранжа

Пусть из эксперимента получены значения неизвестной функции

$$f(x_i) \equiv f_i,\ i = 0,1..n,\ x_i \in [a,b]$$

Возникает задача приближенного восстановления неизвестной функции $f(x)$ в произвольной точке x. Для решения этой задачи строится многочлен $L_n(x)$, такой чтобы

$$L_n(x_i) = f_i. \tag{2.1}$$

Многочлен, удовлетворяющий условию (2.1), называется интерполяционным многочленом; x_i называются узлами интерполяции.

Интерполяцией называется приближенное восстановление функции $f(x)$ по формуле

$$f(x) \approx L_n(x), \tag{2.2}$$

если $x \in [a,b]$; если же $x \notin [a,b]$, то восстановление функции по формуле (2.2) называется экстраполяцией.

Теорема. Существует единственный интерполяционный многочлен.

Доказательство

Доказательство теоремы разобьем на две части. В первой части докажем существование интерполяционного многочлена, а во второй часть докажем единственность интерполяционного многочлена.

1. **Существование**

Пусть $A_{n+1} = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$. Тогда по известной теореме алгебры правильная несократимая рациональная дробь

$$\frac{L_n(x)}{A_{n+1}(x)}$$

может быть представлена в виде суммы простейших дробей

$$\frac{L_n(x)}{A_{n+1}(x)} = \sum_{m=0}^{n} \frac{R_m}{(x - x_m)}. \tag{2.3}$$

Из (2.3) можно получить, что

$$R_m = \frac{L_n(x_m)}{\widetilde{A}_{n+1}(x_m)} \tag{2.4}$$

где $\widetilde{A}_{n+1}(x_m) = (x_m - x_0)(x_m - x_1)(x_m - x_{m-1})(x_m - x_{m+1})\ldots$, Таким образом, в силу (2.1), (2.2) и (2.4)

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} P_{ni}(x) f_i, \tag{2.5}$$

$P_{ni}(x) = \prod_{j=0}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$, $j \neq i$. Многочлен (2.5) называют многочленом Лагранжа.

2. **Единственность**

Доказательство проведем по методу от противного. Для этого предположим, что существует еще один интерполяционный многочлен $\widetilde{L}_n(x)$. Построим многочлен $L_m(x) = \widetilde{L}_n(x) - L_n(x)$, где $m \leq n$. По основной теореме алгебры уравнение $L_m(x) = 0$ имеет m корней. Но так как

$$\begin{cases} L_n(x_i) = f_i \\ \widetilde{L}_n(x_i) = f_i \end{cases},$$

то уравнение $L_m(x) = 0$ имеет $(n+1)$ корней $x_0, x_1 \ldots.. x_n$, что противоречит основной теореме алгебры. Тем самым теорема доказана полностью.

Пример. Построим интерполяционный многочлен Лагранжа для функции заданной таблицей

x_i	–1	0	1
f_i	4	0	1

В данном примере $n = 2$ и в силу (2.5) многочлен Лагранжа имеет вид

$$L_2(x) = 4\frac{x(x-1)}{(-1)(-2)} + 1\frac{x(x+1)}{2\cdot 1} = 2x(x-1) + \frac{1}{2}x(x+1).$$

В том случае, когда интерполяционный многочлен строится для известной функции $f(x)$, естественно поставить вопрос об оценке погрешности в интерполяционной формуле Лагранжа. Рассмотрим разность

$$f(x) - L_n(x) = R_n(x) .$$

Величину $R_n(x)$ называют остаточным членом интерполяции. Если функция дифференцируема достаточное число раз, то для остаточного члена имеет место оценка

$$|R_n(x)| \le M_{n+1}(a,b) \cdot \frac{|A_{n+1}(x)|}{(n+1)!}. \qquad (2.6)$$

Здесь $M_{n+1}(a,b) = \max\limits_{a \le x \le b} |f^{(n+1)}(x)|$, где a, b–наименьшее и наибольшее из $(n+2)$ узлов интерполяции и x.

Пример. Построим интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $f(x) = \ln(x)$ с узлами $x = 2,3,4$ и оценим погрешность интерполяционного полинома при $x = 2.5$. Значения функции в узлах интерполяции представлены в таблице

x_i	2	3	4
$f(x_i)$	0.6931	1.0986	1.3863

В данном примере $n = 2$ и в силу (2.5) многочлен Лагранжа имеет вид

$$L_2(x) = -0.4713 + 0.7000 \cdot x - 0.0589 \cdot x^2.$$

Для оценки погрешности воспользуемся неравенством (2.6)

$$|R_2(2.5)| \le M_3(2,4) \cdot \frac{|A_3(2.5)|}{3!},$$

где $A_3(2.5) = 0.5 \cdot 0.5 \cdot 1.5 = 0.375$, $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$, $M_3(2,4) = \frac{1}{4}$, так что окончательно $|R_2(2.5)| \le \frac{1}{4} \cdot \frac{0.375}{3!} = 0.0156$.

Замечание1. Для минимизации оценки погрешности интерполяции используют многочлены Чебышева

$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

При этом в качестве узлов интерполяции используют корни многочлена Чебышева, т.е. точки

$$x_i = \frac{1}{2}\left[(b-a)\cos\left(\frac{\pi(2i+1)}{2n+2}\right) + a + b\right], i = 0,1,2,..n.$$

Из свойств многочленной Чебышева следует, что при таких узлах оценка погрешности интерполяции приобретает вид

$$|R_n(x)| \le M_{n+1}(a,b) \cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!\,2^{n+1}}.$$

При любом другом выборе узлов, соответствующая оценка максимальной погрешности интерполяции будет хуже.

Замечание 2. При построении многочлена Лагранжа не делалось никаких ограничений на распределение узлов интерполяции. Однако, если потребуется для улучшения приближения повысить на единицу число узлов прибавлением нового узла, полином Лагранжа придется перевычислить заново. Поэтому на практике часто используется равномерное расположение узлов интерполяции, задаваемое выражением

$$x_i = x_0 + ih, i = 0,1...n,\ x_0 = a, x_n = b.$$

При равномерном распределении узлов интерполяции используются многочлены Ньютона.

§2. Многочлены Ньютона

Для интерполирования на левой половине отрезка $[a,b]$ используется первый многочлен Ньютона. Полином Ньютона ищется в виде

$$N1(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}),\ (2.7)$$

при условии, что

$$N1(x_i) = y_i. \qquad (2.8)$$

Из (2.7) с учетом (2.8) получим систему линейных уравнений для коэффициентов a_i

$$N1(x_0) = a_0 = y_0,$$
$$N1(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1, \qquad (2.9)$$
$$N1(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$

решая систему уравнений (2.9) относительно a_i, получим

$$a_0 = y_0,\ a_1 = \frac{y_1 - a_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{h} \equiv \frac{\Delta y_0}{h},$$

$$a_2 = \frac{y_2 - y_0 - 2h\dfrac{y_1 - y_0}{h}}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)}{2h^2} \equiv \frac{\Delta^{(2)} y_0}{2!h^2} \ldots$$

$$a_n = \frac{\Delta^{(n)} y_0}{n!h^n}.$$

В результате получим первый интерполяционный многочлен Ньютона

$$N1(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^{(2)} y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ \frac{\Delta^{(n)}}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}),$$

где $\Delta^{(k)} y_i = \Delta^{(k-1)} y_{i+1} - \Delta^{(k-1)} y_i$ - конечные разности порядка k, $k = 1,2..n,\ i = 0,1\ldots n-1$. Конечные разности представляют в виде расчетной таблицы.

Таблица 1

Расчетная таблица

x_i	y_i	Δy	$\Delta^{(2)} y$	$\Delta^{(3)} y$	$\Delta^{(4)} y$
x_0	y_0	Δy	$\Delta^{(2)} y_0$	$\Delta^{(3)} y_0$	$\Delta^{(4)} y_0$

x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^{(2)}y_1$	$\Delta^{(3)}y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^{(2)}y_2$		
x_3	y_3	Δy_3			
x_4	y_4				

На практике вместо переменной x удобно использовать переменную

$$t=\frac{x-x_0}{h},\ \frac{x-x_1}{h}=t-1,\ .....\frac{x-x_{n-1}}{h}=t-(n-1).$$

Тогда первый многочлен Ньютона примет вид

$$N1(t)=y_0+\frac{\Delta y_0}{1!}t+\frac{\Delta^{(2)}y_0}{2!}t(t-1)+\frac{\Delta^{(n)}}{n!}t(t-1)...(t-(n-1)). \quad (2.10)$$

С помощью многочлена (2.10) можно находить значение функции для любого $x\in[a,b]$. Но с точки зрения точности и экономичности удобнее ограничиваться случаем $t<1$, т.е. $x_0<x<x_1$, Для других значений аргумента вместо x_0 берется тот узел x_i, который находится слева от x и т.д..

Для правой половины отрезка используется второй многочлен Ньютона. Он ищется в виде

$$N2(x)=a_0+a_1(x-x_n)+...+a_n(x-x_n)(x-x_{n-1})...(x-x_1).$$

Поступая так же как в случае первого многочлена Ньютона, можно найти коэффициенты $a_0=y_n, a_1=\frac{\Delta y_{n-1}}{h}, ..., a_n=\frac{\Delta^{(n)}y_0}{n!h^n}$. При этом для переменной

$$t=\frac{x-x_n}{h}$$

второй многочлен Ньютона примет вид

$$N2(x)=y_n+\Delta y_{n-1}t+\frac{\Delta^{(2)}y_{n-1}}{2!}t(t+1)+\frac{\Delta^{(n)}y_0}{n!}t(t+1)......(t+(n-1)).$$

Пример. Пусть из эксперимента получены значения

x_i	1.0	1.1	1.2	1.3
y_i	2.7854	2.8330	2.8761	2.9151

Требуется вычислить $f(1.15)=?$ и $f(1.25)=?$. Для этого найдем конечные разности и представим их в виде таблицы.

Таблица 2

Расчетная таблица

x_i	y_i	Δy	$\Delta^{(2)} y$	$\Delta^{(3)} y$
1.0	2.7854	0.0476	-0.0045	0.0004
1.1	2.8330	0.0431	-0.0041	
1.2	2.8761	0.0390		
1.3	2.9151			

Найдем значение переменной t: $t=\dfrac{1.15-1.1}{0.1}=0.5$. Тогда

$$f(1.15)\approx N1(0.5)=2.8330+0.04331\cdot 0.5-\frac{0.0041}{2}\cdot 0.5\cdot(-0.5)=2.8551$$

Аналогично, $t=\dfrac{1.25-1.3}{0.1}=-0.5$

$$f(1.25)\approx N2(-0.5)=2.9151+0.0390\cdot(-0.5)-\frac{0.0041}{2}\cdot(-0.5)\cdot(0.5)+$$

$$+\frac{0.0004}{6}(-0.5)(0.5)(1.5)=2.8961$$

§3. Метод наименьших квадратов

При обработке результатов измерений часто возникает необходимость построить эмпирическую формулу, задающую аналитическое выражение функциональной зависимости, заданной таблицей. Использование для этой цели интерполяционных полиномов не всегда целесообразно, так как зачастую результаты измерений помимо основной зависимости отражают различного рода малые случайные ошибки, и точное совпадение в узлах интерполяции построенной функции с табличными значениями может исказить основную зависимость, общий характер которой часто известен.

Постановка задачи

Пусть результаты измерений представлены таблицей

x_i	x_1	x_2	……………	x_n
y_i	y_1	y_2	…………...	y_n

и пусть $y = f(x, \vartheta_k)$, где вид функции $f(x, \vartheta_k)$ предполагается известным, а параметры ϑ_k неизвестны $(k = 0,1..m)$. Требуется так подобрать параметры ϑ_k, чтобы отклонения $\delta_k = f(x_k) - y_k$ оказались наименьшими. Для этого строят функцию

$$F(\vartheta_k) = \sum_{k=0}^{n} \delta_k^2 ,$$

где функция $f(x, \vartheta_k)$ часто выбирается в виде многочлена

$$f(x) = \vartheta_0 x^m + \vartheta_1 x^{m-1} + \dots + \vartheta_m. \tag{2.11}$$

Величина $F(\vartheta_k)$ по построению является неотрицательной функцией параметров и, следовательно, всегда имеет минимум. Если $m \geq n$, то существует бесконечное множество функций (2.11), обеспечивающих $F(\vartheta_k) = 0$. Для $m = n - 1$ равенство $F(\vartheta_k) = 0$ обеспечивается единственным полиномом (2.11).

В дальнейшем будем предполагать, что $m < n - 1$. В этом случае при любых значениях параметров ϑ_k функция $F(\vartheta_k) \geq 0$. Задача состоит так подобрать параметров ϑ_k, чтобы функция $F(\vartheta_k)$ оказалась минимальной. Параметры находятся из необходимого условия экстремума

$$\frac{\partial F(\vartheta_k)}{\partial \vartheta_k} = 0.$$

Пример. По методу наименьших квадратов построим полином второй степени для приближенного представления функции, заданной таблицей

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
y	3.230	3.253	3.261	3.252	3.228	3.181	3.127	3.059

В соответствии с постановкой задачи эмпирическую функцию будем искать в виде

$$f(x) = \vartheta_0 x^2 + \vartheta_1 x + \vartheta_2.$$

Необходимые условия экстремуму дают

$$\frac{\partial F}{\partial \vartheta_0} = 2\sum_{k=1}^{n} x_k^2(\vartheta_2 + \vartheta_1 x_k + \vartheta_0 x_k^2 - y_k) = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial \vartheta_1} = 2\sum_{k=1}^{n} x_k(\vartheta_2 + \vartheta_1 x_k + \vartheta_0 x_k^2 - y_k) = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial \vartheta_2} = 2\sum_{k=1}^{n}(\vartheta_2 + \vartheta_1 x_k + \vartheta_0 x_k^2 - y_k) = 0.$$

Из необходимых условий экстремума находим систему линейных уравнений

$$\vartheta_0 \sum_{k=1}^{n} x_k^4 + \vartheta_1 \sum_{k=1}^{n} x_k^3 + \vartheta_2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 y_k,$$
$$\vartheta_0 \sum_{k=1}^{n} x_k^3 + \vartheta_1 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \vartheta_2 \sum_{k=1}^{n} x_k^1 = \sum_{k=1}^{n} x_k^1 y_k,$$
$$\vartheta_0 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \vartheta_1 \sum_{k=1}^{n} x_k^1 + \vartheta_2 n = \sum_{k=1}^{n} y_k.$$

Данные представим в расчетной таблице.

Таблица 3

Расчетная таблица

	x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
	0.1	3.230	0.01	0.001	0.0001	0.3230	0.0323
	0.2	3.253	0.04	0.008	0.0016	0.6506	0.1301
	0.3	3.261	0.09	0.027	0.0081	0.9783	0.2935
	0.4	3.252	0.16	0.064	0.0256	1.3008	0.5203
	0.5	3.228	0.25	0.125	0.0625	1.6140	0.8070
	0.6	3.181	0.36	0.216	0.1296	1.9086	1.1452
	0.7	3.127	0.49	0.343	0.2401	2.1889	1.5322

	0.8	3..059	0.64	0.512	0.4096	2.4472	1.9578
$\sum$	3.6	25.591	2.04	1.296	0.8772	11.4114	6.4184

С учетом данных расчетной таблицы система линейных уравнений имеет вид

$$
\begin{aligned}
&0.8772\vartheta_0 + 1.296\vartheta_1 + 2.04\vartheta_2 = 6.4184,\\
&1.296\vartheta_0 + 2.04\vartheta_1 + 3.6\vartheta_2 = 11.4114,\\
&2.04\vartheta_0 + 3.6\vartheta_1 + 8\vartheta_2 = 25.591.
\end{aligned}
$$

Решение системы дает

$\vartheta_0 = -0.7859, \vartheta_1 = 0.4584, \vartheta_2 = 3.193.$

Таким образом, искомый полином имеет вид

$y = -0.7859x^2 + 0.4584x + 3.193$

Для проверки качества найденного полинома вычислим соответствующие отклонения. Вычисление отклонений для найденного полинома дает:

$$
\begin{aligned}
&\delta_1 = 0.0009, \delta_2 = 0.0003, \delta_3 = -0.0012, \delta_4 = -0.0013, \delta_5 = -0.0023,\\
&\delta_6 = 0.0041, \delta_7 = 0.0018, \delta_8 = -0.0023,\\
&\sum \delta = 0.0000, \sum \delta^2 = 0.000056,
\end{aligned}
$$

что демонстрирует хорошее качество найденного полинома.

§4. Среднеквадратичные приближения

Определение. Обобщенный многочлен

$\Phi_m(x) = c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + .. + c_m$

для которого расстояние $\rho(f, \Phi_m)$, называемое также среднеквадратичным уклонением многочлена Φ_m от функции f, минимально, называется многочленом наилучшего среднеквадратичного приближения функции f. Коэффициенты c_j

находятся из необходимого условия экстремума $\frac{\partial\rho(f,\Phi_m)}{\partial c_j} = 0$ расстояния

$$\rho(f,\Phi_m) = (f,f) + \sum_{j,k=0}^{m} c_j c_k(\varphi_j,\varphi_k) - 2\sum_{j=0}^{m} c_j(f,\varphi_j),$$

т.е. из системы линейных уравнений

$$c_0(\varphi_0,\varphi_0) + c_1(\varphi_1,\varphi_0)+..+c_m(\varphi_m,\varphi_0) = (f,\varphi_0),$$
$$c_0(\varphi_0,\varphi_1) + c_1(\varphi_1,\varphi_1)+..+c_m(\varphi_m,\varphi_1) = (f,\varphi_1).$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$c_0(\varphi_0,\varphi_m) + c_1(\varphi_1,\varphi_m)+..+c_m(\varphi_m,\varphi_m) = (f,\varphi_m).$$

Здесь (f,g) – скалярное произведение. Если система функций φ_j ортогональна, т.е. $(\varphi_j,\varphi_k) = 0,$ при $j \neq k$ и $(\varphi_j,\varphi_j) > 0$, то решение линейной системы имеет простой вид

$$c_j = -\frac{(f,\varphi_j)}{((\varphi_j,\varphi_j))}.$$

Пример. Найдем среднеквадратичные приближения тригонометрическими многочленами

$$\Phi_m(x) = a_0 + \sum_{p=0}^{m}[a_p\cos(px) + b_p\sin(px)]$$

на дискретном множестве точек

$$D = \{x_0,x_1,x_2,\dots x_n\}.$$

Пусть

$$x_i = \frac{2\pi i}{n+1}, i = 0,12,\dots n, m \leq \frac{n}{2}.$$

По постановке задачи

$$\varphi_1 = 1, \varphi_p = \cos(px), \psi_p = \sin(px). \qquad (2.12)$$

Тригонометрическая система функций (2.12) ортогональна на множестве D в смысле скалярного произведения

$$(f,g) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)g(x_i),$$

т.е.

$$(\varphi_r,\varphi_s) = 0, (\psi_r,\psi_s) = 0, r \neq s, (\varphi_j,\psi_k) = 0, j = 0,1..m, k = 1,2..m,$$
$$(\varphi_0,\varphi_0) = 1, (\varphi_p,\varphi_p) = (\psi_p,\psi_p) = \frac{1}{2}, p = 1,2 \ldots.$$

Тогда коэффициенты тригонометрического многочлена $\Phi_m(x)$ наилучшего среднеквадратичного приближения функции f на дискретном множестве D находятся по формулам

$$a_0 = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(x_i),\ a_p = \frac{2}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\cos(px_i),$$
$$b_p = \frac{2}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\sin(px_i), p = 1,2 \ldots m.$$

При этом дисперсия ошибки аппроксимирующего тригонометрического многочлена, порождаемая случайными ошибками в значениях функции $f(x_i)$ (ошибками результатов наблюдений), равна

$$D = \frac{2m+1}{n+1}\sigma^2,$$

где σ – среднеквадратичное значение ошибок наблюдений.

Оценка погрешности, вызванной отличием коэффициентов a_0, a_p, b_p от коэффициентов Фурье α_0, α_p, β_p, определяется следующими неравенствами

$$|a_0 - \alpha_0| \leq \frac{\pi^2}{6n^2} M_2,$$
$$|a_p - \alpha_p| \leq \frac{\pi^2}{3n^2}(M_2 + 2pM_1 + p^2 M_0),$$
$$|b_p - \beta_p| \leq \frac{\pi^2}{3n^2}(M_2 + 2pM_1 + p^2 M_0).$$

где $p = 1,2 \ldots m, m \leq \frac{n}{2}$. Погрешность, вызванная отбрасыванием остатка ряда Фурье, определяется выражением

$$|R_n| \leq \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \frac{M_q}{q-1} \frac{1}{m^{q-1}},$$
$$M_q = \max_{(-\infty,\infty)} \left|f^{(q)}(x)\right|.$$

Таким образом, увеличение n влечет уменьшение дисперсии случайной ошибки и способствует уменьшению искажений коэффициентов Фурье, так что метод наименьших квадратов обладает сглаживающим эффектом.

§5. Сглаживание

Часто экспериментальные данные представляют собой зависимость величины f от некоторой другой величины x. Измеренные с некоторой погрешностью или зашумленные экспериментальные данные перед их анализом обычно **сглаживают**. Если количество экспериментальных точек велико, то подбор эмпирической формулы может оказаться весьма затруднительным: формулы с малым числом параметров могут давать большие искажения, а большое число параметров неудобно для анализа. С другой стороны, многие задачи анализа (например, связанные с дифференцированием или интегрированием) не требуют единой аналитической формулы для всех данных. Для анализа важно лишь устранить «шум» эксперимента, сохранив информацию об истинной функции.

Для этой цели применяется сглаживание эмпирических данных, т.е. замена данной таблицы опытных точек другой таблицей близких к ним точек, лежащих на достаточно гладкой кривой.

Сглаживание производится с помощью многочленов (желательно оптимальной степени), приближающих по методу наименьших квадратов выбранные группы опытных точек. Так как наилучшее сглаживание получается для средних точек (когда учитывается информация о поведении функции по обе стороны от сглаживаемой точки), то количество точек для сглаживания выбирают нечетным, а группы точек–скользящими вдоль всей таблицы: берут, например, первые пять точек y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 и сглаживают с их помощью среднюю точку y_3, затем берут следующую группу точек

y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 и сглаживают точку y_4, и т.д. до конца таблицы. При этом остаются несколько крайних точек, которые сглаживаются с меньшей точностью.

Ниже приводятся наиболее употребляемые из простых формул сглаживания для таблиц с постоянным шагом. Сглаженные значения обозначаются волнистой чертой сверху. Основной формулой служит формула сглаживания средней точки, т.е. формула для $\widetilde{f}_i$, остальные формулы применяются только на краях таблицы.

Наиболее простым методом является метод **линейного** сглаживания по **трем** точкам: Линейным сглаживанием называется сглаживание многочленом первой степени.

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}_i &= [f_{i-1} + f_i + f_{i+1}]/3,\ i = 1,2,\ldots n-1,\\
\widetilde{f}_0 &= [5 f_0 + 2 f_i - f_2]/6,\ i = 0,\\
\widetilde{f}_n &= [5 f_n + 2 f_{n-1} - f_{n-2}]/6,\ i = n,
\end{aligned}$$

где n-номер последней точки, в которой измерена величина f_i.

Метод **линейного** сглаживания по **пяти** точкам основан на использовании формул

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}_0 &= [3 f_0 + 2 f_i + f_2 - f_4]/5,\ i = 0,\\
\widetilde{f}_1 &= [4 f_0 + 3 f_i + 2 f_2 + f_3]/10,\ i = 1,\\
\widetilde{f}_i &= [f_{i-2} + f_{i-1} + f_i + f_{i+1} + f_{i+2}]/5,\ i = 2,3,\ldots n-2\\
\widetilde{f}_{n-1} &= [4 f_n + 3 f_{n-1} + 2 f_{n-2} + f_{n-3}]/10,\ i = n-1\\
\widetilde{f}_n &= [3 f_n + 2 f_{n-1} + f_{n-2} - f_{n-4}]/5,\ i = n
\end{aligned}$$

Метод **нелинейного** сглаживания по **семи** точкам обеспечивает усреднение на основе применения полинома третьей степени и реализуется следующими формулами:

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}_0 &= [39 f_0 + 8 f_1 - 4(f_2 + f_3 - f_4) + f_5 - 2 f_6]/42,\\
\widetilde{f}_1 &= [8 f_0 + 19 f_1 + 16 f_2 + 6 f_3 - 4 f_4 - 7 f_5 + 4 f_6]/42,\\
\widetilde{f}_2 &= [-4 f_0 + 16 f_1 + 19 f_2 + 12 f_3 + 2 f_4 - 4 f_5 + f_6]/42,\\
\widetilde{f}_i &= [7 f_i + 6(f_{i+1} + f_{i-1}) + 3(f_{i+2} + f_{i-2}) - 2(f_{i+3} + f_{i-3})]/21,
\end{aligned}$$

$$\widetilde{f}_{n-2} = \left[-4 f_n + 16 f_{n-1} + 19 f_{n-2} + 12 f_{n-3} + 2 f_{n-4} - 4 f_{n-5} + f_{n-6}\right]/42$$

$$\widetilde{f}_{n-1} = \left[8 f_n + 19 f_{n-1} + 16 f_{n-2} + 6 f_{n-3} - 4 f_{n-4} - 7 f_{n-5} + 4 f_{n-6}\right]/42$$

,

$$\widetilde{f}_{n} = \left[39 f_n + 8 f_{n-1} - 4\left(f_{n-2} + f_{n-3} - f_{n-4}\right) + f_{n-5} - 2 f_{n-6}\right]/42$$

Формулы сглаживания многочленами более высоких степеней не применяются, а формулы сглаживания по большему числу точек применяются крайне редко, так как они оставляют плохо сглаженными большое количество точек по краям таблицы.