§1. Приближенные числа, абсолютная и относительная погрешности

Пусть число «a» есть приближение числа А. Например: $A=\sqrt{2}$ и $a=1.41$.

Определение 1. Величина $\Delta=|A-a|$ называется абсолютной погрешностью приближения a

Определение 2. Если $\Delta \le \Delta_a$, то число Δ_a называется предельной абсолютной погрешностью.

Замечание 1. Предельная абсолютная погрешность позволяет установить пределы, в которых лежит А, т.е. $a-\Delta_a \le A \le a+\Delta_a$ или $A=a \pm \Delta_a$. Например: $\sqrt{2}=1.41 \pm 0.01$.

Определение 3. Величина $\delta=\dfrac{\Delta}{|a|}$ называется относительной погрешностью приближения a.

Определение 4. Величина $\delta_a=\dfrac{\Delta_a}{|a|}$ называется предельной относительной погрешностью приближения a.

Например, для $A=\sqrt{2}$ и $a=1.41$ предельная относительная погрешность равна $\delta_a=\dfrac{0.01}{1.41}=0.007$.

Замечание 2. Предельная относительная погрешность характеризует точность вычислений или измерений.

Пример. При измерении длины пути $l=10$км допущена ошибка $\Delta_l=10$м, а при измерении диаметра гайки $d=4$см допущена погрешность $\Delta_d=1$мм. Какое из этих двух измерений более точное?

Так как по условию задачи $\Delta_l=0.01$км, то $\delta_l=\dfrac{0.01}{10}\cdot 100\%$=0.1%. Аналогично, так как $\Delta_d=0.1$см, то $\delta_d=\dfrac{0.1}{4}\cdot 100\%$=2.5%. Поскольку $\delta_l<\delta_d$, то первое измерение является более точным.

Определение 5. В десятичной записи числа значащей цифрой называется любая цифра не равная нулю. Нуль считается значащей цифрой, если он расположен между значащими цифрами или стоит правее всех значащих цифр.

Например, число 0.28 имеет 2 значащих цифры, 0.208 – три, 0.2080 четыре, 0.00208 – три.

Замечание 3. Предельная абсолютная погрешность определяется числом десятичных знаков после запятой (чем меньше десятичных знаков после запятой, тем больше Δ_a).

Замечание 4. Предельна относительная погрешность определяется числом значащих цифр (чем меньше значащих цифр, тем больше δ_a).

Определение 6. Если $\Delta_a \le 1$ разряда, выраженного $n-$ ой значащей цифрой, то a называется числом, имеющим n верных знаков в широком смысле.

В этом случае

$$\delta_a \le \frac{1}{k10^{n-1}},$$

где k – первая значащая цифра.

Определение 7. Если $\Delta_a \le 0.5$ разряда, выраженного $n-$ ой значащей цифрой, то a называется числом, имеющим n верных знаков в узком смысле.

При этом

$$\delta_a \le \frac{1}{2k10^{n-1}}.$$

В последнем случае справедливо и обратное утверждение: если $\delta_a \le \dfrac{1}{2(k+1)10^{n-1}}$, то тогда a является приближенным числом, имеющим n верных в узком смысле знаков.

Пример. Определить число верных в узком смысле знаков и дать соответствующую правильную запись следующих приближенных чисел:

1) $a=$413287.51 при $\delta = 1\%$;
2) $b=$0.0794 при $\delta = 2\%$.

Для первого числа

$$\delta_a = 10^{-2} \le \frac{1}{2(k+1)10^{n-1}} = \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 10^{n-1}} = \frac{1}{10^n},$$

так что $n = 2$ и верная запись числа имеет вид $a = 41 \cdot 10^4$. Аналогично для второго числа

$$\delta_d = \frac{2}{100} \le \frac{1}{2(7+1)10^{n-1}} = \frac{1}{16 \cdot 10^{n-1}},$$

откуда находим $n = 1$, а верная запись числа имеет вид $b = 8 \cdot 10^{-2}$.

§2. Правила действий над приближенными числами

Сложение. При сложении у остальных слагаемых оставляют на один, два десятичных знака больше, чем у того, у которого Δ_a наибольшая. В ответе оставляют столько десятичных знаков, сколько их у того, у которого Δ_a наибольшая (у которого меньше десятичных знаков после запятой).

Вычитание. При вычитании сначала числа одинаково округляют. В ответе оставляют столько **десятичных** знаков, сколько их у того, у которого Δ_a наибольшая.

Умножение и деление. При умножении и делении в ответе оставляют столько **значащих** цифр, сколько их у того, у которого δ_a наибольшая (у которого меньше **значащих** цифр).

Примеры. Требуется найти сумму приближенных чисел, все знаки которых верны в широком смысле

$$130.6 + 0.255 + 1.15225 + 41.84 + 11.8216.$$

У числа 130.6 величина Δ_a наибольшая, так как у него меньше десятичных знаков после запятой. Поэтому в ответе нужно оставить один десятичный знак после запятой. Тогда

$$130.6 + 0.255 + 1.15225 + 41.84 + 11.8216 \approx 185.7.$$

Найдем разность $153.21 - 81.329$. Для числа 153.21 Δ_a наибольшая. Поэтому в ответе нужно оставить 2 десятичных знаков после запятой. Округляя одинаково, получим $153.21 - 81.33 \approx 71.88$.

Найдем произведение $35.2 \cdot 1.748$. У числа 35.2 величина δ_a больше, так как у него меньше число значащих цифр. Поэтому в ответе нужно оставить 3 значащие цифры. Тогда $35.2 \cdot 1.748 \approx 61.5$.

§3. Погрешности функций

Пусть $u = f\left(x_1, x_2, ...x_n\right)$ – дифференцируемая в рассматриваемой области функция. Тогда предельная абсолютная погрешность значения функции определяется соотношением

$$\Delta_u = \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right| \Delta x_k, \tag{1.1}$$

где Δx_k – предельные абсолютные погрешности значений соответствующих аргументов. Для предельной относительной погрешности имеет место равенство

$$\delta_u = \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{u\ \partial x_k}\right| \Delta x_k. \tag{1.2}$$

Например, из формул (1.1) и (1.2) следует, что

$\Delta_{a+b} = \Delta_a + \Delta_b$, $\Delta_{ab} = b\Delta_a + a\Delta_b$, $\delta_{ab} = \delta_{a/b} = \delta_a + \delta_b$.

При использовании формул (1.1,1.2) часто используют принцип равных влияний, заключающийся в предположении, что слагаемые в формулах (1.1,1.2) равны.

Пример 1. С каким числом верных знаков в широком смысле следует взять значение аргумента $x \approx 2$, чтобы получить значение функции $y = e^x$ с точностью $\delta_y = 10^{-3}$?

По условию задачи

$$\delta_y = \left|\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x}\right| \Delta_x = \Delta_x = 10^{-3}.$$

Тогда из неравенства

$$\delta_x = \frac{\Delta_x}{|x|} = \frac{1}{2\cdot 10^3} \le \frac{1}{k10^{n-1}} = \frac{1}{2\cdot 10^{n-1}}$$

следует, что $n = 4$, т.е. чтобы получить значение функции с заданной точностью, значение аргумента нужно взять с 4 верными в широком смысле знаками.

Пример 2. Требуется измерить с точностью $\delta = 1\%$ площадь боковой поверхности усеченного конуса, радиусы оснований которых $r_1 \approx 2$м, $r_2 \approx 1$м, а образующая $l \approx 5$м. С какой абсолютной погрешностью нужно измерить радиусы и образующую и со сколькими знаками, верными в широком смысле, нужно взять число π?

Так как площадь боковой поверхности усеченного конуса равна

$$S = \pi\, l(r_1 + r_2)$$

то

$$\frac{1}{S}\frac{\partial S}{\partial r_1} = \frac{1}{S}\frac{\partial S}{\partial r_2} = \frac{1}{r_1 + r_2} = \frac{1}{3},\ \frac{1}{S}\frac{\partial S}{\partial l} = \frac{1}{l} = \frac{1}{5},\quad \frac{1}{S}\frac{\partial S}{\partial \pi} = \frac{1}{\pi}.$$

По принципу равного влияния $\left|\frac{1}{S}\frac{\partial S}{\partial x_i}\right|\Delta x_i = \frac{\delta_S}{n}$, откуда находим $\Delta x_i = \frac{\delta_S}{n\left|\frac{1}{S}\frac{\partial S}{\partial x_i}\right|}$. Тогда найдем $\Delta r_1 = \Delta r_2 = \frac{0.01}{4\cdot\frac{1}{3}} \approx 0.8$ см, $\Delta_l = \frac{0.01}{4\cdot\frac{1}{5}} \approx 1$ см, и $\Delta_\pi = \frac{0.01}{4\cdot\frac{1}{\pi}}$, так что из неравенства $\delta_\pi = \frac{0.01}{4} \le \frac{1}{3\cdot 10^{n-1}}$ следует, что $n = 3$.