

Линейные однородные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами

Опр.17 Если в ЛОДУ (20) все коэффициенты $b_i(x)=const$,

$$y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} y' + b_n y = 0 \quad (20)$$

$$\text{или } L[y] = 0$$

то уравнение называется линейным однородным ДУ n -го порядка с постоянными коэффициентами

Вид частных решений: $y = e^{kx}$

$$\text{Из (20) } \Rightarrow k^n + b_1 k^{n-1} + \dots + b_{n-1} k + b_n = 0 \quad (21)$$

Опр.18 Уравнение (21) называется характеристическим уравнением ЛОДУ с постоянными коэффициентами

Возможные варианты корней характеристического уравнения и соответствующие им наборы ФСР

таблица 1

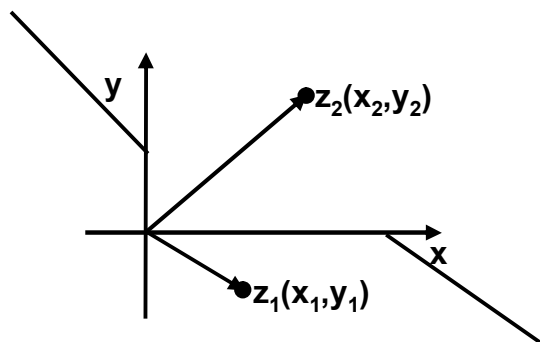
Вид корня	Соответствующие линейно независимые решения
1. $k_i \in R$ кратность 1	$y_i = e^{k_i x}$
2. $k = a \pm ib \in C$ кратность 1	$y_1 = e^{ax} \cos(bx) \quad y_2 = e^{ax} \sin(bx)$
3. $k \in R$ кратность r	$y_1 = e^{kx}, y_2 = xe^{kx}, y_3 = x^2 e^{kx}, \dots, y_r = x^{r-1} e^{kx}$
4. $k = a \pm ib \in C$ кратность r	$y_1 = e^{ax} \cos(bx) \quad y_3 = x \cdot e^{ax} \cos(bx) \dots y_r = x^{r-1} e^{ax} \cos(bx)$ $y_2 = e^{ax} \sin(bx) \quad y_4 = x \cdot e^{ax} \sin(bx) \dots y_r = x^{r-1} e^{ax} \sin(bx)$

Комплексные числа

Комплексным числом z называется упорядоченная пара чисел $z=(x,y)$ с определенными операциями над ними.

x – действительная часть числа z : $x=\operatorname{Re}z$ y – мнимая часть: $y=\operatorname{Im}z$

мнимая ось



$$z_1 = z_2 \text{ если } \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

действительная ось

Действия над комплексными числами

Пусть $z_1(x_1, y_1)$, $z_2(x_2, y_2)$ и $z_3(x_3, y_3)$

Сумма: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

1.1

а) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

б) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

в) $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ – разность

г) Существует единственное комплексное число $0 = (0, 0)$ такое, что $z + 0 = z$

Произведение: $z = z_1 * z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_2 y_1 + x_1 y_2)$

(1.2)

а) $z_1 * z_2 = z_2 * z_1$

б) $(z_1 * z_2) * z_3 = z_1 * (z_2 * z_3)$

в) $(z_1 + z_2) * z_3 = z_1 * z_3 + z_2 * z_3$

Любое действительное число можно считать комплексным $x = (x, 0)$

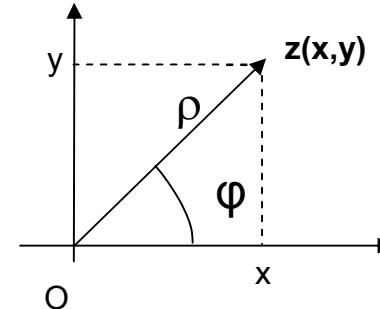
г) умножение на действительную единицу не изменяет значения числа $z * (1, 0) = z$

ОПР 2. Комплексное число вида $z = (0, 1)$ называется мнимой единицей и обозначается $i = (0, 1)$.

Алгебраическая форма комплексного числа: $z = x(1, 0) + y(0, 1) = x + i y$ (1.3)

Число $z^* = x - i y$ называется комплексно сопряженным (1.4)

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow$$



Тригонометрическая форма комплексного числа: $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ (1.5)

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot z^*} \quad \text{— модуль числа } z \quad (1.6)$$

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \arctg \left| \frac{y}{x} \right| & x > 0, y \geq 0 \\ \pi - \arctg \left| \frac{y}{x} \right| & x < 0, y \geq 0 \\ -\pi + \arctg \frac{y}{x} & x < 0, y < 0 \\ -\arctg \left| \frac{y}{x} \right| & x > 0, y < 0 \end{cases} \quad \text{— аргумент числа } z: \quad (1.6^*)$$

Формула Эйлера $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$

Показательная форма комплексного числа: $z = \rho e^{i\varphi}$ (1.7)

ОПР. Комплексное число **W** называется корнем **n**-ой степени из числа **z**, если $z = w^n$. Обозначают $w = \sqrt[n]{z} = z^{1/n}$ (1.8)

Теорема. $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{\frac{\varphi + 2\pi k}{n} i}$ (1.9)

$$k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$