

Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка

Опр.14 ДУ n -го порядка называется линейным, если оно является уравнением первой степени относительно неизвестной функции и y ее производных $y', y'', \dots, y^{(n)}$

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (16)$$

где $f(x)$ и $a_i(x)$ заданные функции от x или *const*, причем $a_0 \neq 0$

Если $f(x) = 0$, то (16) – однородное

Если $f(x) \neq 0$, то (16) – неоднородное

Приведенное ЛДУ

$$y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(x)y' + b_n(x)y = f(x) \quad (17)$$

Линейный дифференциальный оператор:

$$L[y] = y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(x)y' + b_n(x)y$$

тогда $(17) \rightarrow L[y] = f(x) \quad (17^*)$

$$L[y] = y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(x)y' + b_n(x)y$$

Свойства дифференциального оператора:

$$1. L[C y] = CL[y]$$

Док-во: *самостоятельно*

$$2. L[y + z] = L[y] + L[z]$$

Док-во: *самостоятельно*

$\Rightarrow L[y]$ *линейный
дифференциальный оператор*

Линейные однородные ДУ n -го порядка

$$y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(x)y' + b_n(x)y = 0 \quad (18)$$

$$\text{или } L[y] = 0$$

Свойства решений ЛОДУ

Теорема 4. Если y_1 и y_2 - решения ЛОДУ $L[y] = 0$, то $y_1 + y_2$ также решения этого уравнения

Теорема 5. Если y_1 - решение ЛОДУ $L[y] = 0$, то Cy_1 также решение этого уравнения

Следствие Если $y_1, y_2, \dots, y_n$ - решения ЛОДУ $L[y] = 0$, то их линейная комбинация $C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n$ также решение этого уравнения

Линейная зависимость системы функций

Определитель Вронского

Пусть на (a, b) определена и $(n - 1)$ раз дифференцируема система функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$

Опр.15 Определитель вида

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = W(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (19)$$

называется определителем Вронского или вронскианом системы функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$

Теорема 6. Если функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейно зависимы на $[a, b]$, то их определитель Вронского равен нулю.

Замечание. Т6 – необходимое, но не достаточное условие. Т.е. если

$W \equiv 0$, то система $y_1, y_2, \dots, y_n$ может быть как линейно зависима, так и линейно независима

Теорема 7. Если n решений $y_1, y_2, \dots, y_n$ уравнения $L[y] = 0$ линейно независимы на (a, b) , то их определитель Вронского не равен нулю.

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

Теорема 8. Общим решением уравнения $L[y] = 0$, определенного на (a, b) является линейная комбинация

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = \sum_{i=1}^n C_i y_i$$

n линейно независимых на (a, b) решений $y_1, y_2, \dots, y_n$

Фундаментальная система решений (ФСР)

Опр.16. Система n линейно независимых решений ЛОДУ n -го порядка называется его фундаментальной системой решений.

Следствия. Из Т6-Т8

1. Максимальное число линейно-независимых решений ЛОДУ $L[y]=0$ равно его порядку n .

2. Любые n линейно-независимые частные решения ЛОДУ $L[y]=0$ n -го порядка являются его фундаментальной системой решений

3. Пространство решений ЛОДУ $L[y]=0$ n -го порядка имеет базис из n векторов (n -мерное пространство). Базисные векторы – фундаментальная система

4. Любое другое решение, не зависимо от начальных условий, есть линейная комбинация базисных векторов – решений фундаментальной системы

5. Если два ЛОДУ $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0$

$$y^{(n)} + q_1 y^{(n-1)} + \dots + q_n y = 0$$

имеют общую ФСР, то они тождественны между собой, т.е. $p_i(x) \equiv q_i(x) \quad i = \overline{1, n}$