

Основные типы ДУ

1. Уравнения с разделенными переменными

ДУ (3) всегда можно записать в виде

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (4)$$

(иногда эту форму записи называют дифференциальной формой уравнения)

Удобна тем, что переменные можно рассматривать как равноправные

Опр.3. Уравнение вида $f(x)dx + \varphi(y)dy = 0 \quad (5)$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ - непрерывные функции, называется уравнением с разделенными переменными

Опр.4. Если ДУ (2) приводится к виду (5), т.е. $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, то оно называется уравнением с разделяющимися переменными

или $M_1(x) \cdot N_1(y)dx + M_2(x) \cdot N_2(y)dy = 0 \quad (5^*)$

т.е. уравнение, в котором коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от x и только от y . M_1, N_1, M_2, N_2 — непрерывные

Опр.5. Функция $M(x, y)$ называется однородной степени m , если при любом t справедливо равенство

$$M(tx, ty) = t^m \cdot M(x, y)$$

Опр.6. ДУ (2) $y' = f(x, y)$ называется однородным, если $f(x, y)$ однородная функция нулевой степени однородности

Подстановка: $\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = xz \Rightarrow y' = z + xz'$ (6)

Линейные уравнения первого порядка

Опр.7. Уравнение первого порядка, линейное относительно неизвестной функции и ее производной, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \quad (7)$$

$f(x)$, $p(x)$ – заданные непрерывные функции

Если $f(x)=0$, то линейное уравнение называется однородным.
противном случае уравнение называется неоднородным.

Методы решения линейного уравнения $\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$

1. Метод Лагранжа (вариации постоянной)

a) $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Rightarrow y = Ce^{-\int g(x)dx}$ - общее решение
однородного уравнения

b) Пусть $C = C(x) \Rightarrow C(x) = \int f(x)e^{\int g(x)dx} dx + \tilde{C}$

Решение $y(x) = \left[\int f(x)e^{\int g(x)dx} dx + \tilde{C} \right] e^{-\int g(x)dx}$

Заметим: $y(x) = \tilde{C}e^{-\int g(x)dx} + \int f(x)e^{\int g(x)dx} dx \cdot e^{-\int g(x)dx}$

↑
общее решение
однородного уравнения

↑
частное решение
неоднородного уравнения

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \quad (7)$$

2. Метод Бернулли

Ищем решение в виде произведения двух функций $y(x) = u(x) v(x)$

$$y'(x) = u'(x) v(x) + u(x) v'(x) \Rightarrow \text{в (7)}$$

$$u' v + u v' + p(x) u v = f(x) \Rightarrow$$

$$u' v + u (v' + p(x) v) = f(x) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v' + p(x) v = 0 \\ u' v = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} v = \varphi(x) \\ \swarrow \end{matrix}$$

$$\Rightarrow u = F(x) + C$$

Общее решение $y(x) = \varphi(x) [F(x) + C]$

Уравнение Бернулли

Опр.8. Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = f(x) \cdot y^n \quad (8)$$

$n \neq 1, 0$. $f(x), p(x)$ – заданные непрерывные функции

Методы решения

1. Сведение к линейному

Замена $y^{1-n} = z$

2. Метод Бернулли

Замена $y = u \cdot v$

Сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными

Уравнение в полных дифференциалах

Опр.9. Уравнение $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ **(9)**

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, т.е.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du(x, y)$$

Тогда исходное уравнение запишется $du = 0$,

откуда очевидно общий интеграл $u(x, y) = C$

Теорема 2.

Пусть функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ определены и непрерывны в D плоскости XOY и имеют в ней непрерывные частные производные M'_y и N'_x . Для того, чтобы выражение $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ было полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$ необходимо и достаточно, чтобы во всех точках D выполнялось условие

$$M'_y = N'_x$$

Доказательство повторить

ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

Опр.10. Если уравнение $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ (*)

не является уравнением в полных дифференциалах, но существует некоторая функция $\mu(x, y)$, после умножения на которую уравнение

$$\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = 0 \quad (**)$$

становится уравнением в полных дифференциалах, т.е.

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

то такая функция $\mu(x, y)$ называется интегрирующим множителем

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\mu \left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right]}{N \frac{\partial \varpi}{\partial x} - M \frac{\partial \varpi}{\partial y}}$$

УРАВНЕНИЯ, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

В общем виде: $F(x, y, y') = 0$

Уравнение, линейное относительно x и y - уравнение Лагранжа

$$y = x \cdot \varphi(y') + \psi(y')$$

Частный случай уравнения Лагранжа - уравнение Клеро

$$y = x \cdot y' + \psi(y')$$

Подстановка: $y' = p(x)$

Вид ДУ	Тип ДУ	Метод
$f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0$	С разделенными переменными	Интегрирование
$y' = f_1(y) \cdot f_2(x)$	С разделяющимися переменными	$\frac{dy}{f_1(y)} = f_2(x)dx$
$y' = f(ax + by + c)$	Приводящиеся к разделяющимся	$z = ax + by + c \Rightarrow y' = \frac{z' - a}{b}$
$y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$	Однородное	$\frac{y}{x} = z \Rightarrow y' = z + xz'$
$y' + g(x)y = f(x)$	Линейное неоднородное	а) Лагранжа б) Бернулли
$y' + g(x) \cdot y = f(x) \cdot y^n$	Бернулли	а) $z = y^{1-n}$ б) $y = v(x) \cdot u(x)$
$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$	В полных дифференциалах	$u = \int M(x, y)dx + C(y)$