Методические указания по выполнению индивидуальных домашних заданий

Методические указания к решению индивидуального задания № 1

Индивидуальное задание № 1 соответствует теме «Неопределённый интеграл» теоретического раздела дисциплины. Каждый вариант содержит 30 интегралов, нахождение которых позволит освоить основные приёмы и методы интегрирования.

Основными методами интегрирования являются:

- непосредственное интегрирование;
- интегрирование по частям;
- замена переменной.

Кроме того, напомним важное правило интегрирования, позволяющее значительно расширить таблицу интегралов. Это правило основано на следующей теореме.

Теорема. Всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановке вместо независимой переменной любой дифференцируемой функции от неё, т.е. если:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ то и } \int f(u)du = F(u) + C,$$

где $u = \varphi(x)$ – любая дифференцируемая функция от x.

Эта теорема позволяет приводить интеграл к табличному виду, используя свойство инвариантности формул интегрирования. Основная таблица интегралов в силу этого правила оказывается справедливой независимо от того, является переменная интегрирования независимой переменной или любой дифференцируемой функцией её.

Приведём таблицу неопределённых интегралов для случая, когда переменной интегрирования является функция $u(x)$:

1. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$;

2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$;

3. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$;

4. $\int e^u du = e^u + C$;

7. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$;

8. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$;

9. $\int \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$;

10. $\int \dfrac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C$;

5. $\int \sin u du = -\cos u + C$;

6. $\int \cos u du = \sin u + C$;

11. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+k}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2+k}\right| + C$;

12. $\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C$.

Метод непосредственного интегрирования основан на знании таблицы интегралов и основных свойств неопределенного интеграла:

1. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, $k \in R$;
2. $\int \left(f_1(x) + f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

Метод интегрирования по частям основан на использовании формулы:

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu.$$

Схема интегрирования по частям предполагает предварительное разбиение подынтегрального выражения на произведение двух множителей u и du. При этом основным критерием правильности разбиения служит то, что интеграл в правой части формулы интегрирования по частям должен быть проще или, по крайней мере, не сложнее исходного интеграла $\int vdu$. При интегрировании по частям следует придерживаться следующих рекомендаций:

1. если в подынтегральное выражение входит произведение многочлена на показательную или тригонометрическую функцию, то в качестве u берётся многочлен;
2. если в подынтегральное выражение входит логарифмическая или обратная тригонометрические функции, то именно эти функции и берутся за u.

Метод замены переменной применяется при нахождении интегралов от тригонометрических, иррациональных и т.п. функций. Этот метод основан на следующей теореме.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(a;b)$, и функция $x = u(t)$ определена и дифференцируема на интервале $(\alpha;\beta)$ и имеет область значений $(a;b)$. Тогда если на интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ имеет первообразную, то на интервале $(\alpha;\beta)$ имеет место равенство:

$$\int f(x)dx = \int f\left(u(t)\right) \cdot u'(t)dt.$$

Отметим, что нельзя дать общее правило выбора замены переменной для интегрирования любой функции. Это можно сделать только для интегрирования отдельных классов функций.

Все интегралы от тригонометрических функций можно разбить условно на две группы.

К первой группе относятся интегралы, для нахождения которых применяется непосредственное интегрирование в сочетании с методом подведения под знак дифференциала, при этом необходимо предварительно преобразовать тригонометрическую функцию, используя различные формулы тригонометрии:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \qquad \cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right],$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \qquad \sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right],$$

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha, \qquad \sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right].$$

Ко второй группе относятся интегралы, для нахождения которых используются подходящие подстановки, что позволяет свести интегрирование рациональных тригонометрических функций к интегрированию рациональных дробей.

Основным методом интегрирования иррациональных функций является метод подстановки. При интегрировании таких функций, выбранная подстановка должна рационализировать подынтегральную функцию. При этом используются как алгебраические, так и тригонометрические подстановки.

Особое место среди интегрируемых функций занимают дробно-рациональные функции, интеграл от которых всегда может быть выражен через элементарные функции. Приведём схему интегрирования дробно-рациональных функций:

1) Проверить, является ли рациональная дробь правильной. Если степень многочлена в числителе не меньше степени многочлена знаменателя (дробь неправильная), то делением числителя на знаменатель выделить целую часть. В результате от исходной неправильной рациональной дроби переходим к сумме многочлена (целая часть) и правильной рациональной дроби.

2) Представить правильную рациональную дробь в виде суммы простых дробей. Для этого:

2.1. Разложить знаменатель на линейные и квадратичные множители, не имеющие вещественных корней.

2.2. Представить дробь в виде суммы простых дробей с неопределёнными коэффициентами.

Множитель знаменателя	Кол-во дробей	Простые дроби, соответствующие этому множителю
$(x-a)^k$	k	$\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)}$
$\left(x^2+px+q\right)^k$, $p^2-4q<0$	k	$\frac{A_1x+B_1}{\left(x^2+px+q\right)^k}+\frac{A_2x+B_2}{\left(x^2+px+q\right)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{\left(x^2+px+q\right)}$

2.3. Найти неопределённые коэффициенты разложения.

3) Интеграл от рациональной дроби найти, используя свойство линейности неопределённого интеграла.

Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 1

Вариант № 0

Задание 1. Найдите интегралы, применив теорему о независимости вида формулы интегрирования от характера переменной интегрирования:

1.1. $\int \frac{4^{\arcsin x}dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

1.2. $\int \cos(3x-4)dx$;

1.3. $\int \frac{x^3dx}{4+x^8}$;

1.4. $\int \frac{\cos x\sin xdx}{1+\sin^2 x}$;

1.5. $\int \frac{dx}{\sin^2(3x+4)}$;

1.6. $\int \mathrm{tg}^2\, 31xdx$;

1.7. $\int \frac{x^4dx}{\sqrt[3]{4-x^5}}$;

1.8. $\int \frac{4-3x}{x^2+9}dx$.

Решение

1.1. $\int \frac{4^{\arcsin x}dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int \frac{4^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{d(\arcsin x)}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=\int 4^{\arcsin x}d(\arcsin x)=\frac{4^{\arcsin x}}{\ln 4}+C.$

Ответ: $\int \frac{4^{\arcsin x}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4^{\arcsin x}}{\ln 4} + C.$

1.2. $\int \cos(3x-4)dx = \int \cos(3x-4) \cdot \frac{d(3x-4)}{3} = \frac{1}{3}\int \cos(3x-4)d(3x-4) =$

$= \frac{1}{3}\sin(3x-4) + C.$

Ответ: $\int \cos(3x-4)dx = \frac{1}{3}\sin(3x-4) + C.$

1.3. $\int \frac{x^3dx}{4+x^8} = \int \frac{x^3}{(2)^2+\left(x^4\right)^2} \cdot \frac{d(x^4)}{4x^3} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{2^2+\left(x^4\right)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{2} + C =$

$= \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{2} + C.$

Ответ: $\int \frac{x^3dx}{4+x^8} = \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{2} + C.$

1.4. $\int \frac{\sin x\cos x dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x} \cdot \frac{d\left(1+\sin^2 x\right)}{\left(1+\sin^2 x\right)'} = \int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x} \cdot \frac{d\left(1+\sin^2\right)}{2\sin x\cos x} =$

$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+\sin^2 x\right)}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{2}\ln\left|1+\sin^2 x\right| + C.$

Ответ: $\int \frac{\sin x\cos x dx}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{2}\ln\left|1+\sin^2 x\right| + C.$

1.5. $\int \frac{dx}{\sin^2(3x+4)} = \int \frac{1}{\sin^2(3x+4)} \cdot \frac{d(3x+4)}{3} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x+4)}{\sin^2(3x+4)} + C =$

$= -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}(3x+4) + C.$

Ответ: $\int \frac{dx}{\sin^2(3x+4)} = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}(3x+4) + C.$

1.6. $\int \operatorname{tg}^2 31x dx = \int \frac{\sin^2 31x}{\cos^2 31x} dx = \int \frac{1-\cos^2 31x}{\cos^2 31x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 31x} - \int \frac{\cos^2 31x}{\cos^2 31x} dx =$

$= \int \frac{1}{\cos^2 31x} \cdot \frac{d(31x)}{31} - \int dx = \frac{1}{31} \int \frac{d(31x)}{\cos^2 31x} - x + C = \frac{1}{31} \operatorname{tg} 31x - x + C.$

Ответ: $\int \operatorname{tg}^2 31x dx = \frac{1}{31} \operatorname{tg} 31x - x + C$.

1.7. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{4-x^5}} = \int \left(4-x^5\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot x^4 \cdot \frac{d\left(4-x^5\right)}{-5x^4} = -\frac{1}{5} \int \left(4-x^5\right)^{\frac{-1}{3}} d\left(4-x^5\right) =$

$= -\frac{1}{5} \cdot \frac{\left(4-x^5\right)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = -\frac{3}{10}\left(4-x^5\right)^{\frac{2}{3}} + C.$

Ответ: $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{4-x^5}} = -\frac{3}{10}\left(4-x^5\right)^{\frac{2}{3}} + C$.

1.8. $\int \frac{4-3x}{x^2+9} dx = \int \frac{4dx}{x^2+9} - \int \frac{3xdx}{x^2+9} = 4\int \frac{dx}{x^2+3^2} - \int \frac{3x}{x^2+9} \cdot \frac{d\left(x^2+9\right)}{2x} =$

$= \frac{4}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} - \frac{3}{2} \int \frac{d\left(x^2+9\right)}{x^2+9} + C = \frac{4}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} - \frac{3}{2} \ln\left|x^2+9\right| + C.$

Ответ: $\int \frac{4-3x}{x^2+9} dx = \frac{4}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} - \frac{3}{2} \ln\left|x^2+9\right| + C.$

Задание 2. Найдите интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

2.1. $\int (2-3x) \sin 2x dx$;

2.2. $\int \sqrt{x} \ln x dx$;

2.3. $\int x \operatorname{arctg} 2x dx$;

2.4. $\int (4-x) e^{\frac{x}{3}} dx$.

Решение

2.1. $\int (2-3x)\sin 2x dx = \left| \begin{matrix} u = 2-3x \Rightarrow du = -3dx \\ dv = \sin 2x dx \Rightarrow v = \int \sin 2x dx = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{matrix} \right| =$

$$= (2-3x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - \int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\cdot(-3)\,dx = (2-3x)\cdot$$

$$\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - \frac{3}{2}\int \cos 2x dx = \frac{3x-2}{2}\cdot\cos 2x - \frac{3}{4}\sin 2x + C.$$

Ответ: $\int (2-3x)\sin 2x dx = \dfrac{3x-2}{2}\cdot\cos 2x - \dfrac{3}{4}\sin 2x + C.$

2.2. $\int \sqrt{x}\ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = \sqrt{x}dx \Rightarrow v = \int \sqrt{x}dx = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \end{matrix} \right| = \ln x\cdot\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \dfrac{2}{3}\int x^{\frac{3}{2}}\cdot\dfrac{dx}{x} =$

$$= \ln x\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}dx = \ln x\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\ln x\cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} + C.$$

Ответ: $\int \sqrt{x}\ln x dx = \dfrac{2}{3}\ln x\cdot x^{\frac{3}{2}} - \dfrac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} + C.$

2.3. $\int x\,\mathrm{arctg}\,2x dx = \left| \begin{matrix} u = \mathrm{arctg}\,2x \Rightarrow du = \dfrac{2dx}{1+4x^2} \\ dv = xdx \Rightarrow v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \mathrm{arctg}\,2x\cdot\dfrac{x^2}{2} -$

$$-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{2dx}{1+4x^2} = \mathrm{arctg}\,2x\cdot\frac{x^2}{2} - \int\frac{x^2dx}{1+4x^2} = \mathrm{arctg}\,2x\cdot\frac{x^2}{2} -$$

$$-\frac{1}{4}\int\frac{4x^2+1-1}{1+4x^2}dx = \mathrm{arctg}\,2x\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\int\left(1-\frac{1}{1+4x^2}\right)dx =$$

$$= \mathrm{arctg}\,2x\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4}\int\frac{1}{1+4x^2}dx = \mathrm{arctg}\,2x\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}x +$$

$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{d(2x)}{1+(2x)^2} = \mathrm{arctg}\,2x\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\mathrm{arctg}\,2x + C.$$

Ответ: $\int x\operatorname{arctg}2x dx=\operatorname{arctg}2x\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\operatorname{arctg}2x+C.$

2.4. $\int(4-x)e^{\frac{x}{3}}dx=\left|\begin{matrix}u=4-x\Rightarrow du=-dx\\ dv=e^{\frac{x}{3}}dx\Rightarrow v=\int e^{\frac{x}{3}}dx=3e^{\frac{x}{3}}\end{matrix}\right|=3(4-x)e^{\frac{x}{3}}-$

$-\int 3e^{\frac{x}{3}}(-dx)==3(4-x)e^{\frac{x}{3}}+3\int e^{\frac{x}{3}}dx=3(4-x)e^{\frac{x}{3}}+9e^{\frac{x}{3}}+C.$

Ответ: $\int(4-x)e^{\frac{x}{3}}dx=3(4-x)e^{\frac{x}{3}}+9e^{\frac{x}{3}}+C.$

Задание 3. Найдите интегралы от рациональных дробей:

3.1. $\int\frac{(2x-1)dx}{x^2-3x+4};$

3.2. $\int\frac{(x+3)dx}{x(x+4)^2};$

3.3. $\int\frac{(2x^2+3)dx}{(x+4)(x^2+5)};$

3.4. $\int\frac{4x^2+2x-1}{x^2+2x-1}dx.$

Решение

3.1. Подынтегральная функция $f(x)=\frac{2x-1}{x^2-3x+4}$ содержит в знаменателе квадратный трёхчлен (x^2-3x+4). Поэтому интегрирование проводится по следующей схеме:

а) в квадратном трёхчлене выделим полный квадрат:

$$x^2-3x+4=x^2-2\cdot x\cdot\left(\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+4=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4};$$

б) введём новую переменная $u=x-1{,}5$, откуда $x=u+1{,}5$ и $dx=du$;

в) в исходном интеграле переходим к новой переменной:

$$\int\frac{(2x-1)dx}{x^2-3x+4}=\int\frac{2(u+1{,}5)-1}{u^2+1{,}75}du=\int\frac{2u+3-1}{u^2+1{,}75}du=\int\frac{2u+2}{u^2+1{,}75}du;$$

г) разбиваем последний интеграл на два интеграла, один из которых табличный, а второй приводится к табличному подведением под знак дифференциала:

$$\int \frac{2u+2}{u^2+1{,}75}du = \int \frac{2udu}{u^2+1{,}75} + \int \frac{2du}{u^2+1{,}75} = \int \frac{2u}{u^2+1{,}75} \cdot \frac{d\left(u^2+1{,}75\right)}{2u} +$$

$$+2\int \frac{du}{u^2+\left(\sqrt{1{,}75}\right)^2} = \int \frac{d(u^2+1{,}75)}{u^2+1{,}75} + \frac{2}{\sqrt{1{,}75}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{1{,}75}} + C =$$

$$= 2\ln\left|u^2+1{,}75\right| + \frac{2}{\sqrt{1{,}75}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{1{,}75}} + C;$$

д) возвращаемся к старой переменной:

$$2\ln\left|u^2+1{,}75\right| + \frac{2}{\sqrt{1{,}75}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{1{,}75}} + C =$$

$$= 2\ln\left|\left(x-1{,}5\right)^2+1{,}75\right| + \frac{2}{\sqrt{1{,}75}}\operatorname{arctg}\frac{x-1{,}5}{\sqrt{1{,}75}} + C.$$

Ответ: $\displaystyle\int \frac{\left(2x-1\right)dx}{x^2-3x+4} = 2\ln\left|\left(x-1{,}5\right)^2+1{,}75\right| + \frac{2}{\sqrt{1{,}75}}\operatorname{arctg}\frac{x-1{,}5}{\sqrt{1{,}75}} + C.$

3.2. Подынтегральная функция $f\left(x\right) = \dfrac{x+3}{x\left(x+4\right)^2}$ является правильной рациональной дробью. Для интегрирования такой дроби её необходимо разложить на сумму простых дробей:

$$\frac{x+3}{x\left(x+4\right)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4} + \frac{C}{\left(x+4\right)^2}. \qquad (*)$$

Найдем теперь неопределённые коэффициенты A, B и C. Для этого приводим дроби, стоящие в правой части равенства (*) к общему знаменателю:

$$\frac{x+3}{x\left(x+4\right)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4} + \frac{C}{\left(x+4\right)^2} = \frac{A\left(x+4\right)^2 + Bx\left(x+4\right) + Cx}{x\left(x+4\right)^2}.$$

Из равенства двух дробей с одинаковыми знаменателями следует и равенство их числителей

$$x+3 = A\left(x+4\right)^2 + Bx\left(x+4\right) + Cx.$$

Это равенство справедливо для любых значений x Для нахождения трёх неопределённых коэффициентов можно в полученное равенство подставить любые три значения x и получить систему из трёх уравнений с тремя неизвестными A, B и C. Возьмём $x=0$, $x=-4$ и $x=-3$. Получим:

$$x=0: \quad 3=16A \Rightarrow A=\frac{3}{16};$$

$$x=-4: \ -1=-4C \Rightarrow C=\frac{1}{4};$$

$$x=-3: \ 0=A-3B-3C \Rightarrow \frac{3}{16}-3B-\frac{3}{4}=0 \Rightarrow B=-\frac{3}{16}.$$

Найденные коэффициенты подставим в разложение дроби и находим интегралы:

$$\int\frac{(x+3)dx}{x(x+4)^2}=\frac{3}{16}\int\frac{dx}{x}-\frac{3}{16}\int\frac{dx}{x+4}+\frac{1}{4}\int\frac{1}{(x+4)^2}dx=$$

$$=\frac{3}{16}\ln|x|-\frac{3}{16}\ln|x+4|-\frac{1}{4(x+4)}+C.$$

Ответ: $\displaystyle\int\frac{(x+3)dx}{x(x+4)^2}=\frac{3}{16}\ln|x|-\frac{3}{16}\ln|x+4|-\frac{1}{4(x+4)}+C.$

3.3. Подынтегральная функция $f(x)=\dfrac{2x^2+3}{(x+4)(x^2+5)}$ является правильной рациональной дробью, поэтому находим интеграл по той же схеме, что и в п. 3.2.

$$\frac{2x^2+3}{(x+4)(x^2+5)}=\frac{A}{x+4}+\frac{Bx+C}{x^2+5}=\frac{A(x^2+5)+(Bx+C)(x+4)}{(x+4)(x^2+5)}\Rightarrow$$

$$2x^2+3=A(x^2+5)+(Bx+C)(x+4)\Rightarrow$$

$$x=-4: \quad 35=20A\Rightarrow A=\frac{7}{4};$$

$$x=0: \quad 3=5A+4C\Rightarrow 3=5\cdot\frac{7}{4}+4C\Rightarrow C=-\frac{13}{16};$$

$$x=-3: \ 21=14A-3B+C\Rightarrow 14\cdot\frac{7}{4}-3B-\frac{13}{16}=21\Rightarrow B=\frac{43}{48}.$$

В результате получаем:

$$\int \frac{\left(2x^2+3\right)dx}{(x+4)\left(x^2+5\right)} = \int \frac{\frac{7}{4}}{x+4}dx + \int \frac{\frac{43x}{48}-\frac{13}{16}}{x^2+5}dx = \frac{7}{4}\int \frac{dx}{x} + \frac{43}{48}\int \frac{xdx}{x^2+5} -$$

$$-\frac{13}{16}\int \frac{dx}{x^2+5} = \frac{7}{4}\ln|x| + \frac{43}{48}\int \frac{x}{x^2+5}\cdot\frac{d\left(x^2+5\right)}{2x} - \frac{13}{16}\int \frac{dx}{x^2+(\sqrt{5})^2} + C =$$

$$= \frac{7}{4}\ln|x| + \frac{43}{98}\ln\left|x^2+5\right| - \frac{13}{16\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

Ответ: $\int \frac{\left(2x^2+3\right)dx}{(x+4)\left(x^2+5\right)} = \frac{7}{4}\ln|x| + \frac{43}{98}\ln\left|x^2+5\right| - \frac{13}{16\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$

3.4. Подынтегральная функция $f(x) = \frac{4x^2+2x-1}{x^2+2x-1}$ является неправильной рациональной дробью, поэтому сначала выделим целую часть (путём деления числителя на знаменатель) и представим дробь в виде суммы целой части и правильной дроби:

$$\begin{array}{r|l} -\,4x^2+2x-1 & x^2+2x-1 \\ \cline{2-2} \underline{4x^2+8x-4} & \quad 4 \\ -6x+3 & \end{array}$$

В итоге получаем:

$$\frac{4x^2+2x-1}{x^2+2x-1} = 4 + \frac{-6x+3}{x^2+2x-1}.$$

Тогда исходный интеграл будет равен сумме интегралов:

$$\int \frac{4x^2+2x-1}{x^2+2x-1}dx = \int\left(4+\frac{-6x+3}{x^2+2x-1}\right)dx = \int 4dx - 3\int \frac{2x-1}{x^2+2x-1}dx =$$

$$= 4x - 3\int \frac{2x-1}{x^2+2x-1}dx + C.$$

Для вычисления интеграла $\int \frac{2x-1}{x^2+2x-1}dx$ разложим знаменатель подынтегральной дроби на множители:

$$x^2+2x-1 = \left(x+1-\sqrt{2}\right)\left(x+1+\sqrt{2}\right).$$

Тогда дробь можно представить в виде суммы двух простых дробей:

$$\frac{2x-1}{x^2+2x-1}=\frac{2x-1}{\left(x+1-\sqrt{2}\right)\left(x+1+\sqrt{2}\right)}=\frac{A}{x+1-\sqrt{2}}+\frac{B}{x+1+\sqrt{2}}.$$

Найдём коэффициенты A и B.

$$\frac{2x-1}{\left(x+1-\sqrt{2}\right)\left(x+1+\sqrt{2}\right)}=\frac{A}{x+1-\sqrt{2}}+\frac{B}{x+1+\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{A\left(x+1+\sqrt{2}\right)+B\left(x+1-\sqrt{2}\right)}{\left(x+1-\sqrt{2}\right)\left(x+1+\sqrt{2}\right)}\Rightarrow$$

$$2x-1=A\left(x+1+\sqrt{2}\right)+B\left(x+1-\sqrt{2}\right);$$

$$x=-1-\sqrt{2}:\quad -2-2\sqrt{2}-1=-2\sqrt{2}B\Rightarrow B=\frac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}};$$

$$x=-1+\sqrt{2}:\quad -2+2\sqrt{2}-1=2\sqrt{2}A\Rightarrow A=\frac{-3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}.$$

Тогда

$$\int\frac{2x-1}{x^2+2x-1}dx=\frac{-3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\int\frac{dx}{x+1-\sqrt{2}}+\frac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\int\frac{dx}{x+1+\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{-3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\ln\left|x+1-\sqrt{2}\right|+\frac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\ln\left|x+1+\sqrt{2}\right|+C.$$

Суммируя полученные результаты, окончательно получаем:

$$\int\frac{4x^2+2x-1}{x^2+2x-1}dx=4x+\frac{-3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\ln\left|x+1-\sqrt{2}\right|+\frac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\ln\left|x+1+\sqrt{2}\right|+C.$$

Ответ:

$$\int\frac{4x^2+2x-1}{x^2+2x-1}dx=4x+\frac{-3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\ln\left|x+1-\sqrt{2}\right|+\frac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\ln\left|x+1+\sqrt{2}\right|+C.$$

Задание 4. Найдите интегралы от тригонометрических функций:

4.1. $\int\cos^4 x\cdot\sin^3 xdx;$

4.2. $\int\sin 5x\cdot\cos 8xdx;$

4.4. $\int\frac{dx}{3-2\cos x};$

4.5. $\int\sin^4 2x\cdot\cos^2 2xdx.$

4.3. $\int \mathrm{ctg}^5 x dx;$

Решение

4.1. $\int \cos^4 x \cdot \sin^3 x dx.$

Преобразуем подынтегральную функцию следующим образом:

$$f(x) = \cos^4 x \cdot \sin^3 x = \cos^4 x \cdot \sin^2 x \cdot \sin x = \cos^4 x \cdot \left(1 - \cos^2 x\right) \cdot \sin x.$$

При этом было использовано основное тригонометрическое тождество:

$$\int \cos^4 x \cdot \sin^3 x dx = \int \cos^4 x \cdot \left(1 - \cos^2 x\right) \cdot \sin x dx =$$

$$= \int \cos^4 x \cdot \left(1 - \cos^2 x\right) \cdot \sin x \cdot \frac{d(\cos x)}{-\sin x} = -\int \cos^4 x \cdot \left(1 - \cos^2 x\right) \cdot d(\cos x) =$$

$$= -\int \cos^4 x \cdot d(\cos x) + \int \cos^6 x \cdot d(\cos x) = -\frac{(\cos x)^5}{5} + \frac{(\cos x)^7}{7} + C.$$

Ответ: $\int \cos^4 x \cdot \sin^3 x dx = -\frac{(\cos x)^5}{5} + \frac{(\cos x)^7}{7} + C.$

4.2. $\int \sin 5x \cdot \cos 8x dx = \left| \sin 5x \cdot \cos 8x = \frac{1}{2}\left[\sin 13x - \sin 3x\right] \right| =$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 13x dx - \frac{1}{2}\int \sin 3x dx = \frac{1}{2}\int \sin 13x \cdot \frac{d(13x)}{13} - \frac{1}{2}\int \sin 3x \cdot \frac{d(3x)}{3} =$$

$$= -\frac{1}{26}\cos 13x + \frac{1}{6}\cos 3x + C.$$

Ответ: $\int \sin 5x \cdot \cos 8x dx = -\frac{1}{26}\cos 13x + \frac{1}{6}\cos 3x + C.$

4.3. $\int \mathrm{ctg}^5 x dx = \left| \begin{array}{l} \mathrm{ctg}\, x = t, \\ dt = -\dfrac{dt}{t^2+1} \end{array} \right| = -\int \frac{t^5}{t^2+1} dt.$

После указанной подстановки интегрирование тригонометрической функции свелось к интегрированию рациональной функции. Под знаком интеграла стоит неправильная рациональная дробь. Путём деления числителя дроби на знаменатель представим эту дробь в виде суммы целой части и правильной рациональной дроби:

$$\frac{t^5}{t^2+1}=t^3-t+\frac{t}{t^2+1}.$$

В итоге получаем:

$$\int \operatorname{ctg}^5 x dx=-\int\left(t^3-t+\frac{t}{t^2+2}\right)dt=$$

$$=-\int t^3dt+\int tdt-\int\frac{tdt}{t^2+1}=-\frac{t^4}{4}+\frac{t^2}{2}-\int\frac{t}{t^2+1}\cdot\frac{d\left(t^2+1\right)}{2t}=$$

$$=-\frac{t^4}{4}+\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t^2+1\right)}{t^2+1}=-\frac{t^4}{4}+\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right|+C.$$

Возвращаясь к старой переменной, окончательно получаем:

$$\int \operatorname{ctg}^5 x dx=-\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4}+\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|1+\operatorname{ctg}^2 x\right|+C.$$

Ответ: $\int \operatorname{ctg}^5 x dx=-\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4}+\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|1+\operatorname{ctg}^2 x\right|+C.$

4.4. $\int\frac{dx}{3-2\cos x}=\left|\begin{array}{l} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}, dt=\frac{2dt}{t^2+1}, \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{\frac{2dt}{t^2+1}}{3-\frac{1-t^2}{t^2+1}}=2\int\frac{dt}{4t^2+2}=$

$$=\frac{2}{4}\int\frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{0,5}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{0,5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{0,5}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{0,5}}\right)+C.$$

Ответ: $\int\frac{dx}{3-2\cos x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{0,5}}\right)+C.$

4.5. $\int \sin^4 2x\cdot\cos^2 2xdx.$

Для вычисления этого интеграла используем формулы понижения степени:

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},\ \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

Получим:

$$\int \sin^4 2x \cdot \cos^2 2x dx = \int \left(\frac{1-\cos 4x}{2} \right)^2 \cdot \frac{1+\cos 4x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \left(1-\cos^2 4x\right)\left(1-\cos 4x\right) dx = \frac{1}{8} \int \left(1-\cos 4x - \cos^2 4x + \cos^3 4x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx - \frac{1}{8} \int \cos^2 4x dx + \frac{1}{8} \int \cos^3 4x dx =$$

$$= \frac{1}{8} x - \frac{1}{8} \int \cos 4x \frac{d(4x)}{4} - \frac{1}{8} \int \frac{1+\cos 8x}{2} dx + \frac{1}{8} \int \cos^2 4x \cdot \cos 4x dx =$$

$$= \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{16}\left(x + \sin 8x\right) + \frac{1}{8} \int \frac{\left(1-\sin^2 4x\right) \cdot \cos 4x d\left(\sin 4x\right)}{4\cos 4x} =$$

$$= \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{16}\left(x + \sin 8x\right) + \frac{1}{32}\left(\sin 4x - \frac{\sin^3 4x}{3} \right) + C.$$

Ответ: $\int \sin^4 2x \cdot \cos^2 2x dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x -$

$$-\frac{1}{16}\left(x + \sin 8x\right) + \frac{1}{32}\left(\sin 4x - \frac{\sin^3 4x}{3} \right) + C.$$

Задание 5. Найдите интегралы от иррациональных функций:

5.1. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x}} dx;$

5.2. $\int \frac{(2-x)dx}{x \cdot \sqrt{x+1}};$

5.3. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}};$

5.4. $\int \frac{dx}{x^3 \cdot \sqrt[3]{2-x^3}}.$

Решение

5.1. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x}} dx.$

В подобных интегралах избавиться от иррациональности можно, введя вместо переменной x новую переменную t. Эти переменные связаны равенством $x = t^p$, причём степень p должна быть такой, чтобы извлекались корни всех степеней, входящих в подынтегральную функцию.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x}}dx = \left| \begin{matrix} x = t^{12} \Rightarrow t = \sqrt[12]{x}, \\ dx = 12t^{11}dt \end{matrix} \right| = \int \frac{t^6 \cdot 12t^{11}}{t^8 + t^3}dt = 12\int \frac{t^{17}dt}{t^3(t^5+1)} =$$

$$= 12\int \frac{t^{14}dt}{t^5+1} = 12\int \left(t^9 - t^4 + \frac{t^4}{t^5+1} \right)dt = 12\int t^9 dt - 12\int t^4 dt +$$

$$+12\int \frac{t^4}{t^5+1} \cdot \frac{d\left(t^5+1\right)}{5t^4} = 12 \cdot \frac{t^{10}}{10} - 12 \cdot \frac{t^5}{5} + \frac{12}{5}\int \frac{d\left(t^5+1\right)}{t^5+1} + C =$$

$$= 1{,}2t^{10} - 2{,}4t^5 + 2{,}4\ln\left|t^5+1\right| + C =$$

$$= 1{,}2x\sqrt[12]{x^{10}} - 2{,}4\sqrt[12]{x^5} + 2{,}4\ln\left|\sqrt[12]{x^5}+1\right| + C.$$

Ответ: $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x}}dx = 1{,}2x\sqrt[12]{x^{10}} - 2{,}4\sqrt[12]{x^5} + 2{,}4\ln\left|\sqrt[12]{x^5}+1\right| + C.$

5.2. $$\int \frac{(2-x)dx}{x\cdot\sqrt{x+1}} = \left| \begin{matrix} x+1 = t^2 \Rightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow \\ dx = 2tdt, \quad t = \sqrt{x+1} \end{matrix} \right| = \int \frac{\left(2 - t^2 + 1\right)\cdot 2tdt}{\left(t^2-1\right)\cdot t} =$$

$$= -2\int \frac{t^2-3}{t^2-1}dt = -2\int \frac{\left(t^2-1\right)-2}{t^2-1}dt = -2\int \frac{t^2-1}{t^2-1}dt + 4\int \frac{dt}{t^2-1}dt =$$

$$= -2\int dt + 4\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = -2t + 2\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C =$$

$$= -2\sqrt{x+1} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C.$$

Ответ: $\int \frac{(2-x)dx}{x\cdot\sqrt{x+1}} = -2\sqrt{x+1} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C.$

5.3. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

Интегралы, содержащие радикалы вида $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ можно найти, используя следующие тригонометрические подстановки $x = a\sin t$, $x = a\,\mathrm{tg}\,t$ и $x = \frac{a}{\cos t}$, соответственно.

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left| \begin{aligned} & x = 2\sin t \Rightarrow \\ & dx = 2\cos t dt, \\ & t = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned} \right| = \int \frac{4\sin^2 t \cdot 2\cos t dt}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} = \frac{8}{2}\int \frac{\sin^2 t \cdot \cos t dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} =$$

$$= 4\int \frac{\sin^2 t \cdot \cos t dt}{\cos t} = 4\int \sin^2 t dt = 4\int \frac{1-\cos 2t}{2} dt = 2\int (1-\cos 2t) dt =$$

$$= 2\int dt - 2\int \cos 2t \cdot \frac{d(2t)}{2} = 2t - \int \cos 2t d(2t) + C = 2t - \sin 2t + C =$$

$$= 2\arcsin\frac{x}{2} - -\sin 2\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

Ответ: $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}} = 2\arcsin\frac{x}{2} - \sin 2\left(\frac{x}{2}\right) + C.$

5.4. $\int \frac{dx}{x^3 \cdot \sqrt[3]{2-x^3}} = \int x^{-3}\left(2-x^3\right)^{\frac{-1}{3}} dx.$

Интегрирование дифференциальных биномов, т.е. интегралов вида

$$\int x^m \left(ax^n + b\right)^p dx$$

возможно только в трёх случаях с помощью подстановок Чебышева:

1. p –целое число (подстановка $x = t^s$, где s – общий знаменатель дробей n и m);

2. $\frac{m+1}{n}$ – целое число (подстановка $ax^n + b = t^s$, где s –знаменатель дроби p);

3. $\frac{m+1}{n} + p$ – целое число (подстановка $\frac{ax^n + b}{x^n} = t^s$, где s – знаменатель дроби p).

Если числа m, n, p и их указанные комбинации не удовлетворяют ни одному из случаев, то интеграл от данного дифференциального бинома является «неберущимся», т.е. не выражается в элементарных функциях.

В нашем случае $m = -3$, $n = 3$, $p = -\frac{1}{3}$ и $\frac{m+1}{n} + p = -1$ целое число. Поэтому для вычисления интеграла используем подстановку 3).

$$\int x^{-3}(2-x)^{\frac{-1}{3}}dx=\left|\begin{array}{l}\dfrac{2-x^3}{x^3}=t^3\Rightarrow\\ x^3=2\left(t^3+1\right)^{-1}\Rightarrow x=\sqrt[3]{2}\left(t^3+1\right)^{\frac{-4}{3}}\Rightarrow\\ dx=-\sqrt[3]{2}\cdot t^2\left(t^3+1\right)^{\frac{-4}{3}}dt\Rightarrow\\ \left(2-x^3\right)^{\frac{-1}{3}}=t^{-1}\left(\sqrt[3]{2}\right)^{-1}\left(t^3+1\right)^{\frac{1}{3}}\end{array}\right|=$$

$$=-\int\sqrt[3]{2}\cdot t^2\cdot\left(t^3+1\right)^{\frac{-4}{3}}\cdot 2^{-1}\cdot\left(t^3+1\right)\cdot t^{-1}\cdot 2^{\frac{-1}{3}}\cdot\left(t^3+1\right)^{\frac{1}{3}}\cdot dt=$$

$$=-\int\frac{t}{2}dt=-\frac{t^2}{4}+C=-\frac{\sqrt[3]{\left(2-x^3\right)^2}}{4x^2}+C.$$

Ответ: $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3\cdot\sqrt[3]{2-x^3}}=-\frac{\sqrt[3]{\left(2-x^3\right)^2}}{4x^2}+C.$

Задание 6. Найдите интегралы, используя различные приёмы интегрирования:

6.1. $\displaystyle\int\frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$;

6.2. $\displaystyle\int\frac{e^x+3}{e^{2x}-1}dx$;

6.3. $\displaystyle\int\frac{2x^4+x^3-3x^2+\sqrt[3]{x}}{2x^3}dx$;

6.4. $\int\cos\sqrt{x}dx$;

6.5. $\displaystyle\int\frac{dx}{e^x+4}$.

Решение

6.1. $\displaystyle\int\frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$.

В интеграле $\displaystyle\int\frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$ подынтегральная функция содержит квадратный трёхчлен. Поэтому для его нахождения необходимо сначала выделит в квадратном трёхчлене полный квадрат, а затем ввести новую переменную (см. задание 3 п. 3.1).

$$\int\frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}=\left|\begin{matrix}x^2-6x+10=(x-3)^2+1\\ x-3=t\Rightarrow x=t+3\Rightarrow dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{2(t+3)-1}{\sqrt{t^2+1}}dt=$$

$$=\int\frac{2t+5}{\sqrt{t^2+1}}dt=\int\frac{2tdt}{\sqrt{t^2+1}}+5\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=\int\frac{2t}{\sqrt{t^2+1}}\cdot\frac{d\left(t^2+1\right)}{2t}+\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=$$

$$=\int\frac{d\left(t^2+1\right)}{\sqrt{t^2+1}}+\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=2\sqrt{t^2+1}+\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C=$$

$$=2\sqrt{(x-3)^2+1}+\ln\left|x-3+\sqrt{(x-3)^2+1}\right|+C.$$

Ответ: $\int\frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}=2\sqrt{(x-3)^2+1}+\ln\left|x-3+\sqrt{(x-3)^2+1}\right|+C.$

6.2. $\int\frac{e^x+3}{e^{2x}-1}dx.$

Интеграл $\int\frac{e^x+3}{e^{2x}-1}dx$ сводится к интегралу от рациональной функции в результате замены переменной:

$$\int\frac{e^x+3}{e^{2x}-1}dx=\left|\begin{matrix}e^x=t\Rightarrow x=\ln t\Rightarrow\\ dx=\dfrac{dt}{t}\end{matrix}\right|=\int\frac{t+3}{t^2-1}\cdot\frac{dt}{t}=\int\frac{t+3}{t^2-1}\cdot\frac{dt}{t}=$$

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{t+3}{t(t-1)(t+1)}=\dfrac{A}{t}+\dfrac{B}{t-1}+\dfrac{C}{t+1}=\\ =\dfrac{A(t-1)(t+1)+Bt(t+1)+Ct(t-1)}{t(t-1)(t+1)};\\ t+3=A(t-1)(t+1)+Bt(t+1)+Ct(t-1)\\ \quad t=0:\quad A=-3\\ \quad t=1:\quad B=2\\ \quad t=-1:\ C=1\end{array}\right|$$

$$-3\int\frac{dt}{t}+2\int\frac{dt}{t-1}+\int\frac{dt}{t+1}=-3\ln|t|+2\ln|t-1|+\ln|t+1|+C=$$

$$=-3\ln\left|e^x\right|+2\ln\left|e^x-1\right|+\ln\left|e^x+1\right|+C.$$

Ответ: $\int \frac{e^x+3}{e^{2x}-1}dx = -3\ln\left|e^x\right| + 2\ln\left|e^x-1\right| + \ln\left|e^x+1\right| + C.$

6.3. $\int \frac{2x^4+x^3-3x^2+\sqrt[3]{x}}{2x^3}dx = \int \frac{2x^4}{2x^3}dx + \int \frac{x^3}{2x^3dx} - \int \frac{3x^2}{x^3}dx + \int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^3}dx =$

$$= \int xdx + \frac{1}{2}\int dx - 3\int \frac{dx}{x} + \int x^{\frac{-8}{3}}dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 3\ln|x| + \frac{x^{\frac{-5}{3}}}{\frac{-5}{3}} + C.$$

Ответ: $\int \frac{2x^4+x^3-3x^2+\sqrt[3]{x}}{2x^3}dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 3\ln|x| - \frac{3x^{\frac{-5}{3}}}{5} + C.$

6.4. $\int \cos\sqrt{x}dx.$

Интеграл $\int \cos\sqrt{x}dx$ в результате заменой переменной сводится к интегралу, для нахождения которого необходимо применить формулу интегрирования по частям.

$$\int \cos\sqrt{x}dx = \begin{vmatrix} x = t^2 \Rightarrow \\ dx = 2tdt \\ t = \sqrt{x} \end{vmatrix} = 2\int t\cos tdt = \begin{vmatrix} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = \cos tdt \Rightarrow v = \sin t \end{vmatrix} =$$

$$= 2t\sin t - 2\int \sin tdt = 2t\sin t + 2\cos t + C = 2\sqrt{x}\cdot\sin\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + C.$$

Ответ: $\int \cos\sqrt{x}dx = 2\sqrt{x}\cdot\sin\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + C.$

6.5. $\int \frac{dx}{e^x+4}.$

Интеграл $\int \frac{dx}{e^x+4}$ также как и п. 6.2 сводится к интегралу от рациональной функции после замены переменной.

$$\int \frac{dx}{e^x+4} = \begin{vmatrix} e^x = t \Rightarrow x = \ln t \Rightarrow \\ dx = \frac{dt}{t} \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t(t+4)} = \int \frac{dt}{t^2+4t} = \int \frac{dt}{(t+2)^2-4} =$$

$$= \int \frac{d(t+2)}{(t+2)^2-4} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+2-2}{t+2+2}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t}{t+4}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{e^x}{e^x+4}\right| + C.$$

Ответ: $\int \frac{dx}{e^x+4}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{e^x}{e^x+4}\right|+C.$

Методические указания к решению индивидуального задания № 2

Индивидуальное задание № 2 соответствует теме «Определённый интеграл» теоретического раздела дисциплины. Каждый вариант содержит 15 заданий, решение которых позволит освоить понятие определенного интеграла и его приложения для вычисления различных геометрических величин.

Внешняя общность записи определённого и неопределённого интегралов подчёркивает тесную связь между ними. Однако у них есть принципиальное различие, а именно, *определенный интеграл* – это число, *неопределенный интеграл* – это множество функций.

Формула Ньютона-Лейбница даёт основной способ вычисления определённых интегралов и позволяет находить определённый интеграл, обходя суммирование, при помощи первообразных функций. Она имеет смысл только, когда отрезок интегрирования конечный, а подынтегральная функция ограничена на этом отрезке. Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, формулу Ньютона-Лейбница использовать нельзя.

В связи с необходимостью распространения понятия определённого интеграла на случаи бесконечного промежутка интегрирования и разрывной подынтегральной функции вводятся несобственные интегралы (1-го и 2-го родов).

Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 2

Вариант 0

Задание 1. Вычислите определённые интегралы:

1.1. $\int\limits_{-2}^{0}\left(x^2-x\right)\cos 5x dx$;

1.2. $\int\limits_{0}^{1}\frac{\left(x^3+1\right)dx}{\left(x^4+4x+1\right)^2}$;

1.3. $\int\limits_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$;

1.4. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}3} \dfrac{\operatorname{tg}x-5}{2-\sin 2x+4\cos^2 x}dx$;

1.5. $\int\limits_{-3}^{4} f(x)dx$, $f(x)=\begin{cases}-3, & x\le 0,\\ \sqrt{x}, & 0<x\le 1,\\ 3x-4, & x>1.\end{cases}$

Решение

1.1. $\int\limits_{-2}^{0}\left(x^2-x\right)\cos 5x dx$.

Подынтегральная функция представляет собой произведение многочлена второй степени на тригонометрическую функцию, следовательно, для вычисления данного интеграла необходимо применить формулу интегрирования по частям два раза:

$$\int\limits_{-2}^{0}\left(x^2-x\right)\cos 5x dx=\left|\begin{matrix}u=x^2-x \Rightarrow du=\left(2x-1\right)dx\\ dv=\cos 5x dx \Rightarrow v=\int\cos 5x dx=\frac{1}{5}\sin 5x\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{x^2-x}{5}\sin 5x\Big|_{-2}^{0}-\frac{1}{5}\int\limits_{-2}^{0}(2x-1)\sin 5x dx=\left|\begin{matrix}u=2x-1 \Rightarrow du=2dx\\ dv=\sin 5x dx \Rightarrow v=-\frac{1}{5}\cos 5x\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{x^2-x}{5}\sin 5x\Big|_{-2}^{0}-\frac{1}{5}\left(-\frac{2x-1}{5}\cos 5x\Big|_{-2}^{0}+\frac{2}{5}\int\limits_{-2}^{0}\cos 5x dx\right)=$$

$$=0-\frac{\left(-2\right)^2+2}{5}\sin\left(-10\right)+\frac{2x-1}{25}\cos 5x\Big|_{-2}^{0}-\frac{2}{125}\sin 5x\Big|_{-2}^{0}=$$

$$=\frac{6}{5}\sin 10+\frac{-1}{25}-\frac{-4-1}{25}\cos\left(-10\right)-\frac{2}{125}\left(\sin 0-\sin\left(-10\right)\right)=$$

$$=\frac{6}{5}\sin 10-\frac{1}{25}+\frac{5}{25}\cos 10-\frac{2}{125}\sin 10=\frac{148}{125}\sin 10+\frac{1}{5}\cos 10-\frac{1}{25}.$$

1.2. $\int\limits_0^1\dfrac{\left(x^3+1\right)dx}{\left(x^4+4x+1\right)^2}$.

Для вычисления этого интеграла используем метод подведения под знак дифференциала:

$$\int_0^1 \frac{\left(x^3+1\right)dx}{\left(x^4+4x+1\right)^2} = \int_0^1 \frac{\left(x^3+1\right)d\left(x^4+4x+1\right)}{\left(x^4+4x+1\right)^2\left(x^4+4x+1\right)'} =$$

$$= \int_0^1 \frac{\left(x^3+1\right)d\left(x^4+4x+1\right)}{\left(x^4+4x+1\right)^2\left(4x^3+4\right)} = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{d\left(x^4+4x+1\right)}{\left(x^4+4x+1\right)^2} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^4+4x+1}\Bigg|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+4+1}-1\right) = \frac{5}{24}.$$

1.3. $\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$

Подынтегральная функция содержит выражение вида $f\left(x,\sqrt{1\pm x^2}\right)$, которое интегрируется с помощью соответствующих замен:

$$\int f\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)dx \Rightarrow x=\sin t,$$
$$\int f\left(x,\sqrt{1+x^2}\right)dx \Rightarrow x=\operatorname{tg} t, \quad .$$
$$\int f\left(x,\sqrt{x^2-1}\right)dx \Rightarrow x=\frac{1}{\cos t}.$$

Поэтому, используем замену переменных, исключающую иррациональность: $x=\operatorname{tg} t$. Тогда:

$$x=\operatorname{tg} t \Rightarrow \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t} = \sqrt{1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{1}{\cos t}; \quad dx=\frac{dt}{\cos^2 t}.$$

Находим новые пределы интегрирования:

$$0=\operatorname{tg} t \;\Rightarrow\; t_{\text{нижн.}}=0; \;\; 1=\operatorname{tg} t \;\Rightarrow\; t_{\text{верхн.}}=\pi/4.$$

Тогда:

$$\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{tg}^3 t}{\cos t}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^3 t}{\cos^6 t}\cdot\frac{d\cos t}{(-\sin t)}=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 t}{\cos^6 t}d\cos t=$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2 t}{\cos^6 t}d\cos t=-\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^6 t}-\frac{\cos^2 t}{\cos^6 t}\right)d\cos t=$$

$$=\frac{1}{5\cos^5 t}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{3\cos^3 t}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{5(\sqrt{2}/2)^5}-\frac{1}{5}-\frac{1}{3(\sqrt{2}/2)^3}+\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{2}+2}{15}.$$

1.4. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\mathrm{arctg}\,3}\frac{\mathrm{tg}\,x-5}{2-\sin 2x+4\cos^2 x}dx$.

Вычислим интеграл, используя подстановку:

$$\mathrm{tg}\,x=t\Rightarrow\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}};\ \ \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}};\ \ x=\mathrm{arctg}\,t\Rightarrow dx=\frac{dt}{1+t^2},$$

$$\sin 2x=2\sin x\cos x=2\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{2t}{1+t^2}.$$

Находим новые пределы:

$$\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=t\Rightarrow t_{\text{нижн.}}=1;\quad \mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,3)=t\Rightarrow t_{\text{верхн.}}=3.$$

Тогда:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\mathrm{arctg}3}\frac{\mathrm{tg}x-5}{2-2\sin x\cos x+4\cos^2 x}dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\mathrm{arctg}3}\frac{\mathrm{tg}x-5}{1-\sin x\cos x+2\cos^2 x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^3\frac{t-5}{1-\frac{t}{1+t^2}+\frac{2}{1+t^2}}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\int_1^3\frac{t-5}{\frac{1+t^2-t+2}{1+t^2}}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\int_1^3\frac{t-5}{t^2-t+3}dt=$$

Выделим в знаменателе полный квадрат и сделаем ещё одну замену переменных:

$$\left| \begin{array}{l} t^2 - t + 3 = t^2 - 2\cdot\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 3 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \\ t - \frac{1}{2} = z \Rightarrow t = z + \frac{1}{2} \Rightarrow dt = dz. \end{array} \right|$$

новые пределы интегрирования будут равны: $z_{\text{нижн.}} = 1/2,\ z_{\text{верхн.}} = 5/2.$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{z - 9/2}{z^2 + 11/4}dz = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{z}{z^2 + 11/4}dz - \frac{9}{4}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{1}{z^2 + \left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}dz =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left(z^2 + \frac{11}{4}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} - \frac{9}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2z}{\sqrt{11}}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{25}{4} + \frac{11}{4}\right) - \ln\left(\frac{1}{4} + \frac{11}{4}\right)\right) - \frac{9}{2\sqrt{11}}\left(\operatorname{arctg}\frac{5}{\sqrt{11}} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{11}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln 9 - \ln 3\right) - \frac{9}{2\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{\frac{5}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{11}}}{1 + \frac{5}{\sqrt{11}}\cdot\frac{1}{\sqrt{11}}} = \frac{1}{4}\ln 3 - \frac{9}{2\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{11}}{4}.$$

1.5. $\int\limits_{-3}^{4} f(x)dx$, $f(x) = \begin{cases} -3, & x \le 0, \\ \sqrt{x}, & 0 < x \le 1, \\ 3x - 4, & x > 1. \end{cases}$

Воспользуемся свойством аддитивности определённого интеграла:

$$\int\limits_{-3}^{4} f(x)dx = \int\limits_{-3}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{1} f(x)dx + \int\limits_{1}^{4} f(x)dx.$$

Тогда:

$$\int_{-3}^{4} f(x)\,dx = \int_{-3}^{0} (-3)\,dx + \int_{0}^{1} \sqrt{x}\,dx + \int_{1}^{4} (3x-4)\,dx =$$

$$= -3\int_{-3}^{0} dx + \int_{0}^{1} x^{\frac{1}{2}}dx + \int_{1}^{4} (3x-4)dx = -3x\Big|_{-3}^{0} + \left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_{0}^{1} + \left.\left(\frac{3}{2}x^2 - 4x\right)\right|_{1}^{4} =$$

$$= -3(0+3) + \frac{2}{3}(1-0) + \left(\frac{3}{2}\cdot 4^2 - 4\cdot 4\right) - \left(\frac{3}{2}\cdot 1^2 - 4\cdot 1\right) =$$

$$= -9 + \frac{2}{3} + 8 - \frac{3}{2} + 4 = \frac{13}{6}.$$

Задание 2. Вычислите площади фигур, ограниченных графиками функций.

2.1. $y = \dfrac{1}{1+\cos x}$, $y = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = -\dfrac{\pi}{2}$;

2.2. $\rho = \sin\varphi$, $\rho = \sqrt{3}\cos\varphi$;

2.3. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$ $y = 1$ $(y \ge 1)$.

Решение

2.1. $y = \dfrac{1}{1+\cos x}$, $y = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = -\dfrac{\pi}{2}$.

Построим фигуру, ограниченную линиями $y = \dfrac{1}{1+\cos x}$, $y = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ и $x = -\dfrac{\pi}{2}$. Это можно сделать по точкам, методами исследования поведения функций или с использованием любого графического приложения (см. рис. 1).

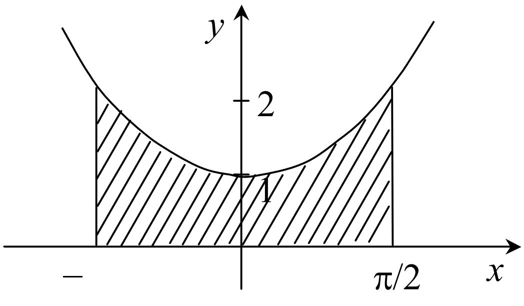

Рис. 1

Найдём площадь фигуры по формуле:

$$S=\int_a^b f(x)dx, \text{ где } f(x)=\frac{1}{1+\cos x},\ \ a=-\frac{\pi}{2} \text{ и } b=\frac{\pi}{2}.$$

Тогда:

$$S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos x}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\frac{-\pi}{4}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=2\ (\text{кв.ед.}).$$

2.2. $\rho=\sin\varphi,\ \ \rho=\sqrt{3}\cos\varphi.$

Данные уравнения определяют в полярной системе координат две окружности. Первое уравнение $\rho=\sin\varphi$ задаёт окружность с центром в точке $\left(\frac{1}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ и радиусом $r_1=\frac{1}{2}$. Второе уравнение $\rho=\sqrt{3}\cos\varphi$ задаёт окружность с центром в точке $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ и радиусом $r_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Построим окружности $\rho=\sin\varphi$ и $\rho=\sqrt{3}\cos\varphi$. Выделим их общую часть, площадь которой необходимо вычислить (рис. 2). Найдём площадь фигуры по формуле:

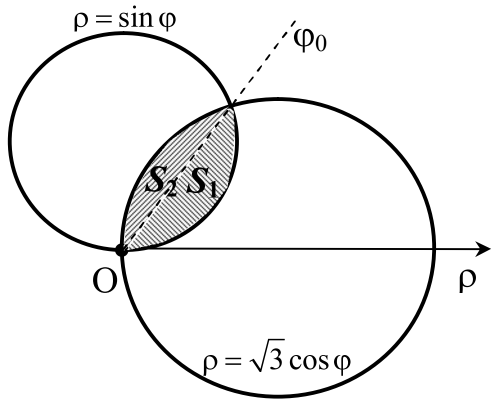

Рис. 2

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)d\varphi.$$

Заметим, что искомая площадь состоит из двух криволинейных секторов S_1 и S_2. Найдём φ_0 – угол, при котором пересекаются две окружности. Из равенства:

$$\sin\varphi=\sqrt{3}\cos\varphi\Rightarrow\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\sqrt{3}\ \Rightarrow\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3}\Rightarrow\varphi_0=\frac{\pi}{3}.$$

Тогда пределы интегрирования при вычислении площади первого сектора равны 0 и $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$; а второго сектора – $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{2}$. Таким образом, получаем:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{3}\cos\varphi\right)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos 2\varphi}{2} d\varphi + \frac{3}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{3}{4}\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sin 2\frac{\pi}{3}}{2} - 0\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2\frac{\pi}{2}}{2} - \frac{\pi}{3} - \frac{\sin 2\frac{\pi}{3}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right)(\text{кв.ед.}).$$

2.3. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases} \quad y = 1 \quad (y \geq 1).$

Заданные параметрические уравнения определяют кривую второго порядка эллипс с полуосями $a = 1$, $b = 2$. Построить данную кривую можно либо по точкам, либо с использованием любого графического приложения. Прямая $y = 1$ отсекает верхнюю часть эллипса S_1, площадь которой мы будем искать (см. рис. 3). Найдём точки пересечения прямой и эллипса:

$$2\sin t = 1 \Rightarrow \sin t = \frac{1}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{6}, \quad t_2 = \frac{5\pi}{6}.$$

Здесь t_1 соответствует точке x_1, t_2 соответствует точке x_2. Найдём площадь фигуры по формуле:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt .$$

Однако в этом случае мы получим площадь между кривой – эллипсом и осью OX, т.е. $S_1 + S_2$. Поэтому искомая площадь S_1 будет представлять собой разность $S - S_2$:

$$S_1 = \int_{t_1}^{t_2} y_1(t) x'(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} y_2(t) x'(t) dt ,$$

где $y_1(t) = 2\sin t,\ \ x(t) = \cos t,\ \ y^2(t) = 1,\ \ t_1 = \dfrac{\pi}{6},$ $t_2 = \dfrac{5\pi}{6}.$

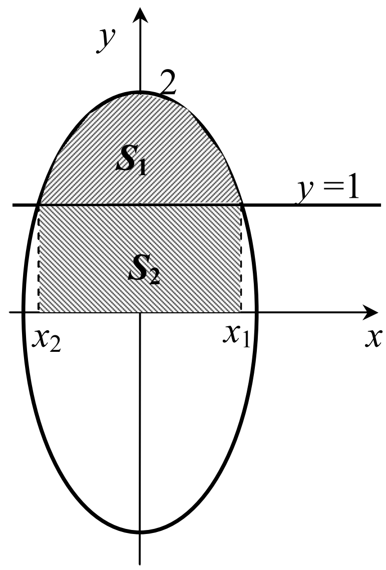

Рис. 3

Кроме того, заметим, что фигура $S_1 + S_2$ симметрична относительно оси OY. Поэтому вычислим площадь как удвоенный интеграл по половинному промежутку от $x_0 = 0$ до $x1 = \cos(\pi / 6)$. Из первого уравнения параметрической системы эллипса $x = \cos t$ найдем t_0, соответствующий x_0:

$$0 = \cos t \Rightarrow t_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда:

$$S_1 = S - S_2 = 2\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} 2\sin t(\cos t)' dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} 1 \cdot (\cos t)' dt \right) =$$

$$= 2\left(-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} 2\sin^2 t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \sin t dt \right) = 2\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 t dt - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt \right) =$$

$$= 2\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt + \cos t \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \right) = 2\left(\left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + \cos t \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \right) =$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin \pi - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{6} \right) + \cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{6} \right) = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) (\text{кв.ед.}).$$

В заключение отметим, что S_2 можно вычислить как площадь прямоугольника, но при этом не забывать, что вычисления будут проводиться в декартовой системе координат.

Задание 3. Вычислите длины дуг кривых, заданных уравнениями:

3.1. $y=\dfrac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}+3}{2}, \quad 0\le x\le 2$;

3.2. $\rho=2\sin\varphi, \quad 0\le\varphi\le\pi/6$;

3.3. $\begin{cases} x=\mathrm{e}^{t}\left(\cos t+\sin t\right), \\ y=\mathrm{e}^{t}\left(\cos t-\sin t\right), \end{cases} \quad \pi/6\le t\le\pi/4.$

Решение

3.1. $y=\dfrac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}+3}{2}, \quad 0\le x\le 2.$

Так как линия задана в декартовой системе координат в явном виде, длину дуги кривой найдем по формуле:

$$L=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx.$$

Производная функции $y'=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{4}$, тогда:

$$L=\int_0^2\sqrt{1+\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{2^2+e^{2x}-2+e^{-2x}}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{e^{2x}+2+e^{-2x}}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2\left(e^{x}+e^{-x}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)\Big|_0^2=\frac{1}{2}\left(e^{2}-e^{-2}\right)-\frac{1}{2}\left(e^{0}-e^{0}\right)=\frac{e^{2}-e^{-2}}{2}=sh2.$$

3.2. $\rho=2\sin\varphi, \quad 0\le\varphi\le\pi/6.$

Так как линия задана в полярной системе координат, длину дуги кривой найдём по формуле:

$$L=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2+\left(\rho'\right)^2}\,d\varphi.$$

Производная функции $\rho' = 2\cos\varphi$, тогда:

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\left(2\sin\varphi\right)^2 + \left(2\cos\varphi\right)^2}\, d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}\, d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi = \frac{\pi}{3}.$$

3.3. $\begin{cases} x = \mathrm{e}^t\left(\cos t + \sin t\right), \\ y = \mathrm{e}^t\left(\cos t - \sin t\right), \end{cases} \quad \pi/6 \le t \le \pi/4.$

Так как линия задана в декартовой системе координат параметрически, длину дуги кривой найдём по формуле:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(y_t'\right)^2 + \left(x_t'\right)^2}\, dt.$$

Производные функций:

$$x' = \mathrm{e}^t\left(\cos t + \sin t\right) + \mathrm{e}^t\left(-\sin t + \cos t\right) = 2\,\mathrm{e}^t\cos t,$$
$$y' = \mathrm{e}^t\left(\cos t - \sin t\right) + \mathrm{e}^t\left(-\sin t - \cos t\right) = -2\,\mathrm{e}^t\sin t.$$

Тогда:

$$L = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(2e^t\cos t\right)^2 + \left(-2e^t\sin t\right)^2}\, dt =$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} e^t\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\, dt = 2e^t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = 2\left(e^{\frac{\pi}{4}} - e^{\frac{\pi}{6}}\right).$$

Задание 4. Вычислите объёмы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = 4x - x^2$, $y = 4 - x$:

4.1. вокруг Ox;

4.2. вокруг Oy.

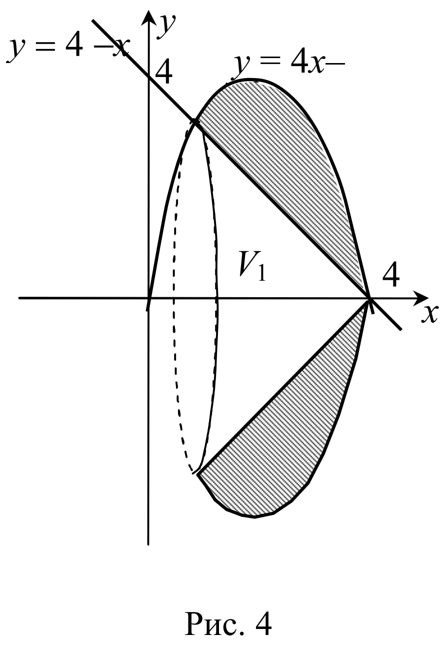

Рис. 4

Решение

4.1. $y = 4x - x^2$, $y = 4 - x$ вокруг Ox.

Построим фигуру вращения – пересечение функций $y=4x-x^2$ и $y=4-x$ вращаем вокруг Ox (рис. 4). Найдём абсциссы точек пересечения двух линий:

$$4x-x^2=4-x \Rightarrow (4-x)x-(4-x)=0 \Rightarrow$$

$$(4-x)(x-1)=0 \Rightarrow x_1=4;\ x_2=1.$$

Объём фигуры вращения, ограниченной линией $y=(x)$ находим по формуле:

$$V_{Ox}=\pi\int_{x_1}^{x_2} y^2(x)dx.$$

В нашем случае, фигура полая, т.е. из объёма фигуры, образованной кривой $y=4x-x^2$ надо удалить объём V_1 фигуры, образованной линией $y=4-x$. Тогда:

$$V=\pi\int_1^4\left(4x-x^2\right)^2dx-\pi\int_1^4(4-x)^2dx=\pi\int_1^4\left[\left(4x-x^2\right)^2-(4-x)^2\right]dx=$$

$$=\pi\int_1^4\left[16x^2-8x^3+x^4-16+8x-x^2\right]dx=\pi\left[\frac{x^5}{5}-2x^4+5x^3+4x^2-16x\right]_1^4=$$

$$=\pi\left[\frac{4^5}{5}-2\cdot4^4+5\cdot4^3+4\cdot4^2-16\cdot4\right]-\pi\left[\frac{1^5}{5}-2\cdot1^4+5\cdot1^3+4\cdot1^2-16\cdot1\right]=$$

$$=\pi\left[\frac{4^3}{5}+\frac{44}{5}\right]=\frac{108}{5}\pi\ (\text{куб.ед.}).$$

4.2. $y=4x-x^2$, $y=4-x$ вокруг Oy.

1-ый способ. Построим фигуру вращения – пересечение функций $y=4x-x^2$ и $y=4-x$ вращаем вокруг Oy (рис. 5). В этом случае объём фигуры вращения, ограниченной линией $x=x(y)$ находим по формуле:

$$V_{Oy}=\pi\int_{y_1}^{y_2} x^2(y)dx.$$

Найдём ординаты точек пересечения двух линий. Так как абсциссы мы нашли $x_1=4; x_2=1$, то ординаты

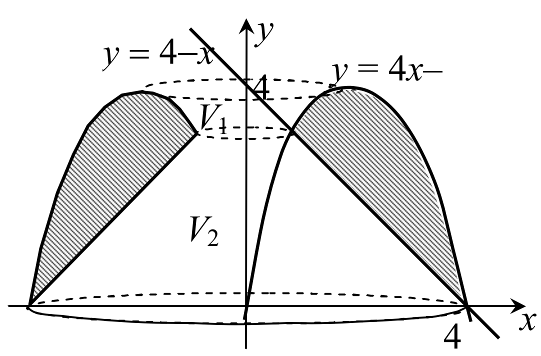

Рис. 5

находим подстановкой x_1 и x_2 в любое уравнение линий, например, в уравнение прямой: $y_1 = 4-4=0$, $y_2 = 4-1=3$. Выразим обратные функции $x = x(y)$:

$$y = 4x - x^2 \Rightarrow y = -\left(\underbrace{x^2-4x+4}_{(x-2)^2}-4\right) = -(x-2)^2+4 \Rightarrow$$

$$(x-2)^2 = 4-y \Rightarrow x-2 = \pm\sqrt{4-y} \Rightarrow$$

$x = 2 \pm \sqrt{4-y}$ – правая и левая ветвь параболы,

$y = 4-x \Rightarrow x = 4-y$ – уравнение прямой.

Фигура полая, т. е. из объема фигуры, образованной правой ветвью $x = 2+\sqrt{4-y}$ надо удалить объём V_2 фигуры, образованной прямой $x = 4-y$. Тогда:

$$\overline{V_{Oy}} = \pi\int_0^3\left[\left(2+\sqrt{4-y}\right)^2-(4-y)^2\right]dy.$$

Однако, фигура, образующая тело вращения, достигает своего наибольшего значения в вершине параболы $(y_0 = 4)$. На промежутке от $y=3$ до $y=4$ фигура вращения формируется за счёт правой и левой ветвей параболы. Фигура полая, следовательно, из объёма фигуры, образованной правой ветвью $x = 2+\sqrt{4-y}$ надо удалить объём V_1 фигуры, образованной левой ветвью $x = 2-\sqrt{4-y}$. Тогда:

$$\overline{\overline{V_{Oy}}} = \pi\int_3^4\left[\left(2+\sqrt{4-y}\right)^2-\left(2-\sqrt{4-y}\right)^2\right]dy.$$

Таким образом, фигура вращения вокруг Oy состоит из двух частей $\overline{V_{Oy}}$ и $\overline{\overline{V_{Oy}}}$, и искомый объём есть сумма $\overline{V_{Oy}} + \overline{\overline{V_{Oy}}}$.

$$\overline{V_{Oy}}+\overline{\overline{V_{Oy}}}=\pi\int_0^3\left[\left(2+\sqrt{4-y}\right)^2-(4-y)^2\right]dy+$$

$$+\pi\int_3^4\left[\left(2+\sqrt{4-y}\right)^2-\left(2-\sqrt{4-y}\right)^2\right]dy=\pi\int_0^3\left[4\sqrt{4-y}-8+7y-y^2\right]dy+$$

$$+\pi\int_3^4 8\sqrt{4-y}dy=\pi\left[-\frac{8}{3}(4-y)^{\frac{3}{2}}-8y+\frac{7}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right]_0^3-$$

$$-\frac{8\pi\cdot 2}{3}(4-y)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_3^4=\pi\left(\frac{56}{3}-\frac{3}{2}\right)+\frac{16\pi}{3}=22.5\pi\ (\text{куб.ед.}).$$

2-ой способ. Чтобы не разбивать фигуру вращения на элементарные (образованные только двумя – внешней и внутренней граничными функциями), для вычисления объема V_{Oy} можно использовать другую формулу:

$$V_{Oy}=2\pi\int_{x_1}^{x_2}x\cdot y(x)\,dx\,.$$

При этом необходимо учитывать, что фигура полая, т.е. не забываем вычесть объём полости. Тогда:

$$V_{Oy}=2\pi\int_1^4 x\cdot\left(4x-x^2\right)dx-2\pi\int_1^4 x\cdot(4-x)\,dx=$$

$$=2\pi\int_1^4 x\cdot[\left(4x-x^2\right)-(4-x)]dx=2\pi\int_1^4[5x^2-x^3-4x]dx=$$

$$=2\pi\left[\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_1^4=2\pi\left[11+\frac{1}{4}\right]=22.5\pi\ (\text{куб.ед.}).$$

Задание 5. Исследуйте на сходимость несобственные интегралы:

5.1. $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2(x+1)}$;   5.2. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{tg}x\,dx}{\left(1+\sin\sqrt[3]{x^4}\right)^5-1}$.

Решение

5.1. $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2(x+1)}$.

Это несобственный интеграл I рода. Для исследования сходимости применим предельный признак сравнения. Функция $g(x)=\dfrac{1}{x\ln^2(x)}$ эквивалентна подынтегральной функции $f(x)=\dfrac{1}{x\ln^2(x+1)}$ при $x\to\infty$, так как:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\ln^2(x)}{x\ln^2(x+1)}=1.$$

Поэтому, исследуем сходимость интеграла для функции $g(x)=\dfrac{1}{x\ln^2(x)}$, а согласно признаку сходимости, интеграл от функции $f(x)=\dfrac{1}{x\ln^2(x+1)}$ будет вести себя так же. По определению:

$$\int_2^\infty\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{a\to\infty}\int_2^a\frac{dx}{x\ln^2 x}=-\lim_{a\to\infty}\frac{1}{\ln x}\Bigg|_2^a=-0+\frac{1}{\ln 2}=\mathrm{const}\Rightarrow$$

интеграл от функции $g(x)$ сходится $\Rightarrow$ по предельному признаку сходимости. Исходный интеграл тоже сходится.

Замечание.

- Поскольку мы применили признак сравнения для исходного интеграла и вычислили значение интеграла для эквивалентной функции, нельзя утверждать, что значение исходного интеграла равно $\dfrac{1}{\ln 2}$. Можно лишь утверждать, что исходный интеграл сходится.
- Вместо предельного признака сравнения можно было использовать 1-ый признак сравнения, т. е. подобрать бóльшую функцию $g(x)\ge f(x)$, интеграл от которой будет сходиться.

5.2. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{tg}x\,dx}{\left(1+\sin\sqrt[3]{x^4}\right)^5-1}.$

Это несобственный интеграл II рода, так как подынтегральная функция имеет на отрезке интегрирования точку разрыва II рода $x_0=0$. Для исследования сходимости применим предельный признак сравнения. Используя эквивалентные бесконечно малые, найдём эквивалент для подынтегральной функции при $x \to 0$:

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\left(1+\sin\sqrt[3]{x^4}\right)^5 - 1} \sim \frac{x}{5\sqrt[3]{x^4}} = \frac{1}{5x^{\frac{1}{3}}}.$$

Исследуем сходимость интеграла для функции $g(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$. Согласно признаку сходимости, интеграл от функции $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\left(1+\sin\sqrt[3]{x^4}\right)^5 - 1}$ будет вести себя так же. По определению:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} = \lim_{\mu\to 0} \int_{-1}^{0-\mu} \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} + \lim_{\eta\to 0} \int_{0+\eta}^{1} \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Исследуем каждый интеграл отдельно. Если хотя бы один из интегралов расходится, то весь интеграл расходится

$$\lim_{\mu\to 0} \int_{-1}^{0-\mu} \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} = \lim_{\mu\to 0} \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_{-1}^{0-\mu} = \frac{3}{2}\left(0 - (-1)^{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{3}{2} = \mathrm{const} \Rightarrow$$

интеграл сходится;

$$\lim_{\eta\to 0} \int_{0+\eta}^{1} \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} = \lim_{\eta\to 0} \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_{0+\eta}^{1} = \frac{3}{2}(1^{\frac{2}{3}} - 0) = \frac{3}{2} = \mathrm{const} \Rightarrow$$

интеграл сходится. Таким образом, оба интеграла сходятся, следовательно, исходный интеграл сходится согласно предельному признаку сравнения.

Решение типового варианта
и образец оформления индивидуального задания № 3

Вариант 0

1. Найдите общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными

1.1. $5xdx + ydy = 3x^2ydy - xy^2dx;$ 1.2. $\sqrt{2-3y^2} - yy'\sqrt{16-x^2} = 0.$

2. Найдите общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка

2.1. $3y' = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{8y}{x} - 4;$ 2.2. $xy' = \dfrac{3y^3 - 10yx^2}{y^2 + x^2}.$

3. Найдите общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка

3.1. $y' + \dfrac{xy}{2(1-x^2)} = \dfrac{x}{2};$ 3.2. $2(\cos^2 y \cdot \cos 2y - x)y' = \sin 2y.$

4. Найдите общее решение уравнения Бернулли

$$8xy' - 12y = -(5x^2 + 3)y^3.$$

5. Найдите общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах

$$xe^{y^2}dx + (x^2ye^{y^2} + \operatorname{tg} y)dy = 0.$$

6. Решите задачу Коши

6.1. $y' + \dfrac{y}{2x} = x^2, y(1) = 1;$ 6.2. $y' \operatorname{ctg} x - y = 2, y(0) = 2;$

6.3. $y^2 + x^2y' = xyy', y(1) = 1.$

7. Определите тип дифференциального уравнения первого порядка и укажите метод его решения

7.1. $y(3-x^2)y' = 1 + y^2;$ 7.2. $xy' = y\left(1 + \ln\dfrac{y}{x}\right);$

7.3. $\left(\sin 2x - 2\cos(x+y)\right)dx - 2\cos(x+y)dy = 0;$ 7.4. $y' = \dfrac{y}{x+y^2}.$

Решение

1. Найдите общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными

$$1.1.\ 5xdx + ydy = 3x^2ydy - xy^2dx;$$

Перенесем слагаемое, содержащее dx из правой части уравнения в левую, а слагаемое с dy – из левой части в правую:

$$5xdx + xy^2dx = 3x^2ydy - ydy.$$

Вынесем общие множители за скобки

$$xdx(5 + y^2) = ydy(3x^2 - 1)$$

Разделим обе части уравнения на выражение $(5 + y^2)(3x^2 - 1)$:

$$\frac{xdx}{3x^2 - 1} = \frac{ydy}{y^2 + 5}.$$

Интегрируя обе части уравнения получаем:

$$\int \frac{xdx}{3x^2 - 1} = \int \frac{ydy}{y^2 + 5} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{6}\int \frac{d(3x^2 - 1)}{3x^2 - 1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(y^2 + 5)}{y^2 + 5} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{6}\ln\left|3x^2 - 1\right| = \frac{1}{2}\ln\left|y^2 + 1\right| + C \text{ или } \ln\left|3x^2 - 1\right| = 3\ln\left|y^2 + 1\right| + 6C.$$

Ответ: $\ln\left|3x^2 - 1\right| = 3\ln\left|y^2 + 1\right| + 6C.$

$$1.2.\ \sqrt{2 - 3y^2} - yy'\sqrt{16 - x^2} = 0$$

Выразим производную неизвестной функции y' через дифференциалы переменных $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и умножим обе части уравнения на dx:

$$\sqrt{2 - 3y^2}dx - y\sqrt{16 - x^2}dy = 0.$$

Разделим обе части уравнения на выражение $\sqrt{2 - 3y^2} \cdot \sqrt{16 - x^2}$:

$$\frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}} - \frac{ydy}{\sqrt{2 - 3y^2}} = 0.$$

Интегрируя обе части уравнения получим общий интеграл уравнения:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}} - \int \frac{ydy}{\sqrt{2 - 3y^2}} = 0 \Rightarrow \arcsin\frac{x}{4} + \frac{1}{6} \cdot 2\sqrt{2 - 3y^2} + C = 0.$$

Ответ: $\arcsin\frac{x}{4}+\frac{1}{3}\sqrt{2-3y^2}+C=0.$

2. Найдите общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка

$$2.1.\ 3y'=\frac{y^2}{x^2}-\frac{8y}{x}-4;$$

Данное уравнение является однородным дифференциальным уравнением так как его правая часть является однородной функцией нулевого измерения :

$$f(\alpha x;\alpha y)=\frac{(\alpha y)^2}{(\alpha x)^2}-\frac{8\alpha y}{\alpha x}-4==\frac{y^2}{x^2}-\frac{8y}{x}-4=f(x;y).$$

С помощью подстановки $y=t(x)\cdot x$, $y'=t'\cdot x+t$ исходное уравнение преобразуется к уравнению с разделяющимися переменными:

$$t'x+t=\frac{t^2x^2}{3x^2}-\frac{8tx}{3x}-4\Rightarrow$$

$$t'x+t=\frac{t^2}{3}-\frac{8t}{3}-4\Rightarrow$$

$$t'x=\frac{t^2}{3}-\frac{11t}{3}-4\Rightarrow$$

$$\frac{dt}{dx}\cdot x=\frac{t^2-11t-12}{3}.$$

В последнем уравнении разделим переменные:

$$\frac{dt}{t^2-11t-12}=\frac{dx}{3x}.$$

Вычислим отдельно интеграл от левой и правой частей уравнения:

$$\int\frac{dx}{3x}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x}=\frac{1}{3}\ln|x|+C,$$

$$\int\frac{dt}{t^2-11t-12}=\int\frac{dt}{(t-5,5)^2-42,25}=$$

$$=\int\frac{d(t-5,5)}{(t-5,5)^2-(6,5)^2}=\frac{1}{2\cdot 6,5}\ln\left|\frac{t-5,5-6,5}{t-5,5+6,5}\right|+C=\frac{1}{13}\ln\left|\frac{t-12}{t+1}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{13}\ln\left|\frac{(y/x)-12}{(y/x)+1}\right|+C.$$

Приравнивая полученные результаты получим общий интеграл уравнения :

$$\frac{1}{3}\ln|x|+C=\frac{1}{13}\ln\left|\frac{({}^{y}\!/_{x})-12}{({}^{y}\!/_{x})+1}\right|.$$

Ответ: $\frac{1}{3}\ln|x|+C=\frac{1}{13}\ln\left|\frac{({}^{y}\!/_{x})-12}{({}^{y}\!/_{x})+1}\right|.$

$$2.2.\ xy'=\frac{3y^3-10yx^2}{y^2+x^2}.$$

Приведем это уравнение к виду $y'=f(x;y)$. Для этого обе части уравнения разделим на x:

$$y'=\frac{3y^3-10yx^2}{x(y^2+x^2)}.$$

Данное уравнение является однородным дифференциальным уравнением так как его правая часть является однородной функцией нулевого измерения:

$$f(\alpha x;\alpha y)=\frac{3(\alpha y)^3-10\alpha y\cdot(\alpha x)^2}{\alpha x\cdot(\alpha y)^2+(\alpha x)^3}=\frac{3y^3-10yx^2}{x\cdot y^2+x^3}=f(x;y).$$

С помощью подстановки $y=t(x)\cdot x$, $y'=t'\cdot x+t$ уравнение преобразуется к уравнению с разделяющимися переменными:

$$t'x+t=\frac{3t^3-10t}{t^2+1}.$$

Перенесем t из левой части уравнения в правую и приведем к общему знаменателю:

$$t'x=\frac{3t^3-10t}{t^2+1}-t\Rightarrow$$

$$t'x=\frac{3t^3-10t-t^3-t}{t^2+1}\Rightarrow$$

$$t'x=\frac{2t^3-11t}{t^2+1}\Rightarrow$$

$$\frac{dt}{dx}\cdot x=\frac{2t^3-11t}{t^2+1}.$$

Разделим переменные в последнем уравнении:

$$\frac{(t^2+1)dt}{2t^3-11t}=\frac{dx}{x}..$$

Проинтегрируем отдельно левую и праву часть полученного уравнения:

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C.$$

$$\int\frac{(t^2+1)dt}{2t^3-11t}=\left|\begin{array}{l}\dfrac{t^2+1}{t(2t^2-11)}=\dfrac{A}{t}+\dfrac{Bt+C}{2t^2-11}=\dfrac{A(2t^2-11)+t(Bt+C)}{t(2t^2-11)}\Rightarrow\\ t^2:2A+B=1, B=\dfrac{13}{11};\\ t:C=0;\\ t^0:-11A=1, A=-\dfrac{1}{11};\\ \dfrac{t^2+1}{t(2t^2-11)}=-\dfrac{1}{11t}+\dfrac{13}{11}\cdot\dfrac{1}{2t^2-11}\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{1}{11}\int\frac{dt}{t}+\frac{13}{22}\int\frac{dt}{t^2-5{,}5}=-\frac{1}{11}\ln|t|+\frac{13}{22}\cdot\frac{1}{2\sqrt{5{,}5}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{5{,}5}}{t+\sqrt{5{,}5}}\right|+C;$$

Приравняем полученные результаты и вернемся к старой переменной $\left(t=\dfrac{y}{x}\right)$. В итоге получаем

$$-\frac{1}{11}\ln\left|\frac{y}{x}\right|+\frac{13}{22}\cdot\frac{1}{2\sqrt{5{,}5}}\ln\left|\frac{y-x\sqrt{5{,}5}}{y+x\sqrt{5{,}5}}\right|=\ln|x|+C.$$

Ответ: $-\dfrac{1}{11}\ln\left|\dfrac{y}{x}\right|+\dfrac{13}{22}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{5{,}5}}\ln\left|\dfrac{y-x\sqrt{5{,}5}}{y+x\sqrt{5{,}5}}\right|=\ln|x|+C.$

3. Найдите общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$3.1.\ \ y'+\frac{xy}{2(1-x^2)}=\frac{x}{2};$$

Данное уравнение является линейным, так как содержит неизвестную функцию y и ее производную y' в первой степени и не содержит их произведения. Для решения уравнения применим метод подстановки. Будем искать решение уравнения в виде произведения двух функций

$u(x)$ и $v(x)$ т.е. $y = u(x)\cdot v(x)$. Тогда $y' = u'v + uv'$. Подставим y и y' в исходное уравнение и получим:

$$u'v + uv' + \frac{xuv}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}.$$

Сгруппируем второе и третье слагаемые и вынесем общий множитель за скобку:

$$u'v + u\left(v' + \frac{xv}{2(1-x^2)}\right) = \frac{x}{2}.$$

Так как одна из неизвестных функций может быть выбрана произвольно, в качестве v берут любое частное решение уравнения

$$v' + \frac{xv}{2(1-x^2)} = 0.$$

Тогда функция u находится из уравнения

$$u'v = \frac{x}{2}.$$

Оба уравнения являются уравнениями с разделяющимися переменными. Решим первое уравнение и найдем неизвестную функцию v:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{xv}{2(1-x^2)} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{xdx}{2(1-x^2)} \Rightarrow \int\frac{dv}{v} = -\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \ln|v| = \frac{1}{2}\int\frac{x}{x^2-1}\cdot\frac{d(x^2-1)}{2x} \Rightarrow \ln|v| = \frac{1}{4}\ln\left|x^2-1\right| \Rightarrow v = \left(x^2-1\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Подставим функцию v во второе уравнение и найдем u:

$$u'\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{du}{dx}\cdot\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{x}{2} \Rightarrow du = \frac{x}{2}\cdot\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{4}}dx \Rightarrow$$

$$\int du = \int\frac{x}{2}\cdot\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{4}}dx \Rightarrow u = \frac{1}{2}\int x\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{4}}\cdot\frac{d(x^2-1)}{2x} \Rightarrow$$

$$u = \frac{1}{4}\int\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{4}}d(x^2-1) \Rightarrow u = \frac{1}{4}\cdot\frac{(x^2-1)^{\frac{3}{4}}}{{}^{3}\!/_{4}} + C \Rightarrow u = \frac{1}{3}\left(x^2-1\right)^{3/4} + C.$$

Окончательно получаем

$$y = uv = \left(\frac{1}{3}(x^2-1)^{3/4} + C\right)\cdot(x^2-1)^{1/4}.$$

Ответ: $y = \left(\frac{1}{3}(x^2-1)^{3/4} + C\right)\cdot(x^2-1)^{1/4}.$

3.2. $2(\cos^2 y\cdot\cos 2y - x)y' = \sin 2y.$

Преобразуем уравнение к виду $x' + P(y)x = Q(y)$. Для этого заменим $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и разделим обе части уравнения на $\dfrac{dy}{dx}$. Получим: $2\cos y \cos 2y - 2x = x' \cdot \sin 2y$. Перенесем $2x$ из левой части уравнения в правую и разделим обе части уравнения на $\sin 2y$:

$$x' + 2x \cdot \frac{1}{\sin 2y} = \frac{2\cos y \cos 2y}{\sin 2y}.$$

Данное уравнение является линейным относительно функции x, так как содержит неизвестную функцию x и ее производную x' в первой степени и не содержит их произведения. Для решения уравнения применим метод подстановки. Будем искать решение уравнения в виде произведения двух функций $u(y)$ и $v(y)$ т.е. $x = u(y) \cdot v(y)$. Тогда $x' = u'v + uv'$. Подставим x и x' в исходное уравнение и получим:

$$u'v + uv' + 2uv \cdot \frac{1}{\sin 2y} = \frac{2\cos y \cos 2y}{\sin 2y}.$$

Сгруппируем второе и третье слагаемые в левой части уравнения и вынесем общий множитель:

$$u'v + u\left(v' + \frac{2v}{\sin 2y}\right) = \frac{2\cos y \cos 2y}{\sin 2y}.$$

Последнее уравнение эквивалентно системе уравнений:

$$\begin{cases} v' + \dfrac{2v}{\sin 2y} = 0, \\ u'v = \dfrac{2\cos y \cos 2y}{\sin 2y}. \end{cases}$$

Решаем сначала первое уравнение системы и находим его частное решение $(C = 0)$:

$$v' + \frac{2v}{\sin 2y} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dy} = -\frac{2v}{\sin 2y} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{2}{\sin 2y} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{2dy}{\sin 2y} \Rightarrow$$

$$\ln|v| = -\ln|\operatorname{tg} y| \Rightarrow v = \frac{1}{\operatorname{tg} y}.$$

Подставим функцию v во второе уравнение системы и найдем u:

$$u' \cdot \frac{1}{tgy} = \frac{2\cos y \cos 2y}{\sin 2y} \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dy} \cdot \frac{1}{tgy} = \frac{2\cos y \cos 2y}{\sin 2y} \Rightarrow$$

$$du=\frac{2\cos y\cos 2y}{\sin 2y}\cdot\frac{\operatorname{tg} y}{1}dy\Rightarrow$$

$$\int du=\int\frac{2\cos y\cos 2y}{\sin 2y}\cdot\frac{\operatorname{tg} y}{1}dy\Rightarrow$$

$$\int du=\int\frac{2\cos y\cos 2y}{2\sin y\cos y}\cdot\frac{\sin y}{\cos y}dy\ \Rightarrow u=\int\frac{\cos 2y}{\cos y}dy\Rightarrow\ u=\int\frac{2\cos^2 y-1}{\cos y}dy\Rightarrow$$

$$u=2\int\cos y dy-\int\frac{dy}{\cos y}\Rightarrow\ u=2\sin y-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

При вычислении интеграла $\int\frac{2\cos y\cos 2y}{\sin 2y}\cdot\frac{\operatorname{tg} y}{1}dy$ использовались следующие тригонометрические формулы:

$$\sin 2y=2\sin y\cos y,$$

$$\cos 2y=2\cos^2 y-1,$$

$$\operatorname{tg} y=\frac{\sin y}{\cos y}.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$x=uv=\left(2\sin y-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C\right)\cdot\left(1/\operatorname{tg} y\right).$$

Ответ: $x=\left(2\sin y-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C\right)\cdot\left(1/\operatorname{tg} y\right).$

4. Найдите общее решение уравнения Бернулли

$$8xy'-12y=-(5x^2+3)y^3.$$

Это уравнение является уравнением Бернулли, так как его можно привести виду

$$y'+P(x)y=Q(x)\cdot y^n,\ n\neq 0; n\neq 1.$$

Разделим почленно обе части уравнения на $8x$, получим:

$$y'-\frac{3}{2x}\cdot y=-\frac{(5x^2+3)}{8x}\cdot y^3.$$

Для решения уравнения используем метод подстановки. Будем искать решение уравнения в виде: $y=u(x)\cdot v(x)$. Тогда $y'=u'v+uv'$. Подставим y и y' в последнее уравнение:

$$u'v+uv'-\frac{3}{2x}\cdot uv=-\frac{(5x^2+3)}{8x}\cdot(uv)^3.$$

Сгруппируем второе и третье слагаемые в левой части уравнения и вынесем общий множитель:

$$u'v+u\left(v'-\frac{3v}{2x}\right)=-\frac{(5x^2+3)}{8x}\cdot(uv)^3.$$

Находим функцию $v(x)$ из уравнения $v'-\frac{3v}{2x}=0$:

$$\frac{dv}{dx}=\frac{3v}{2x}\Rightarrow$$

$$\frac{dv}{v}=\frac{3dx}{2x}\Rightarrow$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{3dx}{2x}\Rightarrow$$

$$\ln|v|=\frac{3}{2}\ln|x|\Rightarrow$$

$$\ln|v|=\ln|x|^{3/2}\Rightarrow v=x^{3/2}.$$

Функцию $u(x)$ определяем из уравнения $u'=-\frac{5x^2+3}{8x}\cdot u^3v^2$. Подставим функцию v в последнее уравнение и разделим переменные:

$$\frac{du}{dx}=-\frac{5x^2+3}{8x}\cdot u^3x^{3/2}\Rightarrow$$

$$\frac{du}{u^3}=-\frac{5x^2+3}{8x}\cdot x^{3/2}dx\Rightarrow$$

$$\frac{du}{u^3}=-\frac{5x^2+3}{8}\cdot x^{1/2}dx.$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства, получим:

$$\int\frac{du}{u^3}=-\frac{1}{8}\int(5x^2+3)\cdot x^{1/2}dx\Rightarrow$$

$$\int u^{-3}du=-\frac{1}{8}\int\left(5x^{5/2}+3x^{1/2}\right)dx\Rightarrow$$

$$\frac{u^{-2}}{-2}=-\frac{5}{8}\cdot\frac{x^{7/2}}{7/2}-\frac{3}{8}\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2}+C\Rightarrow$$

$$\frac{1}{u^2}=\frac{5}{2}\cdot\frac{x^{7/2}}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{3/2}}{1}-2C.$$

Откуда

$$u=\sqrt{\frac{5x^{7/2}+7x^{3/2}-28C}{14}}.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y=\sqrt{\frac{5x^{7/2}+7x^{3/2}-28C}{14}}\cdot x^{3/2}.$$

Ответ: $y=\sqrt{\frac{5x^{7/2}+7x^{3/2}-28C}{14}}\cdot x^{3/2}$.

5. Найдите общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах

$$xe^{y^2}dx+(x^2ye^{y^2}+\operatorname{tg}y)dy=0.$$

Уравнение в полных дифференциалах имеет вид

$$P(x;y)dx+Q(x;y)dy=0,$$

при условии что $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

В нашем случае $P(x;y)=xe^{y^2}$, $Q(x;y)=x^2ye^{y^2}+\operatorname{tg}y$. Тогда $\frac{\partial P}{\partial y}=2xye^{y^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=2xye^{y^2}$. Так как частные производные равны, то левая часть уравнения является полным дифференциалом некоторой функции $u(x;y)$, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=xe^{y^2},\ \frac{\partial u}{\partial y}=x^2ye^{y^2}+\operatorname{tg}y.$$

Проинтегрируем $\frac{\partial u}{\partial x}$ по x:

$$u(x;y)=\int xe^{y^2}dx+\varphi(y)=e^{y^2}\int xdx+\varphi(y)=e^{y^2}\cdot\frac{x^2}{2}+\varphi(y).$$

Подставим функцию $u(x;y)$ в уравнение $\frac{\partial u}{\partial y}=x^2ye^{y^2}+tgy$, получим

$$\frac{\partial(0,5e^{y^2}x^2+\varphi(y))}{\partial y}=x^2ye^{y^2}+\operatorname{tg}y\ .$$

Откуда $x^2ye^{y^2}+\varphi'(y)=x^2ye^{y^2}+\operatorname{tg}y$. Следовательно, $\varphi'(y)=\operatorname{tg}y$. Тогда $\varphi(y)=\int\operatorname{tg}ydy+C=\int\frac{\sin y}{\cos y}\cdot\frac{d(\cos y)}{-\sin y}+C=-\ln|\cos y|+C.$

Таким образом, $u(x;y)=e^{y^2}\cdot\frac{x^2}{2}-\ln|\cos y|+C$. Окончательно имеем

$$e^{y^2}\cdot\frac{x^2}{2}-\ln|\cos y|=C-\text{общий интеграл уравнения.}$$

Ответ: $e^{y^2}\cdot\frac{x^2}{2}-\ln|\cos y|=C$.

6. Решите задачу Коши

$$6.1.\ y'+\frac{y}{2x}=x^2, y(1)=1;$$

Решим сначала уравнение $y'+\frac{y}{2x}=x^2$. Это уравнение является линейным относительно функции y. Будем искать неизвестную функцию y в виде произведения двух новых функций $u(x)$ и $v(x)$, т.е. $y=u(x)\,v(x)$. Тогда $y'=u'v+uv'$. Подставим y и y' в исходное уравнение, получим:

$$u'v+uv'+\frac{uv}{2x}=x^2.$$

В левой части уравнения сгруппируем второе и третье слагаемые и вынесем общий множитель: $u'v+u\left(v'+\frac{v}{2x}\right)=x^2$. Решим уравнение $v'+\frac{v}{2x}=0$ и найдем v:

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{v}{2x}\Rightarrow$$

$$\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{2x}\Rightarrow$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}\Rightarrow$$

$$\ln|v|=-\frac{1}{2}\ln|x|\Rightarrow$$

$$v=x^{-\frac{1}{2}}.$$

Функцию u найдем из уравнения $u'v=x^2$:

$$u'\cdot x^{-\frac{1}{2}}=x^2\Rightarrow$$

$$\frac{du}{dx}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=x^2\Rightarrow$$

$$\frac{du}{dx} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$du = x^{\frac{5}{2}} dx \Rightarrow$$

$$\int du = \int x^{\frac{5}{2}} dx \Rightarrow$$

$$u = \frac{2}{7} \cdot x^{\frac{7}{2}} + C.$$

В итоге $y = uv = \left(\frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + C \right) \cdot x^{\frac{1}{2}}$ – это общее решение уравнения. Чтобы решить задачу Коши, необходимо, используя начальное условие $y(1) = 1$, найти С. В общее решение подставим $x = 1$ и $y = 1$. Получим:

$$1 = \left(\frac{2}{7} \cdot 1 + C \right) \cdot 1.$$

Откуда $C = \frac{5}{7}$. Следовательно, частное решение уравнения примет вид:

$$y = \left(\frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + \frac{5}{7} \right) \cdot x^{\frac{1}{2}} \text{ или } y = \frac{2}{7} x^7 + \frac{5}{7} x^{\frac{1}{2}}.$$

Ответ: $y = \frac{2}{7} x^7 + \frac{5}{7} x^{\frac{1}{2}}$.

6.2. $y' \operatorname{ctg} x - y = 2,\ y(0) = 2;$

Уравнение $y' \operatorname{ctg} x - y = 2$ является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные в уравнении, используя элементарные преобразования:

$$y' \operatorname{ctg} x = y + 2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} \cdot \operatorname{ctg} x = y + 2 \Rightarrow \frac{dy}{y+2} = \frac{dx}{\operatorname{ctg} x}.$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства. Получаем

$$\int \frac{dy}{y+2} = \int \frac{dx}{\operatorname{ctg} x} \Rightarrow \int \frac{d(y+2)}{y+2} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} \Rightarrow \ln|y+2| = -\ln|\cos x| + \ln C \Rightarrow$$

$$y + 2 = \frac{C}{\cos x} \Rightarrow y = \frac{C}{\cos x} - 2.$$

Таким образом, общее решение уравнения имеет вид $y = \frac{C}{\cos x} - 2$. Используя начальные условия $y(0) = 2$, найдем значение константы С. Для этого в общее решение подставим $x = 0$ и $y = 2$:

$$2=\frac{C}{\cos 0}-2\Rightarrow\ C=4.$$

Следовательно, частное решение уравнения имеет вид $y=\frac{4}{\cos x}-2.$

Ответ: $y=\frac{4}{\cos x}-2.$

$$6.3.\ \ y^2+x^2y'=xyy', y(1)=1.$$

Сначала определим тип уравнения $y^2+x^2y'=xyy'.$ Выразим y':

$$y^2=xyy'-x^2y'\Rightarrow$$
$$y^2=y'(xy-x^2)\Rightarrow$$
$$y'=\frac{y^2}{xy-x^2}.$$

Так как правая часть уравнения является однородной функцией нулевого измерения, то само уравнение является однородным. Для его решения используем подстановку $y=t(x)\cdot x\Rightarrow y'=t'x+t.$ Подставим y и y' в уравнение $y'=\frac{y^2}{xy-x^2}$ и разделим переменные:

$$t'x+t=\frac{t^2x^2}{x\cdot tx-x^2}\Rightarrow$$
$$t'x=\frac{t^2x^2}{x\cdot tx-x^2}-t\Rightarrow$$
$$t'x=\frac{t^2}{t-1}-t\Rightarrow$$
$$t'x=\frac{t^2-t^2+1}{t-1}\Rightarrow$$
$$t'x=\frac{1}{t-1}\Rightarrow$$
$$\frac{dt}{dx}\cdot x=\frac{1}{t-1}\Rightarrow$$
$$(t-1)dt=\frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства и найдем общее решение уравнения:

$$\int (t-1)dt = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ \frac{t^2}{2} - t = \ln|x| + C \Rightarrow \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y}{x} = \ln|x| + C.$$

Найдем значение C, используя начальные условия $y(1) = 1$:

$$\frac{1}{2} - 1 = \ln 1 + C \Rightarrow \ C = -\frac{1}{2}.$$

Подставим значение C и получим частный интеграл уравнения:

$$\frac{y^2}{2x^2} - \frac{y}{x} = \ln|x| - \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{y^2}{2x^2} - \frac{y}{x} = \ln|x| - \frac{1}{2}.$

7. Определите тип дифференциального уравнения первого порядка и укажите метод его решения

$$7.1.\ y(3 - x^2)y' = 1 + y^2;$$

Для того чтобы определить тип дифференциального уравнения первого порядка, его необходимо привести к виду $y' = f(x; y)$ или $M(x; y)dx + N(x; y)dy = 0.$

Выразим из уравнения y':

$$y' = \frac{1 + y^2}{y(3 - x^2)} = \frac{1 + y^2}{y} \cdot \frac{1}{3 - x^2}.$$

Так как правую часть уравнения можно представить в виде произведения двух множителей один из которых зависит от x, а другой от y, то данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными.

Для того чтобы решить это уравнение, его нужно привести к виду $P(x)dx = Q(y)dy$ и затем проинтегрировать правую и левую части.

$$7.2.\ xy' = y\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right);$$

Выразим из уравнения y':

$$y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right).$$

Правая часть уравнения является однородной функцией нулевого измерения: $f(\alpha x; \alpha y) = \frac{\alpha y}{\alpha x}\left(1 + \ln\frac{\alpha y}{\alpha x}\right) = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right) = f(x; y).$

Следовательно, данное уравнение является однородным уравнением. Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки $y = xt(x),\ y' = t(x) + xt'(x)$.

$$7.3.\ \left(\sin 2x - 2\cos(x+y)\right)dx - 2\cos(x+y)dy = 0.$$

Это уравнение вида $M(x;y)dx + N(x;y)dy = 0$, где $M(x;y) = \sin 2x - 2\cos(x+y)$, а $N(x;y) = -2\cos(x+y)$.

Так как $M(x;y) \neq M_1(x)\cdot M_2(y)$ и $N(x;y) \neq N_1(x)\cdot N_2(y)$, уравнение не является уравнением с разделяющимися переменными.

Проверим выполнение условия: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2\cos(x+y);\ \frac{\partial N}{\partial x} = 2\sin(x+y).$$

Следовательно, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Общий интеграл $u(x;y) = C$ этого уравнения находится из системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y). \end{cases}$$

$$7.4.\ y' = \frac{y}{x+y^2}.$$

Это уравнение не является ни уравнением с разделяющимися переменными, ни однородным уравнением, ни уравнением в полных дифференциалах, ни линейным относительно y. Заменим y' на $\dfrac{1}{x'}$ и преобразуем уравнение к виду $x' + P(y)x = Q(y)$:

$$\frac{1}{x'} = \frac{y}{x+y^2} \Rightarrow\ x + y^2 = x'y \Rightarrow\ x + y^2 = x' - \frac{x}{y} = y.$$

Следовательно, данное уравнение является уравнением линейным относительно x.

Решение типового варианта
и образец оформления индивидуального задания № 4

Вариант №0

1. Найдите общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка:

1.1. $y'' = \frac{1}{x} - 2x + 4;$ 1.2. $y'''x^3 + x^2 y'' = 1.$

2. Найдите общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения:

2.1. $5y'' + 12y' + 8y = 18x^2 - 39;$

2.2. $y'' + 2y' + y = (1-x)e^x;$

2.3. $y'' + 8y' = \sin 4x - 2\cos 4x.$

3. Найдите решение задачи Коши:

3.1. $y'' + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right), y(\pi) = 2, y'(\pi) = \frac{1}{2};$

3.2. $y^3 y'' = y^4 - 16, y(0) = 2\sqrt{2}, y'(0) = \sqrt{2}.$

4. Решите системы дифференциальных уравнений

4.1. $\begin{cases} y_1' = -2y_1 + y_2, \\ y_2' = -3y_1 + 2y_2, \end{cases}$ 4.2. $\begin{cases} y_1' = y_2 - 5\cos x, & y_1(0) = 0, \\ y_2' = 2y_1 + y_2, & y_2(0) = 3. \end{cases}$

Решение

1. Найдите общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка:

$$1.1.\ y'' = \frac{1}{x} - 2x + 4$$

Данное дифференциальное уравнение является уравнением второго порядка, допускающим понижение порядка, так как имеет вид $y'' = f(x)$. Для нахождения его общего решения необходимо правую часть уравнения последовательно проинтегрировать два раза. В результате получаем:

$$y' = \int\left(\frac{1}{x} - 2x + 4\right)dx = \ln|x| - x^2 + 4x + C_1,$$

$$y=\int\left(\ln x-x^2+4x+C_1\right)dx=\int\ln xdx-\frac{x^3}{3}+4\cdot\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2.$$

Интеграл $\int\ln xdx$ находим, используя формулу интегрирования по частям:

$$\int\ln xdx=\left|\begin{matrix}u=\ln x\Rightarrow du=\dfrac{dx}{x};\\ dv=dx\Rightarrow v=x\end{matrix}\right|=x\ln x-\int x\cdot\frac{dx}{x}=x\ln x-x+C.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y=x\ln x-x-\frac{x^3}{3}+2x^2+C_1x+C_2.$$

Отметим, что общее решение дифференциального уравнения второго порядка содержит две константы.

Ответ: $y=x\ln x-x-\dfrac{x^3}{3}+2x^2+C_1x+C_2.$

1.2. $y'''x^3+x^2y''=1$

Данное дифференциальное уравнение не содержит неизвестной функции y и ее первой производной y'. С помощью замены $y''=p(x)$, $y'''=p'(x)$ исходное уравнение сводится к уравнению первого порядка:

$$x^3p'+x^2p=1.$$

Поделив обе части уравнения на x^3, получим линейное (относительно неизвестной функции p) дифференциальное уравнение первого порядка:

$$p'+\frac{p}{x}=\frac{1}{x^3}.$$

Полагая в последнем уравнении $p=uv,\ p'=u'v+uv'$, получаем

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=\frac{1}{x^3}$$

или

$$u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=\frac{1}{x^3}.$$

Приравняем выражение, стоящее в скобках к нулю и найдем функцию v:

$$v'+\frac{v}{x}=0\Rightarrow\frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x}\Rightarrow\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln|v|=-\ln|x|\Rightarrow v=\frac{1}{x}.$$

Находим $u(x)$ из уравнения $u'v=\frac{1}{x^3}$:

$$\frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x^3}\Rightarrow du=\frac{dx}{x^2}\Rightarrow u=-\frac{1}{x}+C_1.$$

Следовательно,

$$p=uv=\left(-\frac{1}{x}+C_1\right)\cdot\frac{1}{x}=-\frac{1}{x^2}+\frac{C_1}{x}.$$

Возвращаясь к переменной y, получаем:

$$y''=p=-\frac{1}{x^2}+\frac{C_1}{x}.$$

Откуда

$$y'=\int\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{C_1}{x}\right)dx=\frac{1}{x}+C_1\ln|x|+C_2.$$

Еще раз интегрируя обе части последнего равенства, окончательно получаем:

$$y=\int\left(\frac{1}{x}+C_1\ln x+C_2\right)dx=\ln|x|+C_1\int\ln x dx+C_2x+C_3=$$

$$=\ln|x|+C_1\left(x\cdot\ln|x|-x\right)+C_2x+C_3.$$

Таким образом, общее решение уравнения имеет вид:

$$y=\ln|x|+C_1\left(x\cdot\ln|x|-x\right)+C_2x+C_3.$$

Ответ: $y=\ln|x|+C_1\left(x\cdot\ln|x|-x\right)+C_2x+C_3.$

2. Найдите общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$2.1.\ 5y''+12y'+8y=18x^2-39$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Общее решение этого уравнения определяется формулой

$$y(x)=y_0(x)+\tilde{y}(x),$$

где $y_0(x)-$общее решение соответствующего однородного уравнения, $\tilde{y}(x)-$частное решение неоднородного уравнения. Найдем сначала общее решение однородного уравнения

$$5y''+12y'+8y=0.$$

Найдем корни характеристического уравнения

$$5k^2+12k+8=0,$$

$$D=144-160=-16\Rightarrow k_{1,2}=\frac{-12\pm 4i}{10}=-1,2\pm 0,4i.$$

Тогда общее решение однородного уравнения будет иметь вид:

$$y_0(x)=e^{-1,2x}(C_1\cos 0,4x+C_2\sin 0,4x).$$

Правая часть исходного уравнения является многочленом второй степени и число 0 не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение неоднородного уравнения $\tilde{y}(x)$ будем искать в виде $\tilde{y}(x)=Ax^2+Bx+C.$ Тогда $\tilde{y}'=2Ax+B,$ $\tilde{y}''=2A.$ Подставим выражения для $\tilde{y},$ $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$ в исходное уравнение:

$$5\cdot 2A+12(2Ax+B)+8(Ax^2+Bx+C)=18x^2-39.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений:

$$\begin{cases}8A=18,\\ 24A+8B=0,\\ 10A+12B+8C=-39,\end{cases}$$

Откуда $A=2,25,$ $B=-6,75,$ $C=-0,9375.$

Следовательно,

$$\tilde{y}(x)=2,25x^2-6,75x-0,9375.$$

В результате общее решение уравнения будет иметь вид

$$y=e^{-1,2x}(C_1\cos 0,4x+C_2\sin 0,4x)+2,25x^2-6,75x-0,9375.$$

Ответ: $y=e^{-1,2x}(C_1\cos 0,4x+C_2\sin 0,4x)+2,25x^2-6,75x-0,9375.$

2.2. $y''+2y'+y=(1-x)e^x$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Общее решение этого уравнения определяется формулой

$$y(x)=y_0(x)+\tilde{y}(x),$$

где $y_0(x)-$общее решение соответствующего однородного уравнения, $\tilde{y}(x)-$частное решение неоднородного уравнения. Найдем сначала общее решение однородного уравнения

$$y''+2y'+y=0.$$

Найдем корни характеристического уравнения

$$k^2+2k+1=0\ \Rightarrow D=0,\quad k_{1,2}=-1.$$

Тогда общее решение однородного уравнения будет иметь вид:

$$y_0(x)=e^{-x}(C_1+C_2x).$$

Найдем теперь частное решение неоднородного уравнения

$$y'' + 2y' + y = (1-x)e^x.$$

Правая часть уравнения имеет вид $f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$. В нашем случае $n = 1, \alpha = 1$. Так как значение α не совпадает с корнями характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде $\tilde{y}(x) = (Ax + B)e^x$.

Найдем

$\tilde{y}' = Ae^x + (Ax + B)e^x = e^x(Ax + A + B)$,

$\tilde{y}'' = e^x \cdot A + e^x(Ax + B + A) = e^x(Ax + 2A + B)$.

Подставим выражения для $\tilde{y}, \tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$в исходное уравнение и сократим обе части уравнения на e^x. Получим:

$$Ax + 2A + B + 2(Ax + A + B) + Ax + B = 1 - x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 4A = -1, \\ 4A + 4B = 1. \end{cases}$$

Откуда $A = -0,25$ и $B = 0,5$. Тогда $\tilde{y}(x) = (-0,25x + 0,5)e^x$.

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = e^{-x}(C_1 + C_2 x) + (-0,25x + 0,5)e^x.$$

Ответ: $y = e^{-x}(C_1 + C_2 x) + (-0,25x + 0,5)e^x$.

2.3. $y'' + 8y' = \sin 4x - 2\cos 4x$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Общее решение этого уравнения определяется формулой

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x),$$

где $y_0(x) -$ общее решение соответствующего однородного уравнения, $\tilde{y}(x) -$ частное решение неоднородного уравнения. Найдем сначала общее решение однородного уравнения $y'' + 8y' = 0$. Найдем корни характеристического уравнения

$$k^2 + 8k = 0 \ \ \Rightarrow k(k+8) = 0 \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = -8.$$

Тогда общее решение однородного уравнения будет иметь вид:

$$y_0(x) = C_1 + C_2 e^{-8x}.$$

Найдем теперь частное решение неоднородного уравнения $y'' + 8y' = \sin 4x - 2\cos 4x$.

Правая часть уравнения имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_{n_1}(x)\cos\beta x + Q_{n_2}(x)\sin\beta x\right).$$

В нашем случае $n_1 = n_2 = 0, \alpha = 0, \beta = 4.$ Так как значение $\alpha \pm \beta i$ не совпадает с корнями характеристического уравнения , то частное решение ищем в виде $\tilde{y}(x) = A\cos 4x + B\sin 4x.$ Найдем $\tilde{y}' = -4A\sin 4x + 4B\cos 4x$ и $\tilde{y}'' = -16A\cos 4x - 16B\sin 4x.$ Подставим выражения для $\tilde{y}, \tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$в исходное уравнение . В результате получаем:

$$-16A\cos 4x - 16B\sin 4x - 32A\sin 4x + 32B\cos 4x = \sin 4x - 2\cos 4x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin 4x$ и $\cos 4x$ в левой и правой частях уравнения, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -16B - 32A = 1, \\ -16A + 32B = -2. \end{cases}$$

Разделим обе части второго уравнения системы на 2 и прибавим к первому:

$-40A = 0 \Rightarrow A = 0.$ Подставим значение A в первое уравнение системы и найдем B:

$$B = -\frac{1}{16}.$$

В итоге получаем $\tilde{y}(x) = -\frac{1}{16}\sin 4x,$ а общее решение будет иметь вид

$$y = C_1 + C_2 e^{-8x} - \frac{1}{16}\sin 4x.$$

Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{-8x} - \frac{1}{16}\sin 4x.$

3. Найдите решение задачи Коши

$$3.1.\ y'' + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}\mathrm{ctg}\left(\frac{x}{2}\right), y(\pi) = 2, y'(\pi) = \frac{1}{2}$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и произвольной правой частью. Для его решения будем использовать метод Лагранжа (метод вариации постоянных). Найдем сначала общее решение однородного уравнения

$$y'' + \frac{1}{4}y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm\frac{1}{2}i.$$

Следовательно, $y = C_1\cos\frac{x}{2} + C_2\sin\frac{x}{2}$

общее решение однородного уравнения, а частные решения однородного уравнения имеют вид $y_1 = \cos\frac{x}{2}$ и $y_2 = \sin\frac{x}{2}$.

Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y = C_1(x)\cos\frac{x}{2} + C_2(x)\sin\frac{x}{2}.$$

Для нахождения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ составляем и решаем методом Крамера следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot y_1(x) + C_2'(x)\cdot y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)\cdot y_1'(x) + C_2'(x)\cdot y_2'(x) = f(x), \end{cases}$$

где $f(x)$ – правая часть исходного уравнения, т.е. в нашем случае $f(x) = \frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

Получаем

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot\cos\frac{x}{2} + C_2'(x)\cdot\sin\frac{x}{2} = 0, \\ -\frac{1}{2}C_1'(x)\cdot\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}C_2'(x)\cdot\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\frac{x}{2} & \sin\frac{x}{2} \\ -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} & \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2},$$

$$\Delta_{C_1'} = \begin{vmatrix} 0 & \sin\frac{x}{2} \\ \frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} & \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}\cdot\cos\frac{x}{2},$$

$$\Delta_{C_2'} = \begin{vmatrix} \cos\frac{x}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} & \frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Далее по формулам Крамера находим $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$:

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_{C_1'}}{\Delta} = -\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{x}{2};$$

$$C_2'(x) = \frac{\Delta_{C_2'}}{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Интегрируя обе части последних равенств, найдем C_1 и C_2:

$C_1(x) = -\frac{1}{2}\int \cos\frac{x}{2}dx = -\int \cos\frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right) = -\sin\frac{x}{2} + C_1;$

$C_2 = \frac{1}{2}\int \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1-\sin^2 \frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\int \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} dx = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}} -$

$-\frac{1}{2}\int \sin\frac{x}{2}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right| + \cos\frac{x}{2} + C_2.$

В итоге общее решение уравнения будет иметь вид:

$$y = \left(-\sin\frac{x}{2} + C_1\right)\cos\frac{x}{2} + \left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right| + \cos\frac{x}{2} + C_2\right)\sin\frac{x}{2}.$$

Теперь используя начальные условия $y(\pi) = 2, y(\pi) = \frac{1}{2}$, найдем значения C_1 и C_2:

$(-1 + C_1)\cdot 0 + (0 + C_2)\cdot 1 = 2 \;\Rightarrow C_2 = 2;$

$y' = \left(-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(-\sin\frac{x}{2} + C_1\right)\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{4}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{4}} - \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} +$

$+\frac{1}{2}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right| + \cos\frac{x}{2} + C_2\right)\cos\frac{x}{2} \Rightarrow$

$-\frac{1}{2}(-1 + C_1)\cdot 1 + \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right)\cdot 1 + C_2\cdot 0 = \frac{1}{2} \Rightarrow C_1 = 0.$

В итоге частное решение уравнения будет иметь вид

$$y = -\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} + \left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right| + \cos\frac{x}{2} + 2\right)\sin\frac{x}{2}.$$

Ответ: $y = -\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} + \left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right| + \cos\frac{x}{2} + 2\right)\sin\frac{x}{2}.$

3.2. $y^3 y'' = y^4 - 16, y(0) = 2\sqrt{2}, y'(0) = \sqrt{2}$

Уравнение $y^3 y'' = y^4 - 16$ является уравнением , допускающим понижение порядка.
Это уравнение не содержит переменной x. Решаем его с помощью подстановки $y' = p(y)$. Тогда $y'' = p \cdot p'$, где $p' = \dfrac{dp}{dy}$. Уравнение принимает вид

$$y^3 pp' = y^4 - 16.$$

Данное уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными. Решим это уравнение:

$$y^3 p \frac{dp}{dy} = y^4 - 16 \Rightarrow pdp = \frac{y^4 - 16}{y^3} \Rightarrow$$

$$\frac{p^2}{2} = \frac{y^2}{2} + \frac{8}{y^2} + C_1 \Rightarrow$$

$$p^2 = \frac{y^4 + 16 + 2C_1 y^2}{y^2} \Rightarrow$$

$$(y')^2 = \frac{y^4 + 16 + 2C_1 y^2}{y^2}.$$

Из последнего равенства найдем C_1, используя начальные условия $y(0) = 2\sqrt{2}, y'(0) = \sqrt{2}$, из которых $y' = \sqrt{2}$ и $y = 2\sqrt{2}$:

$$2 = \frac{64 + 16 + 16C_1}{8} \Rightarrow C_1 = -4.$$

Тогда получаем

$$(y')^2 = \frac{y^4 + 16 - 8y^2}{y^2}.$$

Откуда $y' = \pm\sqrt{\dfrac{(y^2-4)^2}{y^2}} \Rightarrow y' = \dfrac{y^2 - 4}{y}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 4}{y} \Rightarrow$$

$$\frac{ydy}{y^2 - 4} = dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{ydy}{y^2 - 1} = \int dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{y}{y^2 - 1} \cdot \frac{d(y^2 - 1)}{2y} = x + C_2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right|=x+C_2.$$

Найдем теперь C_2, учитывая из начальных условий, что $x=0$ и $y=2\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{2}\ln 7=0+C_2 \Rightarrow C_2=\frac{\ln 7}{2}.$$

В итоге частный интеграл уравнения будет иметь вид:

$$\frac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right|=x+\frac{\ln 7}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right|=x+\frac{\ln 7}{2}$.

4. Решите системы дифференциальных уравнений:

$$4.1.\ \begin{cases} y_1'=-2y_1+y_2, \\ y_2'=-3y_1+2y_2. \end{cases}$$

Выпишем первое уравнение системы $y_1'=-2y_1+y_2$ и продифференцируем обе части уравнения по x:

$$y_1''=-2y_1'+y_2'.$$

Из второго уравнения системы y_2' подставим в полученное равенство

$$y_1''=-2y_1'-3y_1+2y_2.$$

Из первого уравнения системы выражаем $y_2=y_1'+2y_1$ и подставляем в последнее равенство. Тогда уравнение принимает вид

$$y_1''=-2y_1'-3y_1+2y_1'+4y_1.$$

Перенесем все слагаемые из правой части уравнения в левую и приведем подобные:

$$y_1''-y_1=0.$$

Получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2-1=0.$$

Корни этого уравнения действительные и различные: $k_1=1$, $k_2=-1$. Таким образом, общее решение уравнения имеет вид:

$$y_1=C_1e^x+C_2e^{-x}.$$

Наконец найдём y_2:

$$y_2 = 2y_1 + y_1' \Rightarrow y_2 = 2(C_1e^x + C_2e^{-x}) + C_1e^x - C_2e^{-x} = 3C_1e^x + C_2e^{-x}.$$

Ответ: $\begin{cases} y_1(x) = C_1e^x + C_2e^{-x}, \\ y_2(x) = 3C_1e^x + C_2e^{-x}. \end{cases}$

4.2. $\begin{cases} y_1' = y_2 - 5\cos x & \quad y_1(0) = 0, \\ y_2' = 2y_1 + y_2 & \quad y_2(0) = 3 \end{cases}$

Выпишем первое уравнение системы $y_1' = y_2 - 5\cos x$ и продифференцируем обе части уравнения по x:

$$y_1'' = y_2' + 5\sin x.$$

Из второго уравнения системы y_2' подставим в полученное равенство

$$y_1'' = 2y_1 + y_2 + 5\sin x.$$

Из первого уравнения системы выражаем $y_2 = y_1' + 5\cos x$ и подставляем в последнее равенство. Тогда уравнение принимает вид

$$y_1'' = 2y_1 + y_1' + 5\cos x + 5\sin x \Rightarrow$$

$$y_1'' - y_1' - 2y_1 = 5\cos x + 5\sin x.$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Сначала решаем соответствующее однородное уравнение

$$y_1'' - y_1' - 2y_1 = 0.$$

Его характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 - k - 2 = 0.$$

Корни этого уравнения действительные и различные: $k_1 = -1$, $k_2 = 2$. Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_{10} = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}.$$

Найдем теперь частное решение неоднородного уравнения

$$y_1'' - y_1' - 2y_1 = 5\cos x + 5\sin x.$$

Правая часть уравнения имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_{n_1}(x)\cos\beta x + Q_{n_2}(x)\sin\beta x\right).$$

В нашем случае $n_1 = n_2 = 0, \alpha = 0, \beta = 1$. Так как значение $\alpha \pm \beta i$ не совпадает с корнями характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$\tilde{y}_1 = A\cos x + B\sin x.$$

Найдем $\tilde{y}_1' = -A\sin x + B\cos x$ и $\tilde{y}_1'' = -A\cos x - B\sin x$. Подставим выражения для $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_1'$ и $\tilde{y}_1''$ в исходное уравнение. В результате получаем:

$$-A\cos x - B\sin x + A\sin x - B\cos x - 2A\cos x - 2B\sin x = 5\cos x + 5\sin x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$ в левой и правой частях уравнения, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -3B + A = 5, \\ -3A - B = 5. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы выразим неизвестное $A = 5 + 3B$ и подставим во второе уравнение системы. Получаем

$$-15 - 9B - B = 5.$$

Откуда $B = -2$. Тогда $A = -1$.

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$\tilde{y}_1 = -\cos x - 2\sin x$$

Общее решение неоднородного уравнения определяется формулой

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x),$$

где $y_0(x)$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, $\tilde{y}(x)$ – частное решение неоднородного уравнения.

Следовательно,

$$y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - \cos x - 2\sin x.$$

Для того чтобы найти неизвестную функцию y_2, найдем y_1' и подставим в равенство $y_2 = y_1' + 5\cos x$. Получим

$$y_1' = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} + \sin x - 2\cos x,$$

$$y_2 = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} + \sin x - 2\cos x + 5\cos x,$$

$$y_2 = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} + \sin x + 3\cos x.$$

Запишем общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - \cos x - 2\sin x, \\ y_2 = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} + \sin x + 3\cos x. \end{cases}$$

Используя начальные условия $y_1(0) = 0, y_2(0) = 3$, найдем значения констант C_1 и C_2:

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 - 1, \\ 3 = 2C_1 - C_2 + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{3}, \\ C_2 = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Теперь частное решение системы имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{3}e^{2x} + \dfrac{2}{3}e^{-x} - \cos x - 2\sin x, \\ y_2 = \dfrac{2}{3}e^{2x} - \dfrac{2}{3}e^{-x} + \sin x + 3\cos x. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{3}e^{2x} + \dfrac{2}{3}e^{-x} - \cos x - 2\sin x, \\ y_2 = \dfrac{2}{3}e^{2x} - \dfrac{2}{3}e^{-x} + \sin x + 3\cos x. \end{cases}$

Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 5

Вариант №0

1. Напишите пять первых членов ряда по известной формуле для общего члена ряда

$$u_n = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}$$

и проверьте, выполняется ли необходимый признак сходимости.

2. Найдите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{54}{n^2+5n+4}.$$

3. Исследуйте ряды на сходимость, используя признаки сравнения

3.1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+2n^2+3}$; 3.2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{4^n+1}$.

4. Исследуйте ряды на сходимость, используя признак Даламбера

4.1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n(n^2+3)}$; 4.2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(3n-2)\cdot 5^n}$.

5. Исследуйте ряды на сходимость, используя признак Коши

5.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{4n-3}\right)^{\frac{n+1}{3}}$;

5.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-3}}{(n+3)^n}$.

6. Исследуйте ряды на сходимость, используя интегральный признак

6.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$;

6.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)\ln^3(n+5)}$.

7. Исследуйте ряды на абсолютную и условную сходимость

7.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{6n-5}$;

7.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+4}}$;

7.3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2}$.

8. Исследуйте ряды на сходимость, используя различные признаки сходимости

8.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n^5}{(n+3)!}$;

8.2. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2n^2+3}-\sqrt{2n^2-1})$;

8.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{\sqrt{n}}$;

8.4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$;

8.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{2^n n!}$.

Решение

1. Напишите пять первых членов ряда по известной формуле для общего члена ряда $u_n=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}$ и проверьте, выполняется ли необходимый признак сходимости.

Найдем сначала пять первых членов

$n=1$: $u_1=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$;

$n=2$: $u_2=\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$;

$n=3$: $u_3=\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$;

$n=4$: $u_4=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{16}$;

$n=5$: $u_5=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{20}$.

Проверим теперь выполнение необходимого признака, для этого найдем предел общего члена ряда $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$:

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}=\operatorname{tg}0=0.$$

Следовательно, необходимый признак выполняется.

2. Найдите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{54}{n^2+5n+4}.$$

Представим общий член ряда $u_n=\dfrac{54}{n^2+5n+4}$ в виде суммы двух дробей:

$$u_n=\frac{54}{n^2+5n+4}=\frac{54}{(n+1)(n+4)}=\frac{18}{n+1}-\frac{18}{n+4}=18\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+4}\right).$$

Найдем теперь n-частичную сумму ряда S_n:

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n=$$

$$=18\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+18\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+18\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+18\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+18\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+$$

$$+18\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}\right)+18\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right)+18\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)+18\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+4}\right)=$$

$$=18\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)=18\left(\frac{13}{12}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right).$$

По определению сумма ряда S равна $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$. Подставим в эту формулу полученное выражение для S_n, получим

$$S=\lim_{n\to\infty}\left(18\left(\frac{13}{12}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)\right)=18\cdot\frac{13}{12}=\frac{39}{2}.$$

Ответ: $S=\dfrac{39}{2}$.

3.3. Исследуйте ряды на сходимость, используя признаки сравнения

$$3.1.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+n+1}$$

Для исследования ряда на сходимость используем предельный признак сравнения. Общий член исследуемого ряда $u_n=\frac{n^2+1}{n^3+n+1}$ эквивалентен эталонному ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ с общим членом $v_n=\frac{1}{n}$, так как $u_n=\frac{n^2+1}{n^3+n+1}\sim\frac{n^2}{n^3}=\frac{1}{n}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится. Вычислим предел отношения $\frac{u_n}{v_n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+1}{n^3+n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)n}{n^3+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n}{n^3+n+1}=1.$$

Так как предел равен конечному числу, отличному от нуля, то исследуемый ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+n+1}$ ведет себя так же как ряд, с которым сравнивали $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, т.е. расходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+n+1}$ расходится.

$$3.2.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n+1}$$

Для исследования ряда на сходимость используем предельный признак сравнения. Общий член исследуемого ряда $u_n=\frac{3^n}{2^n+1}$ эквивалентен эталонному ряду $\sum_{n=1}^{\infty}q^n$ с общим членом $v_n=\left(\frac{3}{2}\right)^n$, так как

$u_n = \dfrac{3^n}{2^n+1} \sim \dfrac{3^n}{2^n} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ расходится $(q = \dfrac{3}{2} < 1)$. Вычислим предел отношения $\dfrac{u_n}{v_n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3^n}{2^n+1}}{\dfrac{3^n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot 2^n}{(2^n+1)\cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n+1} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n\ln 2}{2^n\ln 2} = 1 \neq 0.$$

Так как предел равен конечному числу, отличному от нуля, то исследуемый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{2^n+1}$ ведет себя так же как ряд, с которым сравнивали $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$, т.е. расходится.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{2^n+1}$ расходится.

4. Исследуйте ряды на сходимость, используя признак Даламбера

$$4.1.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n(n^2+3)}$$

В нашем случае общий член ряда $u_n = \dfrac{n!}{2^n(n^2+3)}$. Тогда $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}((n+1)^2+3)}$. Найдем предел отношения $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}((n+1)^2+3)}}{\dfrac{n!}{2^n(n^2+3)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot 2^n\cdot(n^2+3)}{n!\cdot 2^{n+1}\cdot((n+1)^2+3)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)\cdot 2^n\cdot(n^2+3)}{n!\cdot 2^n\cdot 2\cdot(n^2+2n+4)} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot(n^2+3)}{(n^2+2n+4)} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2+3n+3}{n^2+2n+4} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n+3}{2n+2} =$$

$$= \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{6n+2}{2} = \infty.$$

Так как значение предела больше единицы, то ряд расходится.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{2^n(n^2+3)}$ расходится.

$$4.2.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(3n-2)\cdot 5^n}$$

В нашем случае общий член ряда $u_n = \dfrac{3^n}{5^n(3n-2)}$. Тогда $u_{n+1} = \dfrac{3^{n+1}}{5^{n+1}(3(n+1)-2)}$. Найдем предел отношения $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{3^{n+1}}{5^{n+1}(3(n+1)-2)}}{\dfrac{3^n}{5^n(3n-2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}\cdot 5^n\cdot(3n-2)}{3^n\cdot 5^{n+1}\cdot(3n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n\cdot 3\cdot 5^n\cdot(3n-2)}{3^n\cdot 5^n\cdot 5\cdot(3n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3(3n-2)}{5(3n+1)} = \frac{3}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{3n+1} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \frac{3}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{3}{3} = \frac{3}{5}.$$

Так как значение предела меньше единицы, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(3n-2)\cdot 5^n}$ сходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(3n-2)\cdot 5^n}$ сходится.

5. Исследуйте ряды на сходимость, используя признак Коши

$$5.1.\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-2}{4n-3}\right)^{\frac{n+1}{3}}$$

В нашем случае общий член ряда $u_n = \left(\dfrac{3n-2}{4n-3}\right)^{\frac{n+1}{3}}$. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n-2}{4n-3}\right)^{\frac{n+1}{3}}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{4n-3}\right)^{\frac{n+1}{3}\cdot\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{4n-3}\right)^{\frac{n+1}{3n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{4n-3}\right)^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3n}} =$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{0,75}.$$

Так как значение предела $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$ меньше единицы, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{4n-3}\right)^{\frac{n+1}{3}}$ сходится.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{4n-3}\right)^{\frac{n+1}{3}}$ сходится.

$$5.2.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-3}}{(n+3)^n}$$

В нашем случае общий член ряда $u_n=\frac{4^{n-3}}{(n+3)^n}$. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{4^{n-3}}{(n+3)^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^{n-3}}{(n+3)^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(4^{n-3})^{\frac{1}{n}}}{(n+3)^{\frac{n}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{\frac{n-3}{n}}}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot 4^{-\frac{3}{n}}}{n+3}=\left\{\frac{4}{\infty}\right\}=0.$$

Так как значение предела $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$ меньше единицы, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{4n-3}\right)^{\frac{n+1}{3}}$ сходится.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{4n-3}\right)^{\frac{n+1}{3}}$ сходится.

6. Исследуйте ряды на сходимость, используя интегральный признак

$$6.1.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$$

Общий член ряда $u_n=\frac{4^{n-3}}{(n+3)^n}$. Составим функцию $f(x)=\frac{10^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ и найдем несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{10^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=-\int_1^{\infty}\frac{10^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{d(-\sqrt{x})}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=-2\int_1^{\infty}10^{-\sqrt{x}}d(-\sqrt{x})=-2\cdot\left.\frac{10^{-\sqrt{x}}}{\ln 10}\right|_1^{\infty}=$$

$$=0+2\cdot\frac{10^{-1}}{\ln 10}=\frac{0,2}{\ln 10}.$$

Так как несобственный интеграл равен конечному числу, то он сходится, а следовательно, и исследуемый ряд тоже сходится.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ сходится.

$$6.2.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)\ln^3(n+5)}$$

Общий член ряда $u_n=\frac{1}{(n+5)\ln^3(n+5)}$. Составим функцию $f(x)=\frac{1}{(x+5)\ln^3(x+5)}$ и найдем несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+5)\ln^3(x+5)}=\int_1^{\infty}\frac{\ln^{-3}(x+5)}{(x+5)}\cdot\frac{d(x+5)}{1}=\int_1^{\infty}\ln^{-3}(x+5)d(x+5)=$$

$$=\frac{\ln^{-2}(x+5)}{-2}\bigg|_1^{\infty}=\frac{1}{-2\ln^2(x+5)}\bigg|_1^{\infty}=\ 0+\frac{1}{2\ln^2 6}=\frac{1}{2\ln^2 6}.$$

Так как несобственный интеграл равен конечному числу, то он сходится, а следовательно, и исследуемый ряд тоже сходится.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)\ln^3(n+5)}$ сходится.

7. Исследуйте ряды на абсолютную и условную сходимость

$$7.1.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{6n-5}$$

Данный ряд является знакочередующимся. Проверим сначала выполнение условий теоремы Лейбница. Для этого вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}|u_n|:\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}n}{6n-5}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{6n-5}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\neq 0.$$

Так как первое условие теоремы Лейбница не выполняется, т.е. предел общего члена ряда не равен нулю, то ряд расходится.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{6n-5}$ расходится.

$$7.2.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+4}}$$

Данный ряд является знакочередующимся. Проверим сначала выполнение условий теоремы Лейбница. Для этого вычислим предел $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+4}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+4}} = \left\{\frac{1}{\infty}\right\} = 0.$$

Следовательно, первое условие выполняется. Проверим выполнение второго условия $|u_n|>|u_{n+1}|$. В нашем случае $|u_n| = \dfrac{1}{\sqrt{n+4}}$, $|u_{n+1}| = \dfrac{1}{\sqrt{n+5}}$. Так как $n+5>n+4$, то $\dfrac{1}{\sqrt{n+4}}>\dfrac{1}{\sqrt{n+5}}$. Таким образом, оба условия теоремы Лейбница выполняются и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+4}}$ сходится. Выясним тип сходимости. Для этого к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+4}}$ применим один из достаточных признаков сходимости, а именно, интегральный признак. Так как несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+4}} = \int_1^{\infty}(x+4)^{-\frac{1}{2}}dx = \int_1^{\infty}(x+4)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{d(x+4)}{1} =$$

$$= \int_1^{\infty}(x+4)^{-\frac{1}{2}}d(x+4) = \left.\frac{(x+4)^{0,5}}{0,5}\right|_1^{\infty} = 2\sqrt{x+4}\Big|_1^{\infty} = \infty - 2\sqrt{5} = \infty$$ расходится,

то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+4}}$ будет расходиться. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+4}}$ сходится условно.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+4}}$ сходится условно.

$$7.3.\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2}$$

Данный ряд является знакочередующимся. Рассмотрим ряд, составленный из модулей общих членов данного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\sin\frac{\pi}{n}\right|}{n^2}.$$

Сравним последний ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, который сходится. Применим предельный признак сравнения

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\sin\frac{\pi}{n}\right|}{n^2}:\frac{1}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\sin\frac{\pi}{n}\right|\cdot n^3}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{n}\cdot n}{1}=\pi.$$

Так как предел равен конечному числу, отличному от нуля, то исследуемый ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\sin\frac{\pi}{n}\right|}{n^2}$ ведет себя так же как ряд, с которым сравнивали $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, т.е. сходится. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2}$ сходится абсолютно.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2}$ сходится абсолютно.

8. Исследуйте ряды на сходимость, используя различные признаки сходимости

$$8.1.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n^5}{(n+3)!}$$

Ряд, составленный из модулей ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n^5}{(n+3)!}$, сходится по признаку Даламбера. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^5}{(n+4)!}}{\frac{n^5}{(n+3)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5(n+3)!}{n^5(n+4)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5(n+3)!}{n^5(n+3)!(n+4)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5}{n^5}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+4}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+5}\right)^5\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+4}=$$

$=1\cdot 0=0<1$.

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n^5}{(n+3)!}$ сходится абсолютно.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n^5}{(n+3)!}$ сходится абсолютно.

8.2. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2n^2+3}-\sqrt{2n^2-1})$

Для того чтобы данный ряд исследовать на сходимость, преобразуем общий член ряда $u_n=\sqrt{2n^2+3}-\sqrt{2n^2-1}$ следующим образом:

$$u_n=\sqrt{2n^2+3}-\sqrt{2n^2-1}=\frac{(\sqrt{2n^2+3}-\sqrt{2n^2-1})(\sqrt{2n^2+3}+\sqrt{2n^2-1})}{(\sqrt{2n^2+3}+\sqrt{2n^2-1})}=$$

$=\frac{(2n^2+3)-(2n^2-1)}{\sqrt{2n^2+3}+\sqrt{2n^2-1}}=\frac{4}{\sqrt{2n^2+3}+\sqrt{2n^2-1}}$. Очевидно, что $u_n\sim\frac{1}{n}$, поэтому сравним исследуемый ряд с эталонным рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится. Используем предельный признак сравнения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{\sqrt{2n^2+3}+\sqrt{2n^2-1}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{2n^2+3}+\sqrt{2n^2-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n\left(\sqrt{2+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{2-\frac{1}{n^2}}\right)}=4.$$

Так как предел равен конечному числу, отличному от нуля, то исследуемый ряд ведет себя также как и ряд, с которым сравнивали, т.е. расходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2n^2+3}-\sqrt{2n^2-1})$ расходится.

8.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{\sqrt{n}}$

Общий член ряда $u_n = \operatorname{tg}\frac{\pi}{\sqrt{n}}$ эквивалентен общему члену ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{\sqrt{n}}$ (использовали таблицу эквивалентных бесконечно малых $\operatorname{tg}\alpha \sim \alpha$ при $\alpha \to 0$). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ является эталонным, и известно, что он расходится. Поэтому и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{\sqrt{n}}$ также расходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{\sqrt{n}}$ расходится.

$$8.4.\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$$

Данный ряд является знакочередующимся. Проверим первое условие признака Лейбница $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = 0$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2\cdot\frac{1}{n}} = =\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = e^0 = 1 \neq 0.$$

Так как условие не выполняется, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$ расходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$ расходится.

$$8.5.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{2^n n!}$$

Так как общий член ряда $u_n = \frac{(n+1)^n}{2^n n!}$ содержит факториал, то для исследования ряда на сходимость можно использовать признак Даламбера. Найдем предел отношения $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+2)^{n+1}}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}}{\dfrac{(n+1)^n}{2^n\cdot n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^{n+1}\cdot 2^n\cdot n!}{2^{n+1}\cdot(n+1)!\cdot(n+1)^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^n\cdot(n+2)\cdot 2^n\cdot n!}{2^n\cdot 2\cdot n!\cdot(n+1)^n\cdot(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^n\cdot(n+2)}{2\cdot(n+1)^n(n+1)}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^n}{(n+1)^n}\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{(n+1)n}{n+1}}==\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)}\right)^{\frac{n}{n+1}}=\frac{1}{2}e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}}=\frac{1}{2}e=\frac{e}{2}>1.$$

Так как значение предела меньше единицы, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{2^n n!}$ сходится.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{2^n n!}$ сходится.

Решение типового варианта
и образец оформления индивидуального задания № 6

Вариант №0

1. Исследуйте функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3x^2+2}{2x+5}\right)^n$ на сходимость в точке $x=-1{,}5$.

2. Найдите область сходимости функционального ряда:

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx^2}}{2n+3}$; 2.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5x+3)^n}{n4^n}$; 2.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}}{\left(1-9x^2\right)^n}$.

3. Найдите интервал и радиус сходимости степенного ряда

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+6)^n}{(n+3)\ln(n+3)}$; 3.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n}$; 3.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{4^n}$.

4. Разложите функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x-a)$ и укажите интервал сходимости полученного ряда:

4.1. $f(x)=\ln x$, $a=3$; 4.2. $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $a=-2$.

5. Разложите функцию $f(x)$ в ряд Маклорена и укажите интервал сходимости полученного ряда:

5.1. $f(x)=\frac{x}{x^2+3x+2}$; 5.2. $f(x)=x\sin^2\frac{3x}{2}$;

5.3. $f(x)=(x-1)\ln\left(4+x^2\right)$.

6. Вычислите определённые интегралы с точностью $\delta=0{,}001$:

6.1. $\int_0^{0,1}\frac{dx}{\sqrt[5]{32+x^5}}$; 6.2. $\int_0^{0,25}x^2\sin(10x^2)dx$; 6.3. $\int_0^{1/6}e^{-x^2/5}dx$.

7. Разложите функцию в ряд Фурье на указанном отрезке. Постройте график суммы ряда Фурье:

7.1. $f(x)=3+4x$, $[-\pi;\pi]$; 7.2. $f(x)=\begin{cases}2x-1, & -3\le x<0,\\ 0, & 0<x\le 3\end{cases}$ $[-3;3]$.

8. Разложите функцию $f(x)=\sin\frac{5x}{2}$, $x\in[0;\pi]$ в ряд Фурье

8.1. по синусам; 8.2. по косинусам.

Решение

1. Исследуйте функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3x^2+2}{2x+5}\right)^n$ на сходимость в точке $x=-1{,}5$.

Подставим в общий член ряда $u_n(x)=\left(\frac{3x^2+2}{2x+5}\right)^n$ значение $x=-1,5$:

$u_n(-1,5)=\left(\frac{3\cdot 2,25+2}{2\cdot(-1.5)+5}\right)^n=\left(\frac{8,75}{2}\right)^n=\left(\frac{35}{8}\right)^n$. В результате получаем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{35}{4}\right)^n$, который является эталонным рядом $\sum_{n=1}^{\infty}q^n$. Так как в нашем случае $q=\frac{35}{4}>1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{35}{4}\right)^n$ расходится.

Ответ: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3x^2+2}{2x+5}\right)^n$ в точке $x=-1,5$ расходится.

2. Найдите область сходимости функционального ряда:

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx^2}}{2n+3}$

В нашем случае $u_n(x)=\frac{e^{nx^2}}{2n+3}$, $u_{n+1}(x)=\frac{e^{(n+1)x^2}}{2(n+1)+3}=\frac{e^{nx^2}\cdot e^{x^2}}{2n+5}$. Вычислим предел модуля их отношения т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$. Получаем

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{nx^2}e^{x^2}(2n+3)}{e^{nx^2}(2n+5)}=e^{x^2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+5}=e^{x^2}$.

Для того, чтобы найти область сходимости исследуемого ряда, решим неравенство $e^{x^2}<1$. Откуда $x^2<0$. Решения данное неравенство не имеет. Следовательно, ряд расходится на всей числовой оси, а областью сходимости является пустое множество.

Ответ: $x\in\varnothing$.

$$2.2.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5x+3)^n}{n4^n}$$

В нашем случае $u_n(x)=\frac{(5x+3)^n}{n4^n}$, $u_{n+1}(x)=\frac{(5x+3)^{n+1}}{(n+1)4^{n+1}}=\frac{(5x+3)^n(5x+3)}{(n+1)\cdot 4^n\cdot 4}$.

Вычислим предел модуля их отношения, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$. Получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(5x+3)^n(5x+3)}{(n+1)4^n\cdot 4}\cdot\frac{n4^n}{(5x+3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(5x+3)n}{4(n+1)}\right| = \frac{|5x+3|}{4}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| = \frac{|5x+3|}{4}.$$

Для того, чтобы найти область сходимости исследуемого ряда решим неравенство

$$\frac{|5x+3|}{4}<1.$$

Откуда $|5x+3|<4 \Rightarrow \begin{cases}5x+3<4,\\ 5x+3>-4.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}5x<1,\\ 5x>-7.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x<0,2,\\ x>-1,2\end{cases}.$

Таким образом интервал сходимости функционального ряда равен $x\in(-1,2;0,2)$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости:

при $x=-1,2$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$. Это знакочередующийся ряд и он сходится условно. Следовательно исходный функциональный ряд в точке $x=-1,2$ сходится;

при $x=0,2$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$. Это гармонический ряд и он расходится. Следовательно, исходный функциональный ряд в точке $x=0,2$ расходится.

С учетом полученных результатов интервалом сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(5x+3)^n}{n4^n}$ является промежуток $[-1,2;0,2)$.

Ответ: $x\in[-1,2;0,2)$.

$$2.3.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}}{\left(1-9x^2\right)^n}$$

В нашем случае

$$u_n(x)=\frac{5^{n-1}}{(1-9x^2)^n},\ u_{n+1}(x)=\frac{5^{(n+1)-1}}{(1-9x^2)^{n+1}}=\frac{5^n}{(1-9x^2)^n(1-9x^2)}.$$

Вычислим предел модуля их отношения, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$. Получаем

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{5^n}{(1-9x^2)^n\cdot(1-9x^2)}\cdot\dfrac{(1-9x^2)^n}{5^n\cdot 5^{-1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{5}{1-9x^2}\right| = \dfrac{5}{\left|1-9x^2\right|}$. Для того чтобы найти область сходимости исследуемого ряда, решим неравенство

$\dfrac{5}{\left|1-9x^2\right|}<1.$

Откуда $\left|1-9x^2\right|>5 \Rightarrow \begin{cases}1-9x^2<-5, \Rightarrow\\ 1-9x^2>5\end{cases} \left[\begin{array}{l} x^2<\dfrac{4}{3} \\ x^2>\dfrac{2}{3}\end{array}\right., \Rightarrow$

$x\in\left(-\sqrt{\dfrac{4}{3}};-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)\cup\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}};\sqrt{\dfrac{4}{3}}\right).$

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости (это четыре точки):

при $x=-\sqrt{\dfrac{4}{3}}$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 5^{n-1}}{3^n}$. Это знакочередующийся ряд и он расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left|u_n\right|\neq 0\right)$. Следовательно, исходный функциональный ряд в точке $x=-\sqrt{\dfrac{4}{3}}$ расходится;

при $x=-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n 5^{n-1}$. Это знакочередующийся ряд и он расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left|u_n\right|\neq 0\right)$. Следовательно, исходный функциональный ряд в точке $x=-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ расходится;

при $x=\sqrt{\dfrac{4}{3}}$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 5^{n-1}}{3^n}$. Это знакочередующийся ряд и он расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости $\left(\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|\neq 0\right)$. Следовательно, исходный функциональный ряд в точке $x=\sqrt{\frac{4}{3}}$ расходится;

при $x=\sqrt{\frac{2}{3}}$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n 5^{n-1}$. Это знакочередующийся ряд и он расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости $\left(\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|\neq 0\right)$. Следовательно, исходный функциональный ряд в точке $x=\sqrt{\frac{2}{3}}$ расходится.

Окончательно получаем $x\in\left(-\sqrt{\frac{4}{3}};-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$. Это и есть область сходимости исследуемого функционального ряда.

Ответ: $x\in\left(-\sqrt{\frac{4}{3}};-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$.

3. Найдите интервал и радиус сходимости степенного ряда

$$3.1.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+6)^n}{(n+3)\ln(n+3)}$$

Радиус сходимости степенного ряда найдем по формуле $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, где a_n коэффициенты степенного ряда. В нашем случае

$$a_n=\frac{(-1)^n}{(n+3)\ln(n+3)},\ a_{n+1}=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+4)\ln(n+4)}.$$

Тогда

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(n+3)\ln(n+3)}\cdot\frac{(n+4)\ln(n+4)}{(-1)^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+4}{n+3}\cdot\frac{\ln(n+4)}{\ln(n+3)}\right|=1.$$

Для нахождения интервала сходимости необходимо решить неравенство $|x+6|<1$.

Откуда $\begin{cases}x+6<1,\\ x+6>-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<-5,\\ x>-7\end{cases}\Rightarrow x\in(-7;-5).$

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости (это две точки):

при $x=-7$ получаем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln(n+3)}$.

По интегральному признаку имеем

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+3)\ln(x+3)}=\int_1^{\infty}\frac{d(\ln(x+3))}{\ln(x+3)}=\ln\left|\ln(x+3)\right|\Big|_1^{\infty}=\infty.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln(n+3)}$ расходится (т.к. несобственный интеграл расходится), а значит, точка $x=-7$ не входит в интервал сходимости степенного ряда;

при $x=-5$ получаем числовой знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+3)\ln(n+3)}$. Этот ряд расходится (см. выше). Проверим выполнение условий теоремы Лейбница:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|u_n\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+3)\ln(n+3)}=0,$

б) $u_{n+1}<u_n$, действительно так как $(n+4)>(n+3)$ и $\ln(n+4)>\ln(n+3)$, то $\frac{1}{(n+4)\ln(n+4)}<\frac{1}{(n+3)\ln(n+3)}$.

Оба условия теоремы Лейбница выполняются. Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+3)\ln(n+3)}$ сходится условно, и точка $x=-5$ входит в интервал сходимости степенного ряда. Окончательно получаем $x\in\left(-7;-5\right]$.

Ответ: $x\in\left(-7;-5\right]$.

$$3.2.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-n)4^n}$$

Так как среди коэффициентов степенного ряда есть равные нулю, то для нахождения области сходимости этого ряда используем признак Даламбера. В нашем случае $u_n(x)=\frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-n)4^n}, u_{n+1}(x)=\frac{(x-7)^{2n+1}}{(2(n+1)^2-(n+1))4^{n+1}}=\frac{(x-7)^{2n-1}(x-7)^2}{(2n^2+n+1)4^n\cdot 4}$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-7)^{2n-1}(x-7)^2}{(2n^2+n+1)4^n\cdot 4}\cdot\frac{(2n^2-n)}{4^n(x-7)^{2n-1}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-7)^2}{(2n^2+n+1)\cdot 4}\cdot\frac{(2n^2-n)}{1}\right|=\frac{(x-7)^2}{4}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n^2-n}{2n^2+n+1}\right|==\frac{(x-7)^2}{4}\cdot 1=$$

$=\frac{(x-7)^2}{4}$. Для нахождения интервала сходимости необходимо решить неравенство $\frac{(x-7)^2}{4}<1$. Откуда $\begin{cases}x-7<2,\\ x-7>-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<9,\\ x>5\end{cases}\Rightarrow x\in(5;9)$. Следовательно радиус сходимости ряда $R=2$. Исследуем далее поведение ряда на концах интервала сходимости (это две точки):

при $x=5$ получаем числовой ряд $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2-n}$. Этот ряд сходится, так как он эквивалентен ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\ (s>1)$, который сходится. а значит точка $x=5$ входит в интервал сходимости степенного ряда;

при $x=9$ получаем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2-1}$, который сходится. Следовательно и точка

$x=9$ также входит в интервал сходимости степенного ряда. Окончательно получаем , что интервал сходимости ряда совпадает с отрезком $[5;9]$.

Ответ: $x\in[5;9]$.

$$3.3.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{4^n}.$$

Радиус сходимости степенного ряда найдем по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

где a_n коэффициенты степенного ряда. В нашем случае $a_n = \dfrac{n!}{4^n}$, $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{4^{n+1}}$. Тогда

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{4^n}\cdot\frac{(n+1)!}{4^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{4^n}\cdot\frac{4\cdot 4^n}{n!(n+1)}\right| = 0.$$

Следовательно, интервалом сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!x^n}{4^n}$ является одна точка $x=0$.

Ответ: $x=0$.

4. Разложите функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x-a)$ и укажите интервал сходимости полученного ряда:

4.1. $f(x)=\ln x$, $a=3$;

Найдем значение функции $f(x)=\ln x$ и ее производных при $x=3$:

$f(3)=\ln 3$;

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $f'(3)=\dfrac{1}{3}$;

$f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$, $f''(3)=-\dfrac{1}{3^2}$;

$f'''(x)=\dfrac{2}{x^3}$, $f'''(3)=\dfrac{2}{3^3}$;

$f^{(4)}(x)=-\dfrac{2\cdot 3}{x^4}$, $f^{(4)}(3)=-\dfrac{2\cdot 3}{3^4}$;

……………………………………………

$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$, $f^{(n)}(3)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{3^n}$.

Подставим эти значения в ряд

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

получаем

$$\ln x=\ln 3+\frac{1}{3\cdot 1!}(x-3)-\frac{1}{3^2 2!}(x-3)^2+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{3^n n!}(x-3)^n+\ldots$$

или

$$\ln x=\ln 3+\frac{1}{3\cdot 1!}(x-3)-\frac{1}{3^2 2!}(x-3)^2+\frac{2}{3^3\cdot 3!}(x-3)^3+.....+\frac{(-1)^{n-1}}{3^n n}(x-3)^n+...=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n\cdot n}(x-3)^n.$$

Найдем радиус сходимости данного ряда по формуле

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

В нашем случае $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n3^n}$, $a_{n+1}=\dfrac{(-1)^n}{(n+1)3^{n+1}}$. Тогда

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n3^n}\cdot\frac{3^{n+1}(n+1)}{1}\right|=3.$$

То есть ряд сходится при $x\in(0;6)$. Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости:

При $x=0$

получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{-1}{n}$, который расходится, так как является гармоническим рядом, умноженным на (-1).

При $x=6$ имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$, который сходится условно (по теореме Лейбница). Таким образом, при $x\in(0;6]$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{3^n\cdot n}(x-3)^n$ сходится к функции $f(x)=\ln x$.

Ответ: $\ln x=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{3^n\cdot n}(x-3)^n$ при $x\in(0;6]$.

4.2. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $a=-2$

Найдем значение функции $f(x)=x^{-2}$ и ее производных при $x=-2$:

$f(-2)=0,25;$

$f'(x)=-2x^{-3}$, $f'(-2)=-2\cdot(-2)^{-3};$

$f''(x)=2\cdot 3\cdot x^{-4}$, $f''(-2)=2\cdot 3\cdot(-2)^{-4};$

$f'''(x)=-2\cdot 3\cdot 4\cdot x^{-5}$, $f'''(-2)=-2\cdot 3\cdot 4\cdot(-2)^{-5};$

$f^{(4)}(x)=2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot x^{-6}$, $f^{(4)}(-2)=2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot(-2)^{-6};$

…………………………………………

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{(n+1)!}{x^{n+2}},\; f^{(n)}(-2)=\frac{(n+1)!}{2^{n+2}}.$$

Подставим эти значения в ряд

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

получаем

$$x^{-2}=0,25+\frac{2}{2^3\cdot 1!}(x+2)+\frac{2\cdot 3}{2^4\cdot 2!}(x+2)^2+\frac{2\cdot 3\cdot 4}{2^5\cdot 3!}(x+2)^3+\ldots+\frac{(n+1)!}{2^{n+2}n!}(x+2)^n+\ldots$$

или

$$x^{-2}=0,25+\frac{2}{2^3\cdot 1!}(x+2)+\frac{3}{2^4}(x+2)^2+\frac{4}{2^5}(x+2)^3+\ldots+\frac{(n+1)}{2^{n+2}}(x+2)^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+2}}(x+2)^n.$$

Найдем радиус сходимости данного ряда $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. В нашем случае $a_n=\frac{n+1}{2^{n+2}}$, $a_{n+1}=\frac{n+2}{2^{n+3}}$. Тогда

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2^{n+2}}\cdot\frac{2^{n+3}}{n+2}\right|=2.$$

То есть ряд сходится при $x\in(-4;0)$. Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости.

При $x=0$

получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)}{4}$, который расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости ($\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|\neq 0$).

При $x=-4$

имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{4}$, который также расходится.

Таким образом, при $x\in(-4;0)$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+2}}(x+2)^n$ сходится к функции $f(x)=x^{-2}$.

Ответ: $x^{-2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+2}}(x+2)^n$ при $x\in(-4;0)$.

5. Разложите функцию $f(x)$ в ряд Маклорена и укажите интервал сходимости полученного ряда:

$$5.1.\ f(x)=\frac{x}{x^2+3x+2}$$

Разложим дробь $\dfrac{x}{x^2+3x+2}$ на сумму простых дробей, для этого сначала знаменатель разложим на множители:

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2).$$

Тогда

$$f(x)=\frac{x}{(x+1)(x+2)}==\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=1,\\ 2A+B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1,\\ B=2\end{cases}.$$

Следовательно,

$$f(x)=\frac{-1}{x+1}+\frac{2}{x+2}=-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{\left(x/2\right)+1}.$$

Воспользуемся далее табличным разложением

$$\frac{1}{x+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ x\in(-1;1).$$

Получаем

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(x/2\right)^n \text{ или } f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}.$$

Первый степенной ряд сходится при $x\in(-1;1)$, а второй при $x\in(-2;2)$. Пересечением этих двух интервалов является интервал $x\in(-1;1)$.

Ответ: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{2^n},\ x\in(-1;1)$.

$$5.2.\ f(x)=x\sin^2\frac{3x}{2}$$

Используя формулу понижения степени $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$, преобразуем функцию $f(x)=x\sin^2\dfrac{3x}{2}$ к виду:

$$f(x)=x\cdot\frac{1-\cos 3x}{2}=\frac{x}{2}-x\cos 3x.$$

Воспользуемся далее табличным разложением

$$\cos t = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^{2n-2}}{(2n-2)!},\ t \in (-\infty;\infty).$$

В нашем случае $t = 3x$. В итоге получаем

$$f(x) = \frac{x}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{3^{2n-2} \cdot (2n-2)!},\ x \in (-\infty;\infty).$$

Ответ: $f(x) = \frac{x}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{3^{2n-2} \cdot (2n-2)!},\ x \in (-\infty;\infty).$

5.3. $f(x) = (x-1)\ln\left(4 + x^2\right);$

Представив функцию $f(x) = (x-1)\ln\left(4 + x^2\right)$ в виде

$$f(x) = (x-1)\ln 4\left(1 + 0,25x^2\right) =$$
$$= (x-1)\left(\ln 4 + \ln(1 + 0,25x^2)\right) = x\ln 4 - \ln 4 + x\ln(1 + 0,25x^2) - \ln(1 + 0,25x^2)$$

и используя табличное разложение $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n},\ x \in (-1;1)$, получаем

$$f(x) = x\ln 4 - \ln 4 + x\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(0,25)^n x^{2n}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(0,25)^n x^{2n}}{n},$$

$0,25x^2 \in (-1;1) \Rightarrow x \in (-2;2).$

Ответ: $f(x) = x\ln 4 - \ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{4^n \cdot n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{4^n \cdot n},\ x \in (-2;2).$

6. Вычислите определённые интегралы с точностью $\delta = 0,001$:

6.1. $\int_0^{0,1} \frac{dx}{\sqrt[5]{32 + x^5}}$

Применить формулу Ньютона-Лейбница для вычисления этого интеграла нельзя, так как первообразная от функции $x^2\sin(10x^2)$ не выражается в элементарных функциях. Поэтому разложим подынтегральную функцию в ряд:

$$x^2\sin(10x^2) = x^2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n-1)!} = x^3 - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^7}{7!} - .....$$

Полученный ряд можно почленно интегрировать на отрезке $[0;0,1]$, так как он лежит внутри интервала сходимости. В результате получаем

$$\int_0^{0,1}\frac{dx}{\sqrt[5]{32+x^5}}=0,5\int_0^{0,1}(1-(0,5x)^5+0,5\cdot(0,5x)^{10}+.....)dx=$$

$$=0,5\left(x-\frac{0,5^5x^6}{6}+\frac{0,5^{11}x^{11}}{11}-......\right)\Bigg|_0^{0,1}=0,5\cdot0,1-\frac{0,5^6\cdot0,1^6}{6}+\frac{0,5^{12}0,1^{11}}{11}+\ldots\approx$$

$$\approx 0,05.$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{0,1}\frac{dx}{\sqrt[5]{32+x^5}}\approx 0,05.$

6.2. $\displaystyle\int_0^{0,25}x^2\sin(10x^2)dx$

Применить формулу Ньютона-Лейбница для вычисления этого интеграла нельзя, так как первообразная от функции $x^2\sin(10x^2)$ не выражается в элементарных функциях. Поэтому разложим подынтегральную функцию в ряд:

$$x^2\sin(10x^2)=x^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)!}=x^3-\frac{x^5}{3!}+\frac{x^7}{5!}-.....,$$

$x\in(-\infty;\infty)$. Этот ряд можно почленно интегрировать на любом отрезке. В результате получаем

$$\int_0^{0,25}x^2\sin(10x^2)dx=\int_0^{0,25}\left(x^3-\frac{x^5}{6}+\frac{x^7}{120}+......\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{36}+\frac{x^8}{960}-......\right)\Bigg|_0^{0,25}=$$

$$=\frac{1}{1024}-\frac{1}{36\cdot4^6}+\frac{1}{120\cdot4^8}-....\approx 0,001.$$

Ответ: $\displaystyle\int_0^{0,25}x^2\sin(10x^2)dx\approx 0,001.$

6.3. $\displaystyle\int_0^{1/6}e^{-x^2/5}dx$

Применить формулу Ньютона-Лейбница для вычисления этого интеграла нельзя, так как первообразная от функции $e^{-x^2/5}$ не выражается в элементарных функциях. Поэтому разложим подынтегральную функцию в ряд, используя табличное разложение для функции e^x:

$$e^{-x^2/5}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{5^n\cdot n!}=1-\frac{x^2}{5}+\frac{x^4}{50}-\frac{x^6}{6\cdot 125}+.....,x\in(-\infty;\infty).$$

Полученный ряд сходится на всей числовой оси, следовательно, его можно почленно интегрировать на любом отрезке. В результате получаем

$$\int_0^{1/6}e^{-x^2/5}dx=\int_0^{1/6}\left(1-\frac{x^2}{5}+\frac{x^4}{50}-\frac{x^6}{6\cdot 125}+......\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{15}+\frac{x^5}{250}-\frac{x^7}{42\cdot 125}+\ldots\right)\Bigg|_0^{1/6}=\frac{1}{6}-\frac{1}{15\cdot 6^3}+\frac{1}{250\cdot 6^5}-\ldots\approx 0{,}167.$$

Ответ: $\int_0^{1/6}e^{-x^2/5}dx\approx 0{,}167.$

7. Разложите функцию в ряд Фурье на указанном отрезке. Постройте график суммы ряда Фурье:

$$7.1.\ f(x)=3+4x,\ x\in[-\pi;\pi]$$

Ряд Фурье для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-\pi;\pi]$ имеет вид

$$f(x)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),$$

где коэффициенты a_0,a_n,b_n находятся по формулам

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx.$$

Для вычисления коэффициентов ряда Фурье необходимо использовать формулу интегрирования по частям в определенном интеграле

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu,$$

а также значения $\sin x$ и $\cos x$ в точке $x=\pi n$:

$$\sin \pi n = 0, \ \cos \pi n = (-1)^n.$$

Найдем значения коэффициентов ряда Фурье для функции $f(x) = 3 + 4x$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3+4x)dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{(3+4x)^2}{2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\left((3+4\pi)^2 - (3-4\pi)^2\right) = \frac{1}{8\pi}\cdot 48\pi = 6;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3+4x)\cos nx dx = \begin{vmatrix} u = 3+4x & \Rightarrow du = 4dx \\ dv = \cos nx dx \Rightarrow v = \frac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left((3+4x)\frac{1}{n}\sin nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{4}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx \right) =$$

$$= \frac{4}{\pi n}\frac{1}{n}\cos nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{4}{\pi n}\frac{1}{n}(\cos n\pi - \cos n\pi) = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3+4x)\sin nx dx = \begin{vmatrix} u = 3+4x & \Rightarrow du = 4dx \\ dv = \sin nx dx \Rightarrow v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-(3+4x)\frac{1}{n}\cos nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{4}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left((-3-4\pi)\cos n\pi + (3-4\pi)\cos(-n\pi)\right) + \frac{1}{\pi n^2}\sin nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$-\frac{8}{n}\cos \pi n = \frac{8(-1)^{n+1}}{n}.$$

Подставим полученные значения коэффициентов в ряд Фурье:

$$f(x) = 3 + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx, \ x \in [-\pi; \pi].$$

$$7.2. \ f(x) = \begin{cases} 2x-1, & -3 \le x < 0, \\ 0, & 0 < x \le 3 \end{cases} \quad [-3; 3]$$

Ряд Фурье для функции $f(x)$, заданной на произвольном отрезке $[-l; l]$ имеет вид

$$f(x)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

где коэффициенты a_0, a_n, b_n находятся по формулам

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx;$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx;$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

В нашем случае $l=3$, а для вычисления коэффициентов Фурье необходимо воспользоваться свойством аддитивности определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\text{, если } c\in[a;b].$$

Найдем значения коэффициентов ряда Фурье для заданной функции:

$$a_0=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)dx=\frac{1}{3}\int_{-3}^{0}(2x-1)dx+\frac{1}{3}\int_{0}^{3}0dx=\frac{1}{3}\int_{-3}^{0}(2x-1)dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{(2x-1)^2}{2}\right|_{-3}^{3}=$$

$$=\frac{1}{12}\left(25-49\right)=-2;$$

$$a_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{1}{3}\int_{-3}^{0}(2x-1)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=\begin{vmatrix}u=2x-1 & \Rightarrow du=2dx\\ dv=\cos\frac{n\pi x}{3}dx & \Rightarrow v=\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\left.(2x-1)\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right|_{-3}^{0}-\frac{6}{n\pi}\int_{-3}^{0}\sin\frac{n\pi x}{3}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\cdot\frac{3}{\pi n}\left.\cos\frac{n\pi x}{3}\right|_{-3}^{0}=\frac{2}{\pi n}\cdot\frac{3}{\pi n}(\cos 0-\cos n\pi)=\frac{6}{\pi^2 n^2}\left(1-(-1)^n\right);$$

$$b_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{1}{3}\int_{-3}^{0}(2x-1)\sin\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=\begin{vmatrix}u=2x-1 & \Rightarrow du=2dx\\ dv=\sin\frac{n\pi x}{3}dx & \Rightarrow v=-\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(-(2x-1)\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{-3}^{0}+\frac{6}{n\pi}\int_{-3}^{0}\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{\pi n}-\frac{21}{\pi n}(-1)^n\right)-\frac{2}{\pi n}\cdot\frac{3}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{-3}^{0}=\frac{1}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right);$$

Подставим полученные значения коэффициентов в ряд Фурье:

$$f(x)=-1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{\pi^2 n^2}\left(1-(-1)^n\right)\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{3}+\frac{1}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)\cos\frac{n\pi x}{3}\right),$$

$x\in[-3;3]$.

8.1. Разложите функцию $f(x)=\sin\frac{5x}{2}$, $x\in[0;\pi]$ в ряд Фурье по синусам.

Для того чтобы разложить заданную функцию в ряд Фурье по синусам, необходимо доопределить ее на полуинтервале $[-\pi;0)$ как нечетную. Таким образом, коэффициенты a_0 и a_n равны нулю. Вычислим коэффициент b_n:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2{,}5x\cdot\sin nx dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos(n-2{,}5)x-\cos(n+2{,}5)x)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n-2{,}5}\sin(n-2{,}5)x-\frac{1}{n+2{,}5}\sin(n+2{,}5)x\right)\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{\sin(n-2{,}5)\pi}{\pi(n-2{,}5)}-\frac{\sin(n+2{,}5)\pi}{\pi(n+2{,}5)}.$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(n-2{,}5)\pi}{\pi(n-2{,}5)}-\frac{\sin(n+2{,}5)\pi}{\pi(n+2{,}5)}\right)\sin nx,\ \ x\in[0;\pi].$$

8.2. Разложите функцию $f(x)=\sin\frac{5x}{2}$, $x\in[0;\pi]$ в ряд Фурье по косинусам.

Для того, чтобы разложить заданную функцию в ряд Фурье по косинусам необходимо доопределить ее на полуинтервале $[-\pi;0)$ как четную. Таким образом, коэффициент b_n будет равен нулю. Вычислим коэффициенты a_0 и a_n:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2{,}5xdx = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos 2{,}5x}{2{,}5}\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{2}{2{,}5\pi}\left(\cos 2{,}5\pi - 1\right) = \frac{4}{5\pi};$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2{,}5x\cdot\cos nxdx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(n-2{,}5)x + \sin(n+2{,}5)x)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n-2{,}5}\cos(n-2{,}5)x - \frac{1}{n+2{,}5}\cos(n+2{,}5)x\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n-2{,}5} + \frac{1}{n+2{,}5}\right) = \frac{2n}{\pi(n^2-6{,}25)}.$$

$$f(x) = \frac{2}{5\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{\pi(n^2-6{,}25)}\cos nx,\ \ x\in[0;\pi].$$

Ответ: $f(x) = \frac{2}{5\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{\pi(n^2-6{,}25)}\cos nx,\ x\in[0;\pi]$.