

§19. Скалярное поле

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть G – некоторая область в пространстве $Oxyz$ [на плоскости xOy]. Говорят, что на G задано **скалярное поле**, если в каждой точке $M \in G$ определена функция 3-х переменных $u = f(M)$ [функция 2-х переменных $z = f(M)$].

Поведение скалярного поля характеризуют

- 1) производная по направлению;
- 2) градиент.

1. Производная по направлению

Пусть $z = f(x, y)$ определена в области $D \subseteq xOy$,
 $M_0(x_0, y_0) \in D$,
 $\underline{s}$ — некоторый вектор.

Пусть $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$, такая, что $\overline{M_0 M} \uparrow \uparrow \underline{s}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если существует и конечен

$$\lim_{|M_0 M| \rightarrow 0} \frac{\Delta z(M_0)}{|M_0 M|} = \lim_{|M_0 M| \rightarrow 0} \frac{z(M) - z(M_0)}{|M_0 M|}$$

то его называют **производной функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ по направлению вектора $\underline{s}$** .

Обозначают:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial s}, \quad \frac{\partial z(M_0)}{\partial s}$$
$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial \ell}, \quad \frac{\partial z(M_0)}{\partial \ell}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

$\frac{\Delta z(M_0)}{|M_0 M|}$ – средняя скорость изменения функции $z = f(x, y)$ на отрезке $M_0 M$.

$\Rightarrow \lim_{|M_0 M| \rightarrow 0} \frac{\Delta z(M_0)}{|M_0 M|}$ – скорость изменения функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ в направлении вектора $\vec{s}$.

Так же как и для функции одной переменной доказывается, что

- 1) если $\frac{\partial z}{\partial s}(M_0) > 0$, то функция в точке $M_0(x_0, y_0)$ в направлении вектора $\vec{s}$ возрастает;
- 2) если $\frac{\partial z}{\partial s}(M_0) < 0$, то функция в точке $M_0(x_0, y_0)$ в направлении вектора $\vec{s}$ убывает;
- 3) если $\frac{\partial z}{\partial s}(M_0) = 0$, то в направлении вектора $\vec{s}$ функция не изменяется.

$\Rightarrow$ направление вектора $\vec{s}$ – направление линии уровня функции, проходящей через точку M_0

(вектор $\vec{s}$ перпендикулярен кривой уровня функции в точке M_0)

Замечание.

Частные производные функции являются частным случаем производной по направлению. А именно:

- 1) $f'_x(M_0)$ – производная функции по направлению вектора $\mathbf{i}$ (направлению оси Ox);
- 2) $f'_y(M_0)$ – производная функции по направлению вектора $\mathbf{j}$ (направлению оси Oy).

Пусть $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$. Тогда

$$\Delta z(M_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \mu \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

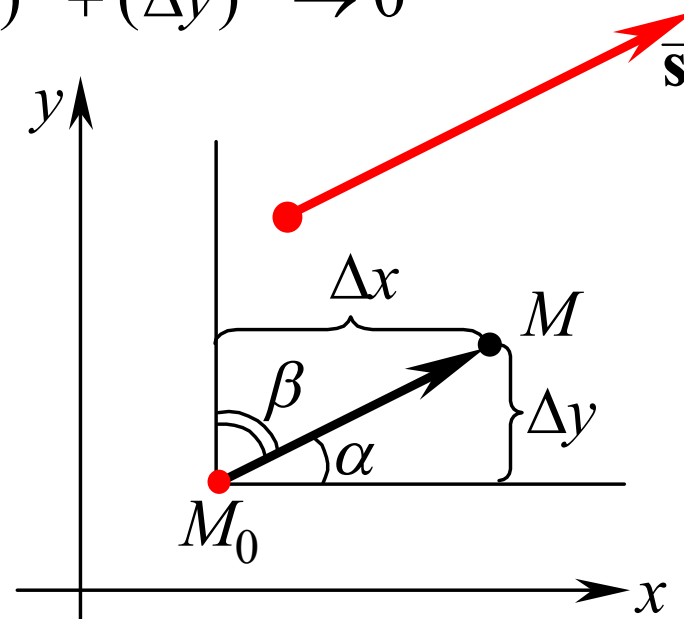
где μ – бесконечно малая при $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$

Обозначим $|M_0M| = \rho$. Тогда

$$\Delta x = \rho \cdot \cos \alpha, \quad \Delta y = \rho \cdot \cos \beta$$

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \rho,$$

где $\cos \alpha, \cos \beta$ – направляющие косинусы вектора $\vec{s}$.



Следовательно,

$$\Delta z(M_0) = f'_x(x_0, y_0)\rho \cos \alpha + f'_y(x_0, y_0)\rho \cos \beta + \mu \cdot \rho$$

Разделив на $|M_0M| = \rho$ и перейдя к пределу при $\rho \rightarrow 0$, получим

$$\lim_{|M_0M| \rightarrow 0} \frac{\Delta z(M_0)}{|M_0M|} = \lim_{\rho \rightarrow 0} (f'_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f'_y(x_0, y_0) \cos \beta + \mu)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z(M_0)}{\partial s} = f'_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f'_y(x_0, y_0) \cos \beta,$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$ – направляющие косинусы вектора $\vec{s}$.

Замечание. Аналогично определяется и обозначается производная по направлению для функции 3-х переменных $u = f(x, y, z)$.
Для нее получим

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial s} = f'_x(M_0) \cos \alpha + f'_y(M_0) \cos \beta + f'_z(M_0) \cos \gamma,$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{s}$.

2. Градиент

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Градиентом функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется вектор с координатами $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$.*

Обозначают: **grad** $z(M_0)$.

СВОЙСТВА ГРАДИЕНТА

1) **grad** $z(M_0)$ определяет направление, в котором функция в точке M_0 возрастает с наибольшей скоростью.

При этом $|\mathbf{grad}z(M_0)|$ равен наибольшей скорости изменения функции в точке M_0 .

2) **grad** $z(M_0)$ перпендикулярен к линии уровня функции $z = f(x, y)$, проходящей через точку M_0 .

Замечание. Для функции 3-х переменных градиент определяется и обозначается аналогичным образом, и сохраняет все свои свойства.

§20. Полезные теоретические сведения

1. Формула Тейлора для функции одной переменной

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема в окрестности точки x_0 .

Тогда
$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \beta_1 \cdot \Delta x ,$$

где $\beta_1(x_0, \Delta x)$ – бесконечно малая при $\Delta x \rightarrow 0$.

$$\Rightarrow f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + \beta_1 \cdot \Delta x . \quad (1)$$

Обозначим $x_0 + \Delta x = x$,

$$\Rightarrow \Delta x = x - x_0$$

и формула (1) примет вид:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \beta_1 \cdot (x - x_0) , \quad (2)$$

где $\beta_1(x_0, x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$.

Если $y = f(x)$ n раз дифференцируема в окрестности точки x_0 , то применим n раз формулу (2) к функции β_i и получим (3):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \beta_n(x-x_0)^n$$

где $\beta_n(x_0, x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$.

Формулу (3) называют **формулой Тейлора разложения функции $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$ (в окрестности точки x_0).**

Слагаемое

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называют **многочленом Тейлора функции $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$.**

Слагаемое $R_n = \beta_n \cdot (x - x_0)^n$ называют **остаточным членом формулы Тейлора.**

Остаточный член R_n можно записать в нескольких формах:

1) $R_n = \beta_n \cdot (x - x_0)^n = o((x - x_0)^n)$ – **форма Пеано**;

2) если $y = f(x)$ $n + 1$ раз дифференцируема в окрестности точки x_0 , то R_n можно записать в **форме Лагранжа** :

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

где c – точка между x_0 и x .

Если в формуле Тейлора $x_0 = 0$, то она примет вид (4):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Формулу (4) называют **формулой Маклорена**.

Применение формулы Маклорена (Тейлора):

- 1) в приближенных вычислениях (значений функций, определенных интегралов и т.п.);
- 2) при нахождении пределов.

2. Формула Тейлора для функции n переменных

Пусть $y = f(x)$ n раз дифференцируема в окрестности точки x_0 .

Тогда
$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0) \cdot (\Delta x)^n.$$

Если c – точка между x_0 и x , то $\exists \theta \in (0; 1)$ такое, что

$$c = x_0 + \theta \cdot \Delta x.$$

Следовательно, формулу (3)

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \\ + \beta_n(x-x_0)^n$$

можно записать в виде

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta \cdot \Delta x)}{(n+1)!}.$$

Пусть $z = f(x,y)$ $n + 1$ раз дифференцируема в некоторой окрестности U точки $M_0(x_0, y_0)$.

Тогда, как и в случае функции $y = f(x)$ справедлива формула

$$f(M) = f(M_0) + \frac{df(M_0)}{1!} + \frac{d^2 f(M_0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(M_0)}{n!} + R_n, \quad (5)$$

где $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U$

$$R_n = \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1)$$

и $R_n = o(\rho^n)$ при $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$.

Формулу (5) называют **формулой Тейлора для функции $z = f(x,y)$ в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ (по степеням $(x - x_0), (y - y_0)$)**.

Слагаемое

$$f(M_0) + \frac{df(M_0)}{1!} + \frac{d^2 f(M_0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(M_0)}{n!}$$

называют *многочленом Тейлора функции $f(x,y)$ в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$* .

Слагаемое R_n называют *остаточным членом формулы Тейлора функции $f(x,y)$ в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$* .

Аналогичный вид имеет формула Тейлора для функций большего числа переменных

3. Понятие квадратичной формы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многочлен n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ в котором все члены имеют одинаковую степень, называется **однородным** или **формой**.

ПРИМЕРЫ.

1) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 4x_2 - 5x_3$
– однородный 1-й степени (линейная форма);

2) $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2$
– однородный 2-й степени (**квадратичная форма**);

3) $f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_1^2x_2 + x_1x_2^2 - 4x_2^3$
– однородный 3-й степени.

Общий вид квадратичной формы:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + \\ & + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + \\ & + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n + \\ & + \dots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n. \end{aligned}$$

Будем считать, что $a_{ij} = a_{ji}$.

Тогда квадратичную форму можно записать в виде

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется **положительно (отрицательно)** определенной если

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0 \quad [f(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0]$$

для любых, не равных одновременно нулю, значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы называются **знакоопределенными**.

Если квадратичная форма может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то она называется **неопределенной**.

Симметрическая матрица из коэффициентов квадратичной формы, т.е. матрица вида

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется **матрицей квадратичной формы**.

Главными угловыми минорами квадратной матрицы $C = (c_{ij})$ называются ее миноры вида

$$c_{11}, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix} \quad \text{è ò.ä.}$$

ТЕОРЕМА 1 (критерий Сильвестра).

- 1) *Квадратичная форма положительно определена $\Leftrightarrow$ все главные угловые миноры ее матрицы – положительные.*
- 2) *Квадратичная форма отрицательно определена $\Leftrightarrow$ знаки главных угловых миноров ее матрицы чередуются, начиная с минуса, т.е.*

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} < 0 \quad \text{è ò.ä.}$$

4. Применение к исследованию функций n переменных на экстремум

Пусть $z = f(x, y)$, $D(z) = D \subseteq xOy$,

$$M_0(x_0, y_0) \in D.$$

Пусть $z = f(x, y)$ трижды дифференцируема в окрестности U точки M_0 и M_0 – критическая точка для $z = f(x, y)$. Тогда

1) $\forall M \in U$

$$f(M) = f(M_0) + \frac{df(M_0)}{1!} + \frac{d^2 f(M_0)}{2!} + R_2,$$

где $R_2 = o(\rho^2)$ при $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$;

$$2) f'_x(M_0) = 0, \quad f'_y(M_0) = 0$$

$$\Rightarrow df(M_0) = 0 \quad \text{и} \quad f(M) = f(M_0) + \frac{d^2 f(M_0)}{2!} + R_2,$$

$$\Rightarrow \Delta f(M_0) \approx \frac{d^2 f(M_0)}{2!},$$

$$\Rightarrow \Delta f(M_0) \approx \frac{1}{2}(f''_{xx}(M_0)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(M_0)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(M_0)\Delta y^2).$$

Так как $d^2f(M_0)$ – квадратичная форма с матрицей

$$\begin{pmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{xy}(M_0) & f''_{yy}(M_0) \end{pmatrix}$$

получаем следующие достаточные условия экстремума функции 2-х переменных:

- 1) функция $z = f(x,y)$ имеет в точке $M_0(x_0,y_0)$ максимум, если квадратичная форма $d^2f(M_0)$ отрицательно определена, т.е.

$$f''_{xx}(M_0) < 0, \quad \begin{vmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{xy}(M_0) & f''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} > 0;$$

- 2) функция $z = f(x,y)$ имеет в точке $M_0(x_0,y_0)$ минимум, если квадратичная форма $d^2f(M_0)$ положительно определена, т.е.

$$f''_{xx}(M_0) > 0, \quad \begin{vmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{xy}(M_0) & f''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} > 0.$$