§13. Частные производные высших порядков

Пусть $z = f(x,y)$ имеет $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$, определенные на $D \subseteq xOy$.

Функции $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ называют также ***частными производными первого порядка функции*** $f(x,y)$ (или ***первыми частными производными функции*** $f(x,y)$).

$f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ в общем случае функции переменных x и y.

Частные производные по x и по y от $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$, если они существуют, называются ***частными производными второго порядка*** (или ***вторыми частными производными***) ***функции*** $f(x,y)$.

Обозначения.

1) $\frac{\partial}{\partial x}\left(f'_x(x,y)\right)$: $\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}, \qquad z''_{xx}, \qquad f''_{xx}(x,y);$

2) $\frac{\partial}{\partial y}\left(f'_x(x,y)\right)$: $\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}, \qquad z''_{xy}, \qquad f''_{xy}(x,y);$

3) $\frac{\partial}{\partial x}\left(f'_y(x,y)\right)$: $\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}, \qquad z''_{yx}, \qquad f''_{yx}(x,y);$

4) $\frac{\partial}{\partial y}\left(f'_y(x,y)\right)$: $\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}, \qquad z''_{yy}, \qquad f''_{yy}(x,y).$

Частные производные второго порядка в общем случае являются функциями двух переменных.

Их частные производные (если они существуют) называют ***частными производными третьего порядка*** (или ***третьими частными производными***) ***функции*** $z = f(x,y)$.

Продолжая этот процесс, назовем ***частными производными порядка n функции*** $z = f(x,y)$ частные производные от ее частных производных $(n-1)$-го порядка.

Обозначения аналогичны обозначениям для частных производных 2-го порядка. Например:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right), \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right), \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\right).$$

Частные производные порядка $n > 1$ называют ***частными производными высших порядков***.

Частные производные высших порядков, взятые по разным аргументам, называются ***смешанными***.

Частные производные высших порядков, взятые по одному аргументу, называют иногда ***несмешанными***.

ПРИМЕР. Найти частные производные 2-го порядка от функции

$$z = x^4 + 3x^2y^5 .$$

ТЕОРЕМА 1 (условие независимости смешанной производной от последовательности дифференцирований).

Пусть $z = f(x,y)$ в некоторой области $D \subseteq xOy$ имеет все частные производные до n-го порядка включительно и эти производные непрерывны.

Тогда смешанные производные порядка m $(m \leq n)$, отличающиеся лишь последовательностью дифференцирований, совпадают между собой.

§14. Дифференцируемость функций нескольких переменных

1. Дифференцируемые функции нескольких переменных

Пусть $z = f(x,y)$, $D(z) = D \subseteq xOy$, D – область (т.е. открытое связное множество).

Пусть $\forall M_0(x_0,y_0) \in D$.

Придадим x_0 и y_0 приращение Δx и Δy соответственно (так, чтобы точка $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$).

При этом $z = f(x,y)$ получит приращение

$$\Delta z(M_0) = f(M) - f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

$\Delta z(M_0)$ называется ***полным приращением функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$***, соответствующим Δx и Δy.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция* $z = f(x,y)$ *называется* ***дифференцируемой в точке*** $M_0(x_0,y_0)$ *если ее полное приращение в этой точке может быть записано в виде*

$$\Delta z(M_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha_1 \cdot \Delta x + \alpha_2 \cdot \Delta y\ , \qquad (1)$$

где A, B *– некоторые числа,*

α_1, α_2 *– бесконечно малые при* $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$

(или, что то же, *при* $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$).

Замечание. Функции α_1 и α_2 зависят от $x_0, y_0, \Delta x, \Delta y$.

Равенство (1) можно записать и в более сжатой форме:

$$\Delta z(M_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \rho\ , \qquad (2)$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$,

$\alpha = \dfrac{\alpha_1 \cdot \Delta x + \alpha_2 \cdot \Delta y}{\rho}$ – бесконечно малая при $\rho \to 0$.

Функция $z = f(x,y)$, дифференцируемая в каждой точке некоторой области D, называется ***дифференцируемой в*** D.

Напомним: для дифференцируемой функции $y = f(x)$ справедливы утверждения:

1) $y = f(x)$ дифференцируема в $x_0 \Leftrightarrow \exists f'(x_0)$;

2) $y = f(x)$ дифференцируема в $x_0 \Rightarrow y = f(x)$ непрерывна в x_0 .

ТЕОРЕМА 1 (необходимые условия дифференцируемости ФНП)

Пусть функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$. Тогда она непрерывна в этой точке и имеет в ней частные производные по обеим независимым переменным. Причем

$$f'_x(x_0, y_0) = A, \quad f'_y(x_0, y_0) = B.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Замечания.

1) С учетом теоремы 1 равенства (1) и (2) можно записать соответственно в виде:

$$\Delta z(M_0) = \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha_1 \cdot \Delta x + \alpha_2 \cdot \Delta y \qquad (3)$$

$$\Delta z(M_0) = \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha \cdot \rho \qquad (4)$$

где α_1, α_2 – бесконечно малые при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$,

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

α – бесконечно малая при $\rho \to 0$.

2) Утверждение обратное теореме 1 неверно. Из непрерывности функции двух переменных в точке и существования в этой точке ее частных производных еще не следует дифференцируемость функции.

ПРИМЕР. Функция $z = x + y + \sqrt{|x| \cdot |y|}$ непрерывна в точке (0;0) и имеет в этой точке частные производные, но не является в этой точке дифференцируемой.

ТЕОРЕМА 2 (достаточные условия дифференцируемости ФНП)

Пусть функция $z = f(x,y)$ *имеет в некоторой окрестности точки* $M_0(x_0,y_0)$ *частные производные* $f'_x(x,y)$ *и* $f'_y(x,y)$, *причем в самой точке* M_0 *эти производные непрерывны.*

Тогда функция $z = f(x,y)$ *дифференцируема в этой точке.*

2. Дифференциал ФНП

Пусть функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$. Тогда

$$\Delta z(M_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha_1 \cdot \Delta x + \alpha_2 \cdot \Delta y$$

где α_1, α_2 – бесконечно малые при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Если $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$, то линейная относительно Δx и Δy часть ее полного приращения в этой точке, т.е.*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y$$

называется ***полным дифференциалом функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$*** *и обозначается $dz(M_0)$ или $df(x_0,y_0)$.*

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ полного дифференциала функции ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ.

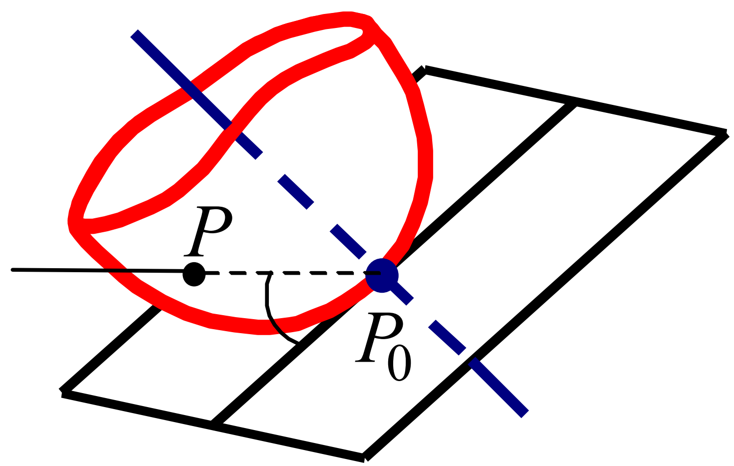
Пусть S – поверхность,

P_0 – фиксированная точка на поверхности S,

P – текущая точка на поверхности S.

Проведем секущую прямую PP_0.

Плоскость, проходящая через точку P_0, называется ***касательной плоскостью к поверхности S в точке P_0***, если угол между секущей PP_0 и этой плоскостью стремится к нулю когда точка P стремится к P_0, двигаясь по поверхности S произвольным образом.



Прямая, проходящая через точку P_0 перпендикулярно касательной плоскости к поверхности в этой точке, называется ***нормалью к поверхности в точке*** P_0.

ДОКАЗАНО, что

1) если функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$, то поверхность $z = f(x,y)$ имеет в точке $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ касательную плоскость.

Ее уравнение:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$\Rightarrow$ уравнение нормали к поверхности $z = f(x,y)$ в $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - f(x_0, y_0)}{-1}$$

2) если поверхность задана уравнением $F(x,y,z) = 0$,

$F(x,y,z)$ – дифференцируема в $P_0(x_0,y_0,z_0)$, причем хотя бы одна из ее частных производных не обращается в P_0 в ноль,

то касательная плоскость к поверхности в точке $P_0(x_0,y_0,z_0)$ существует и ее уравнение

$$F'_x(P_0)(x-x_0)+F'_y(P_0)(y-y_0)+F'_z(P_0)(z-z_0)=0$$

$\Rightarrow$ уравнения нормали к поверхности $F(x,y,z) = 0$ в $P_0(x_0,y_0,z_0)$:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(P_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(P_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(P_0)}$$

Замечание.

Точка $P_0(x_0,y_0,z_0)$ поверхности $F(x,y,z) = 0$, в которой все частные производные функции $F(x,y,z)$ обращаются в ноль, называется ***особой точкой поверхности***.

Пусть функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$.

$\Rightarrow$ поверхность $z = f(x,y)$ имеет в точке $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ касательную плоскость. Ее уравнение:

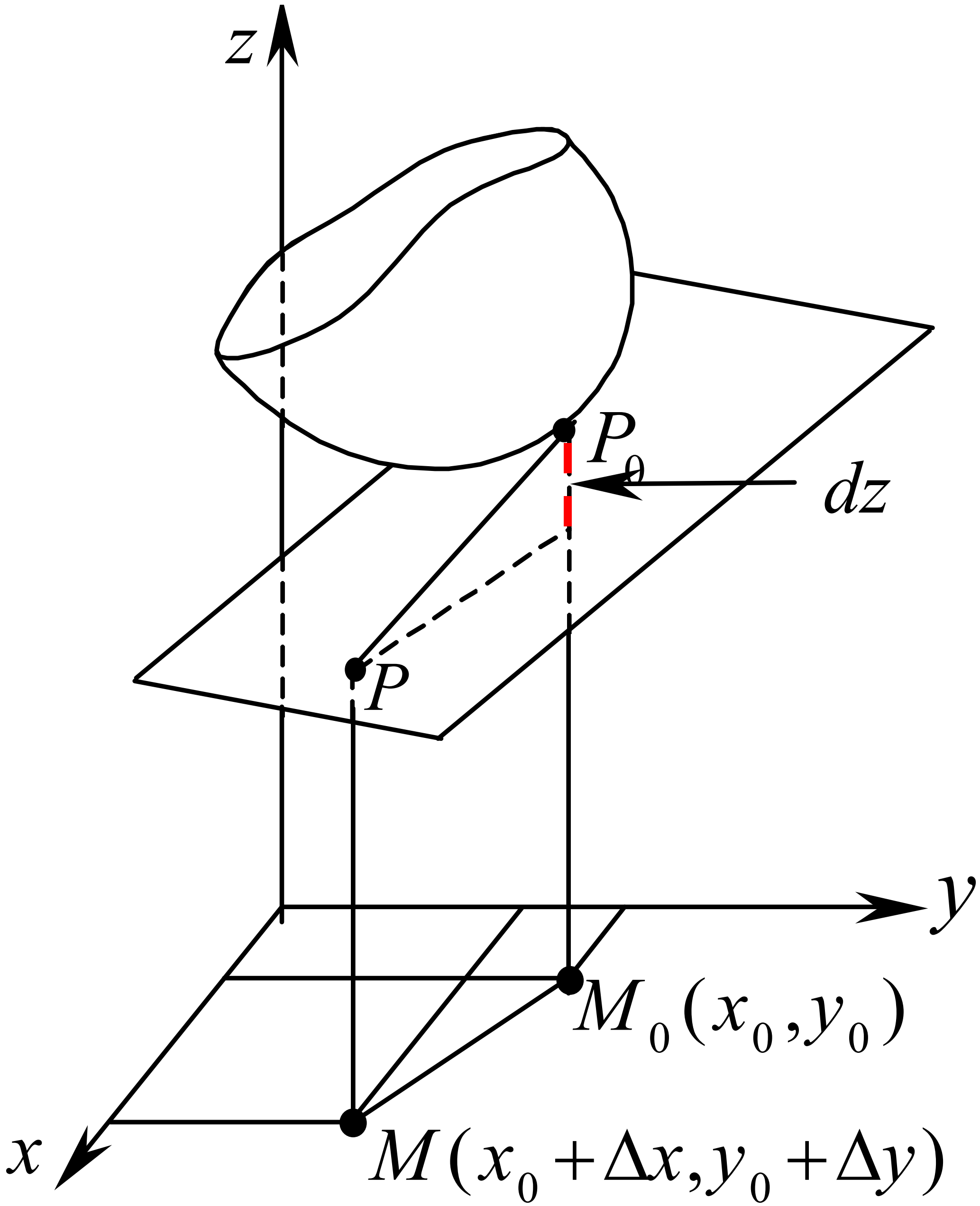
$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Обозначим $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$.

Тогда уравнение касательной плоскости примет вид:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

ТАКИМ ОБРАЗОМ, полный дифференциал функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ равен приращению, которое получает аппликата точки $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ касательной плоскости к поверхности $z = f(x,y)$, когда ее координаты x_0 и y_0 получают приращения Δx и Δy соответственно.



z
P_0
dz
P
y
$M_0(x_0, y_0)$
x
$M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$

Очевидно, что соответствие $(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y) \to df(x_0,y_0)$ является функцией (четырех переменных).

Ее называют ***полным дифференциалом функции $z = f(x,y)$*** и обозначают dz или $df(x,y)$.

Легко доказать, что полный дифференциал функции n переменных обладает теми же свойствами, что и дифференциал функции одной переменной.

В частности, для $df(x,y)$ существует вторая, ***инвариантная форма записи***:

$$dz = f'_x(x,y)\cdot dx + f'_y(x,y)\cdot dy. \qquad (5)$$