Функции нескольких переменных

§11. Определение функции нескольких переменных. Предел и непрерывность ФНП

1. Определение функции нескольких переменных

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.
Пусть $X = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i \subseteq \mathbb{R}\}$, $U \subseteq \mathbb{R}$.
Функция $f : X \to U$ *называется* ***функцией n переменных*** **.**

Записывают: $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,
где f – закон, задающий соответствие между $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и u.
Значение $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при $x_1 = x_{01}, x_2 = x_{02}, \ldots, x_n = x_{0n}$ записывают в виде

$$u = f(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}) \quad \text{или} \quad u\big|_{x_1 = x_{01}, x_2 = x_{02}, \ldots, x_n = x_{0n}}$$

Называют:

X – область определения функции (Обозначают: $\mathrm{D}(u)$),

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – аргументы (независимые переменные),

U – область значений (Обозначают: $\mathrm{E}(u)$),

u ($u \in U$) – зависимая переменная (функция).

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФНП

1) словесный;
2) табличный;
3) аналитический:
   а) явное задание (т.е. формулой $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$)
   б) неявное задание (т.е. уравнением $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0$).
4) Функцию $z = f(x,y)$ можно задать графически.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Графиком функции*** *$z = f(x,y)$ называется геометрическое место точек пространства с координатами* $(x; y; f(x,y))$, $\forall (x,y) \in \mathrm{D}(z)$.

График функции $z = f(x,y)$ будем также называть «поверхностью $z = f(x,y)$ ».

Линией уровня функции $z = f(x,y)$ называют геометрическое место точек (x,y) плоскости, в которых функция принимает одно и то же значение C.

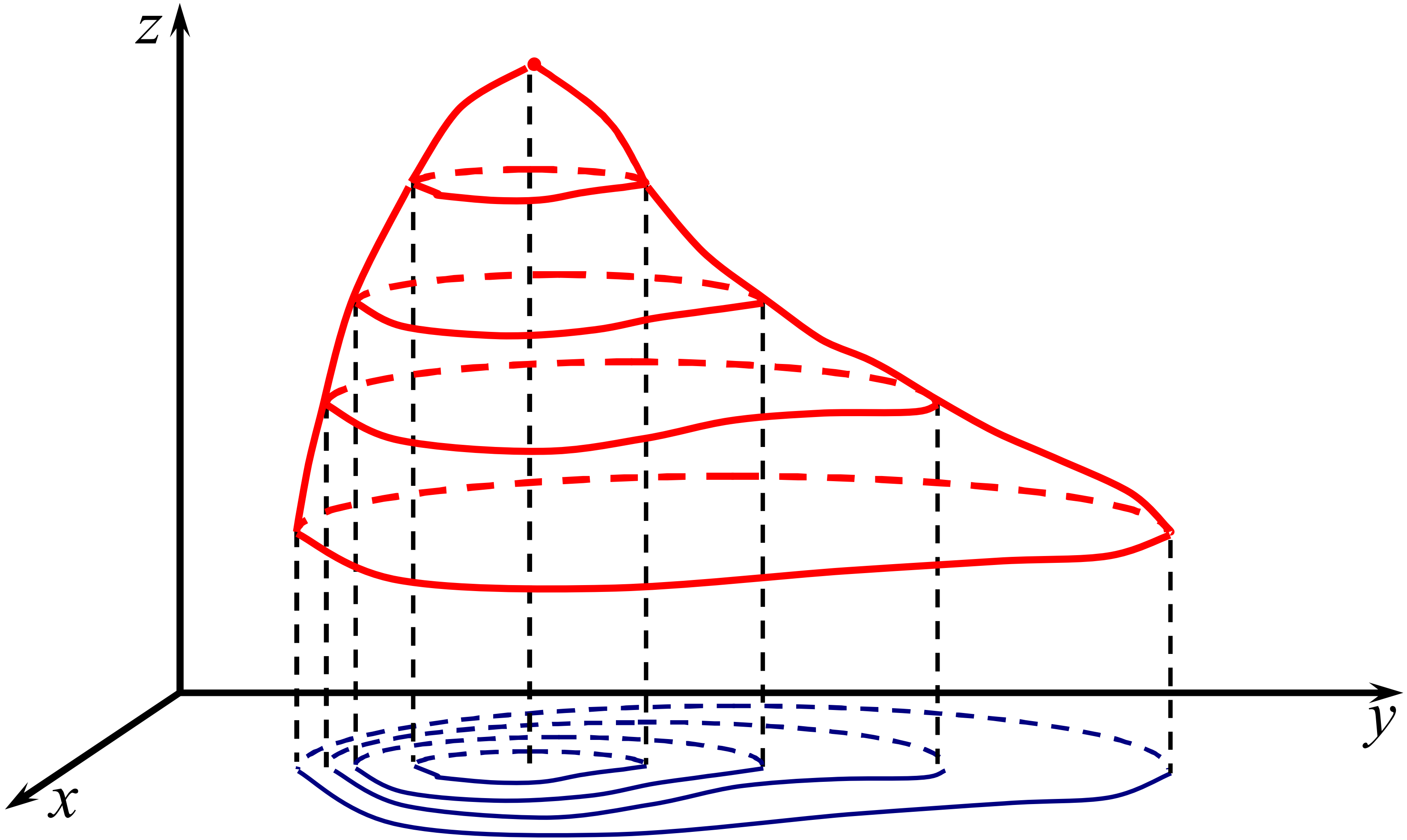
$\Rightarrow$ 1) Линия уровня – линия в D(z), которая имеет уравнение

$$f(x,y) = C .$$

2) Линия уровня – проекция на плоскость xOy линии пересечения графика функции $z = f(x,y)$ и плоскости $z = C$.

Полагаем C равными $C_1, C_1 + h, C_1 + 2h, \ldots, C_1 + nh$.

Получим линии уровня, по расположению которых можно судить о графике функции и, следовательно, о характере изменения функции.



Таким образом, там, где линии «гуще», функция изменяется быстрее (поверхность, изображающая функцию, идет круче).

Поверхностью уровня функции $u = f(x,y,z)$ называют геометрическое место точек пространства $Oxyz$, в которых функция принимает одно и то же значение C.

Уравнение поверхности уровня: $f(x,y,z) = C$.

2. Предел функции нескольких переменных

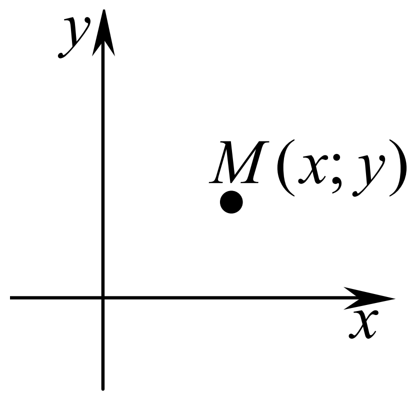
Напомним:

Число $A\in\mathbb{R}$ *называется* ***пределом функции f(x) при x стремящемся к*** $\boldsymbol{x_0}$ (пределом функции $f(x)$ в точке x_0), *если* $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ *такое, что*

$$\text{если } x\in U^*(x_0, \delta)\text{ , то } f(x)\in U(A, \varepsilon)\ .$$

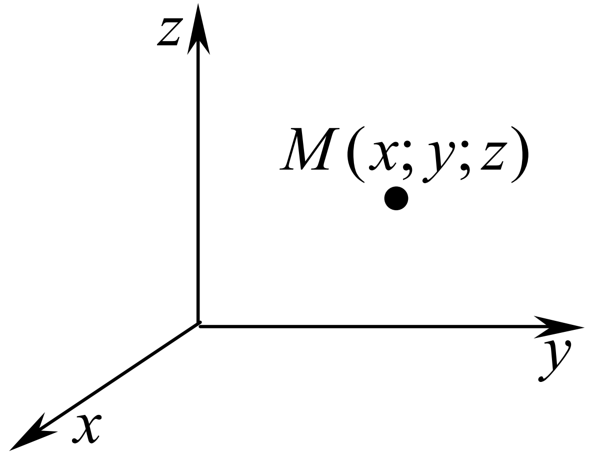
$\forall (x,y) \leftrightarrow M \in xOy$;

$\Rightarrow\ z = f(x,y) = f(M)$, где $M \in D \subseteq xOy$.



$\forall (x,y,z) \leftrightarrow M \in Oxyz$

$\Rightarrow\ u = f(x,y,z) = f(M)$, где $M \in D \subseteq Oxyz$.



По аналогии, последовательность $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем считать декартовыми координатами точки n-мерного пространства и рассматривать функцию n переменных как функцию точки этого пространства.

Обозначают:

$\mathbb{R}^n$ – n-мерное пространство,

$u = f(M)$, где $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ – функции n переменных.

Если $M_1(x_1)$, $M_2(x_2) \in Ox$, то расстояние между ними (обозначают: $|M_1M_2|$) находится по формуле:

$$|M_1M_2| = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}.$$

Если $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2) \in xOy$, то

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2) \in Oxyz$, то

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Обобщая эти формулы, будем считать, что расстояние между точками n-мерного пространства

$$M_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ M_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

равно

$$|M_1M_2| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}.$$

Пусть $M_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}) \in \mathbb{R}^n$. Множество точек $\mathbb{R}^n$, находящихся от M_0 на расстоянии меньшем ε, будем называть ***ε-окрестностью точки M_0*** и обозначать $U(M_0,\varepsilon)$.

Иначе говоря, ε-окрестность $M_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ состоит из таких точек $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которых имеет место неравенство

$$|M_0M| = \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 + \ldots + (x_n - x_{0n})^2} < \varepsilon$$

При $n = 1$

$$U(M_0,\varepsilon) = \{M \in Ox \mid |M_0M| = |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

При $n = 2$

$$U(M_0,\varepsilon) = \{M \in xOy \mid |M_0M| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon\},$$

т.е. $U(M_0,\varepsilon)$ точки $M_0(x_0,y_0)$ – круг с центром в точке $M_0(x_0,y_0)$ и радиусом ε.

При $n = 3$

$$U(M_0,\varepsilon) = \{M \in Oxyz \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \varepsilon\},$$

т.е. $U(M_0,\varepsilon)$ точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – шар с центром в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и радиусом ε.

ε-окрестность точки $M_0 \in \mathbb{R}^n$ без самой точки M_0 будем называть ***проколотой*** и обозначать $U^*(M_0, \varepsilon)$

Пусть функция n переменных $u = f(M)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0 \in \mathbb{R}^n$, кроме, может быть, самой M_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Число $A \in \mathbb{R}$ называется ***пределом функции $f(M)$ при M стремящемся к M_0*** (пределом функции $f(M)$ в точке M_0), *если* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ *такое, что*

$$\text{если } M \in U^*(M_0, \delta) \text{ , то } f(M) \in U(A, \varepsilon) \text{ .}$$

Записывают в общем случае:

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A, \qquad f(M) \to A, \text{ ïðè } M \to M_0$$

Для функции $z = f(x,y)$:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A.$$

Замечания.

1) Условие $M \in \mathrm{U}^*(M_0, \delta)$ означает, что выполняется неравенство:
$$0 < \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 + \ldots + (x_n - x_{0n})^2} < \delta$$

2) Условие $f(M) \in \mathrm{U}(A, \varepsilon)$ означает, что для $f(M)$ выполняется неравенство $$| f(M) - A | < \varepsilon$$

3) Так как формально определение предела функции n переменных ничем не отличается от определения предела функции одной переменной, то все утверждения, которые были получены о пределах функции одной переменной и в которых не используется упорядоченность точек числовой прямой, остаются верными и для предела функции n переменных.

4) Определение бесконечно большой функции переносится на случай функции n переменных тоже дословно (сформулировать самостоятельно).

3. Непрерывность функции нескольких переменных

Пусть $u = f(M)$ определена в некоторой окрестности $M_0 \in \mathbb{R}^n$.
ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Функция* $f(M)$ *называется* ***непрерывной в точке*** $\boldsymbol{M_0}$ *если справедливо равенство*

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$$

или, иначе говоря, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ *такое, что*
если $M \in U(M_0, \delta)$ (т.е. $|MM_0| < \delta$),
то $f(M) \in U(f(M_0), \varepsilon)$ (т.е. $|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$).

Справедливы утверждения:
1) арифметические операции над непрерывными в точке M_0 функциями приводят к непрерывным в этой точке функциям (при условии, что деление производится на функцию, не обращающуюся в ноль);
2) сложная функция, составленная из нескольких непрерывных функций, тоже будет непрерывной.

Если функция $u = f(M)$ определена в некоторой окрестности точки M_0 (за исключением, может быть, самой M_0), но не является в этой точке непрерывной, то ее называют ***разрывной в точке M_0***, а саму точку M_0 – ***точкой разрыва.***

Пусть G – некоторое множество точек в $\mathbb{R}^n$ и $M_0 \in G$.

Точка M_0 называется ***внутренней точкой*** множества G, если $\exists U(M_0,\varepsilon) \subset G$.

Множество, каждая точка которого – внутренняя, называется ***открытым***.

Точка M_0 называется ***граничной точкой*** множества G, если в любой ее ε-окрестности есть как точки из G, так и точки, не принадлежащие G.

Множество всех граничных точек множества G называется его ***границей***.

Множество, содержащее свою границу, называется ***замкнутым***.

Множество G называется ***связным***, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, состоящей из точек этого множества.

Замечание.

Непрерывной кривой в n-мерном пространстве называется геометрическое место точек $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координаты которых удовлетворяют уравнениям

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ \ldots,\ x_n = x_n(t),$$

где $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, …, $x_n = x_n(t)$ – непрерывные функции параметра $t \in (\alpha;\beta)$.

Связное открытое множество называется ***областью***.

Связное замкнутое множество называется ***замкнутой областью***.

Область, целиком лежащая в некоторой ε-окрестности точки $O(0,0,\ldots,0)$, называется ***ограниченной***.

ТЕОРЕМА (аналог теорем Вейерштрасса и Коши для ФНП).

Если функция n *переменных* $u = f(M)$ *непрерывна в замкнутой и ограниченной области* D, *то она*

1) *ограничена*;
2) *достигает в* D *своего наибольшего и наименьшего значения*;
3) *принимает все промежуточные значения между любыми двумя своими значениями*.

§12. Частные производные

Для наглядности, здесь и далее все определения и утверждения будем формулировать для функции 2-х (или 3-х) переменных. На случай большего числа неизвестных они обобщаются естественным образом.

Пусть $z = f(x,y)$, $D(z) = D \subseteq xOy$, D – открытая область.

Пусть $\forall M_0(x_0,y_0) \in D$.

Придадим x_0 приращение Δx, оставляя значение y_0 неизмененным (так, чтобы точка $M(x_0 + \Delta x, y_0) \in D$).

При этом $z = f(x,y)$ получит приращение

$$\Delta_x z(M_0) = f(M) - f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

$\Delta_x z(M_0)$ называется ***частным приращением*** функции $z = f(x,y)$ ***по x в точке*** $M_0(x_0,y_0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Предел при* $\Delta x \to 0$ *отношения*

$$\frac{\Delta_x z(M_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

(если он существует и конечен) *называется* ***частной производной функции*** $z = f(x,y)$ ***по переменной x в точке*** $M_0(x_0,y_0)$.

Обозначают:

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad z'_x(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad f'_x(x_0, y_0)$$

или

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}, \quad z'_x(M_0), \qquad \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \quad f'_x(M_0)$$

Замечания.

1) Обозначения
$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$$
надо понимать как целые символы, а не как частное двух величин. Отдельно взятые выражения $\partial z(x_0,y_0)$ и ∂x смысла не имеют.

2) $z'_x(M_0)$ характеризует скорость изменения функции $z = f(x,y)$ по x в точке $M_0(x_0,y_0)$ (физический смысл частной производной по x).

Аналогично определяется частная производная функции $z = f(x,y)$ по переменной y в точке $M_0(x_0,y_0)$:
$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z(M_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Обозначают:
$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad z'_y(M_0), \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad f'_y(M_0)$$

Соответствие

$$(x_0; y_0) \to f'_x(x_0; y_0) \quad (\text{и} \quad (x_0; y_0) \to f'_y(x_0; y_0) \quad)$$

является функцией, определенной на $D_1(D_2) \subseteq \mathrm{D}(f)$.

Ее называют ***частной производной функции*** $z = f(x,y)$ ***по переменной*** x (y) и обозначают

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad z'_x, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \quad f'_x(x,y), \quad \frac{\partial f(M)}{\partial x}, \quad f'_x(M)$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}, \quad z'_y, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \quad f'_y(x,y), \quad \frac{\partial f(M)}{\partial y}, \quad f'_y(M)\right).$$

Операция нахождения для функции $z = f(x,y)$ ее частных производных

$$f'_x(x,y) \quad \text{è} \quad f'_y(x,y)$$

называется ***дифференцированием функции*** $z = f(x,y)$ ***по переменной*** x ***и*** y соответственно.

Фактически, $f'_x(x,y)$ $\left(f'_y(x,y) \right)$ – это обыкновенная производная функции $z = f(x,y)$, рассматриваемой как функция одной переменной x (соответственно y) при постоянном значении другой переменной.

Поэтому, вычисление частных производных производится по тем же самым правилам, что и для функции одной переменой. При этом, одна из переменных считается константой.

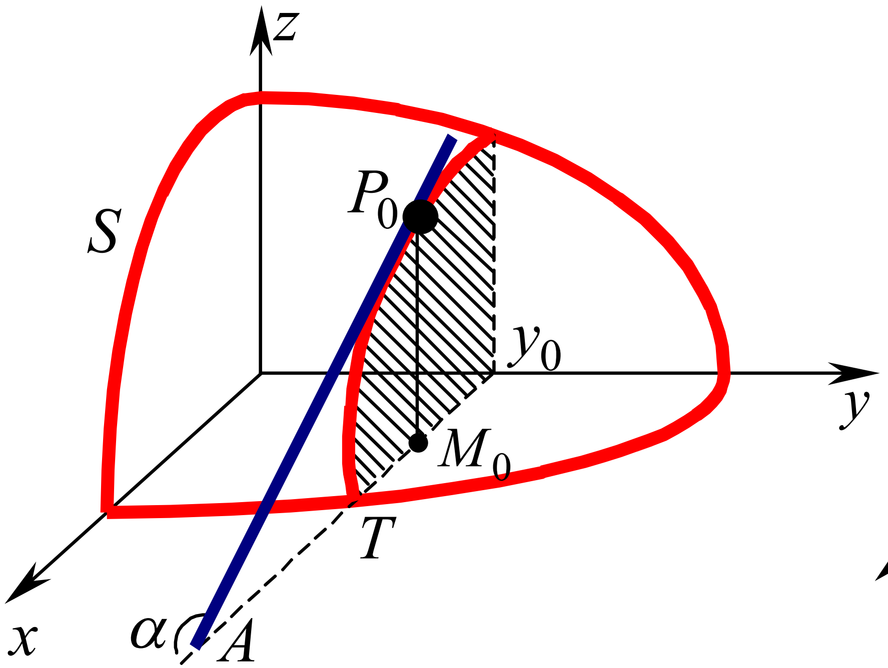
ПРИМЕР. Найти частные производные по x и по y функции

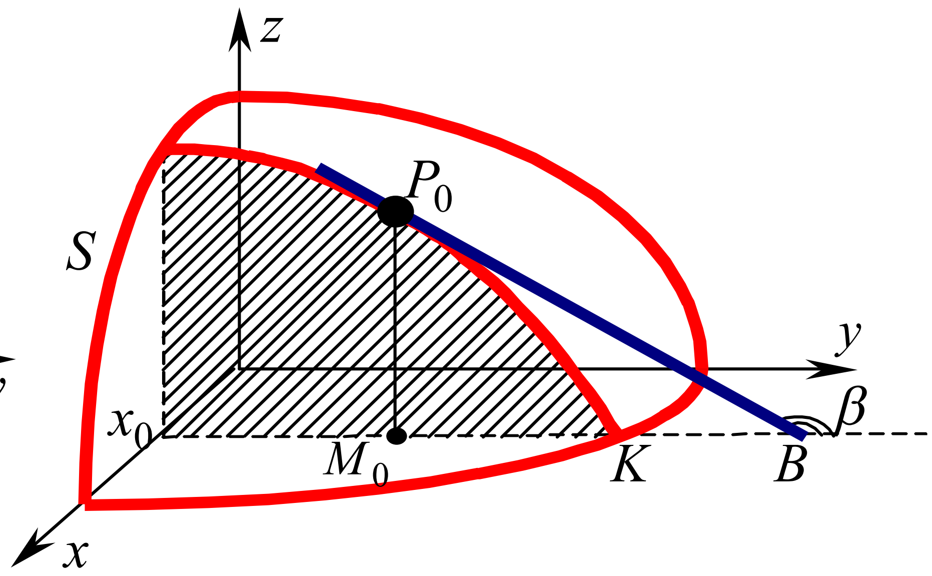
$$f(x,y) = x^2 + xy^2 + y^3$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ частных производных функции ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Пусть функция $z = f(x,y)$ имеет в $M_0(x_0,y_0)$ частную производную по x (y).

Пусть поверхность S – график функции $z = f(x,y)$.





Тогда $$f'_x(M_0) = \operatorname{tg}\alpha \quad (f'_y(M_0) = \operatorname{tg}\beta),$$

где α(β) – угол наклона к оси Ox(Oy) касательной, проведенной в точке $P_0(x_0,y_0, f(x_0,y_0))$ к линии пересечения поверхности S и плоскости $y = y_0$ ($x = x_0$).