Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Дифференциальное исчисление – раздел математики, в котором изучаются производные и дифференциалы функций и их применение к исследованию функций.

§5. Производная функции

1. Определение производной функции. Необходимое условие существования производной

Пусть $y = f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности. Придадим x_0 приращение Δx такое, что $x_0 + \Delta x \in \mathrm{D}(f)$.
Функция при этом получит приращение

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) .$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Производной функции*** $y = f(x)$ ***в точке*** x_0 *называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента* Δx, *при* $\Delta x \to 0$ *(если этот предел существует и конечен), т.е.*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Обозначают: $y'(x_0)$, $\dfrac{dy(x_0)}{dx}$, $f'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$.

Производной функции $y = f(x)$ ***в точке*** x_0 ***справа (слева)*** *называется*

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \quad \left(\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \right)$$

(*если этот предел существует и конечен*).

Обозначают:

$y'_+(x_0)$, $f'_+(x_0)$ – производная $y = f(x)$ в точке x_0 справа,

$y'_-(x_0)$, $f'_-(x_0)$ – производная $y = f(x)$ в точке x_0 слева.

ТЕОРЕМА 1 (необходимое и достаточное условие существования производной).

Функция $y = f(x)$ *имеет производную в точке* x_0 $\Leftrightarrow$ *в этой точке существуют и равны между собой производные функции справа и слева. Причем*

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

ТЕОРЕМА 2 (необходимое условие существования производной функции в точке).

Если функция $y = f(x)$ *имеет производную в точке* x_0, *то функция* $f(x)$ *в этой точке непрерывна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Замечание. Непрерывность функции в точке x_0 не является достаточным условием существования в этой точке производной функции.

Например, функция $y = |x|$ непрерывна на всей области определения, но не имеет производной в точке $x_0 = 0$.

Соответствие $x_0 \to f'(x_0)$ является функцией, определенной на множестве $D_1 \subseteq \mathrm{D}(f)$.

Ее называют ***производной функции*** $y = f(x)$ и обозначают

$$y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad f'(x), \quad \frac{df}{dx}.$$

Операцию нахождения для функции $y = f(x)$ ее производной функции называют ***дифференцированием функции*** $f(x)$.

УПРАЖНЕНИЕ. Доказать по определению, что

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x, \quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0.$$

2. Физический и геометрический смысл производной

1) **Физический смысл производной**.

Если функция $y = f(x)$ и ее аргумент x являются физическими величинами, то *производная* $f'(x)$ – *скорость изменения величины* y *относительно величины* x.

ПРИМЕРЫ.

а) Пусть $S = S(t)$ – расстояние, проходимое точкой за время t. Тогда производная $S'(t_0)$ – *скорость в момент времени* t_0.

б) Пусть $q = q(t)$ – количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника в момент времени t. Тогда $q'(t_0)$ – скорость изменения количества электричества в момент времени t_0, т.е. *сила тока в момент времени* t_0.

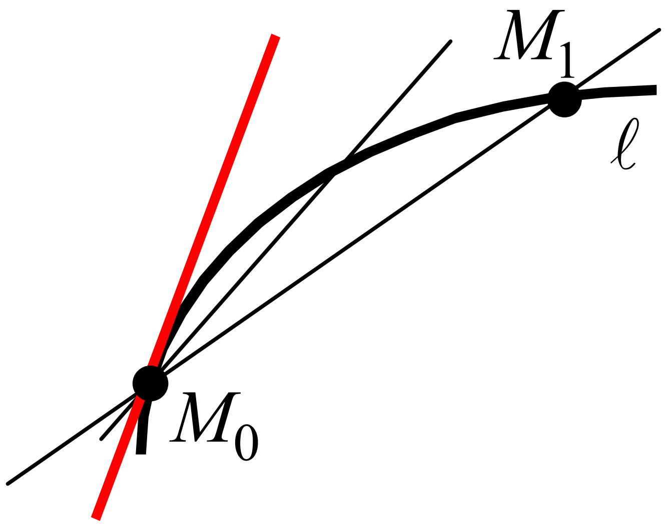
в) Пусть $m = m(x)$ – масса отрезка $[a; x]$. Тогда $m'(x)$ – скорость изменения массы в точке x_0, т.е. *линейная плотность в точке* x_0.

2) **Геометрический смысл производной.**

Пусть ℓ – некоторая кривая, M_0 – точка на кривой ℓ.

Любая прямая, пересекающая ℓ не менее чем в двух точках, называется ***секущей****.*

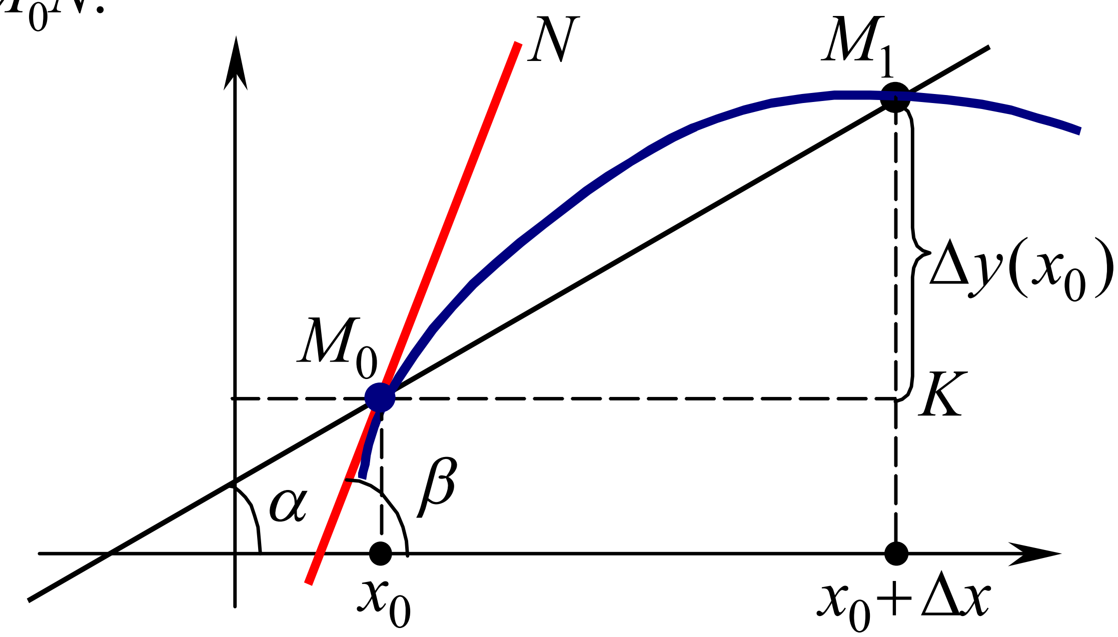
Касательной к кривой ℓ в точке M_0 *называется предельное положение секущей M_0M_1, если точка M_1 стремится к M_0, двигаясь по кривой.*



Очевидно, что если касательная к кривой в точке M_0 существует, то она единственная.

Рассмотрим кривую $y = f(x)$.

Пусть в точке $M_0(x_0\,; f(x_0))$ она имеет невертикальную касательную M_0N.



Таким образом, получили: $f\,'(x_0)$ – *угловой коэффициент касательной к графику функции* $y = f(x)$ *в точке* $M_0(x_0\,; f(x_0))$.
(геометрический смысл производной функции в точке).

$\Rightarrow$Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0\,; f(x_0))$ можно записать в виде

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

Замечания.

1) Прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно касательной, проведенной к кривой в точке M_0, называется ***нормалью к кривой в точке*** M_0.

Т.к. для угловых коэффициентов перпендикулярных прямых справедливо равенство $k_1 \cdot k_2 = -1$, то уравнение нормали к $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0\,; f(x_0))$ будет иметь вид

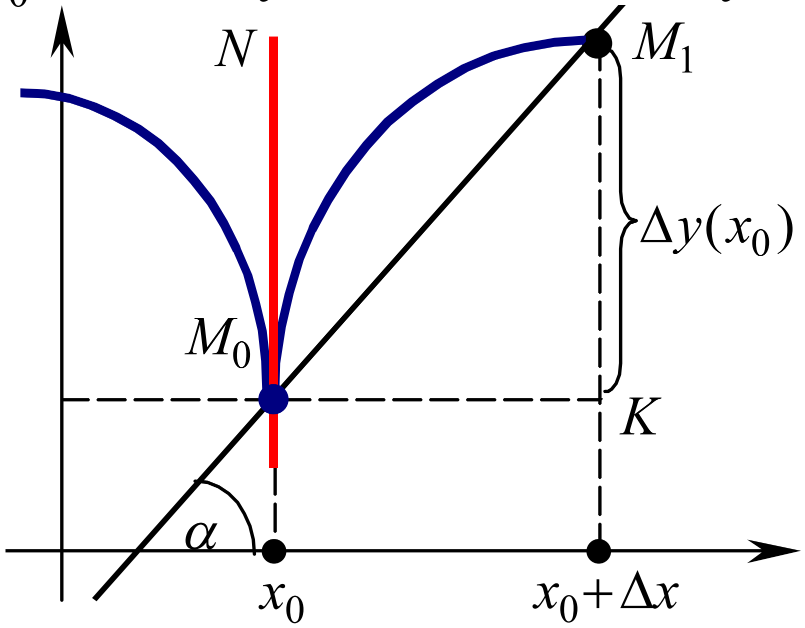
$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)\,, \text{ если } f'(x_0) \neq 0.$$

Если же $f'(x_0) = 0$, то касательная к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0\,; f(x_0))$ будет иметь вид

$$y = f(x_0),$$

а нормаль $$x = x_0.$$

2) Пусть кривая $y = f(x)$ имеет в точке $M_0(x_0\,; f(x_0))$ вертикальную касательную M_0N, α – угол наклона секущей M_0M_1 к Ox.



Таким образом, *если кривая* $y = f(x)$ *имеет в точке* $M_0(x_0\,; f(x_0))$ *вертикальную касательную, то функция* $y = f(x)$ *не имеет в точке* x_0 *производной*.

Так как в соседних с M_0 точках кривая $y = f(x)$ имеет касательные и их угол наклона к оси Ox стремится к 90° при $\Delta x \to 0$, то x_0 *является для функции* $f(x)$ *точкой разрыва* II *рода, причем*

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = \infty$$

3. Правила дифференцирования

1) *Производная константы равна нулю*, т.е.

$$C' = 0, \quad \text{где } C \text{ – константа.}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

2) *Производная суммы* (*разности*) *равна сумме* (*разности*) *производных*, т.е.

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

3) *Производная произведения находится по правилу*:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

Замечание. Формула дифференцирования произведения может быть легко обобщена на случай большего числа множителей. Например,

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w',$$

$$(u \cdot v \cdot w \cdot t)' = u' \cdot v \cdot w \cdot t + u \cdot v' \cdot w \cdot t + u \cdot v \cdot w' \cdot t + u \cdot v \cdot w \cdot t'.$$

4) $(C \cdot u)' = C \cdot u'$, где C – константа.

Говорят: «константа выносится за знак производной».

5) *Производная дроби находится по правилу*:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \qquad \left(v(x) \neq 0\right).$$

6) *Если функция* $\varphi(t)$ *имеет производную в точке* t, *а функция* $f(u)$ *имеет производную в точке* $u = \varphi(t)$, *то сложная функция* $y = f(\varphi(t))$ *имеет производную в точке* t, *причем*

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

(правило дифференцирования сложной функции).

7) ТЕОРЕМА 3 (о производной обратной функции).

Пусть функция $y = f(x)$ *имеет производную в точке* x_0, *причем* $f'(x_0) \neq 0$. *Если существует обратная функция* $x = \varphi(y)$, *то она имеет производную в точке* $y_0 = f(x_0)$ *и*

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

УПРАЖНЕНИЯ.

1) Зная, что $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(e^x)' = e^x$, получить формулы

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \qquad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \qquad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

2) Используя теорему о производной обратной функции, доказать, что

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in (-1;\ 1);$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x.$$

По определению и с помощью правил дифференцирования находят производные основных элементарных функций (так называемая «таблица производных», см. на сайте).

Производная любой элементарной функции находится с помощью таблицы производных и правил дифференцирования.