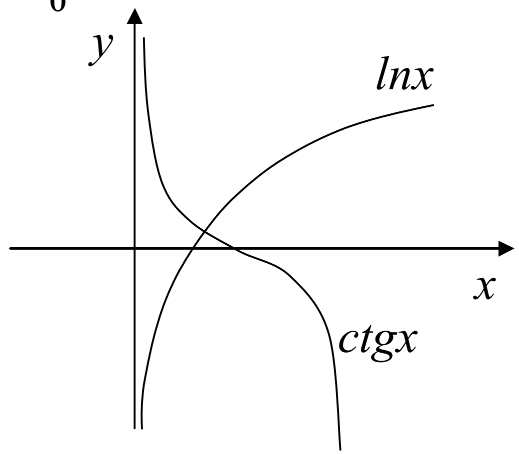
Вычисление пределов

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x)$$



$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x-x^3}{x+2x^3} = \frac{1-1-1^3}{1+2\cdot 1^3} = \frac{-1}{3}$$

$$\lim_{x\to -\pi}\frac{1-\sin x}{5-\cos x} = \frac{1-\sin(-\pi)}{5-\cos(-\pi)} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{\sin 0}{1-\cos 0} = \frac{0}{0} = ?$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctgx} = \frac{\ln 0}{ctg0} = \frac{\infty}{\infty} = ?$$

Виды неопределенностей: $\frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ \infty-\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty$

ПОМНИТЬ! $\frac{1}{\infty}=0$ $\quad \frac{1}{10000000000}\approx 0$ $\quad \frac{1}{0}=\frac{1}{б.м.}=\infty$ $\quad \frac{1}{0{,}0000000001}=10^{10}\to\infty$

РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

а) $$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$$

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{x^n (a_0 + a_1 / x + \ldots + a_n / x^n)}{x^m (b_0 + b_1 / x + \ldots + b_m / x^m)}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^n}{x^m} \cdot \frac{a_0 + a_1 / x + \ldots + a_n / x^n}{b_0 + b_1 / x + \ldots + b_m / x^m} \right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{x^m} \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{a_0 + a_1 / x + \ldots + a_n / x^n}{b_0 + b_1 / x + \ldots + b_m / x^m}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_0 + a_1 / x + \ldots + a_n / x^n}{b_0 + b_1 / x + \ldots + b_m / x^m} = \frac{a_0}{b_0}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{x^m} \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{a_0 + a_1 / x + \ldots + a_n / x^n}{b_0 + b_1 / x + \ldots + b_m / x^m} = \frac{a_0}{b_0} \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{x^m}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{x^m}=\begin{cases}0,\ \text{если}\ n<m,\\ 1,\ \text{если}\ n=m,\\ \infty,\ \text{если}\ n>m.\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}0,\ \text{если}\ n<m,\\ \dfrac{a_0}{b_0},\ \text{если}\ n=m,\\ \infty,\ \text{если}\ n>m.\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+7x+5}{4x^2+9}=\left|\begin{matrix}n=2\\ m=2\\ n=m\\ a_0=3,\ b_0=4\end{matrix}\right|=\frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3}{3x^4+5x-3}=\left|\begin{matrix}n=3\\ m=4\\ n<m\end{matrix}\right|=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-5x^2}{x^2-3x+1}=\left|\begin{matrix}n=4\\ m=2\\ n>m\end{matrix}\right|=\infty$$

Неопределенность вида $\frac{0}{0}$

Метод решения – выделение множителя $(x - a)$

а) разложение на множители:

$$\lim_{x \to a} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{0}{0}$$

б) домножение на сопряженное:

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{f(x)} - \varphi(x)}{\sqrt{g(x)} - \psi(x)} = \frac{0}{0}$$

а) разложение на множители: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{4x - x^3} = \left|\dfrac{0}{0}\right|$

Чтобы разложить на множители числитель, найдем корни квадратного уравнения

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

знаменатель: $4x - x^3 = x(4 - x^2) = x(2 - x)(2 + x)$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{x(2-x)(2+x)} = \lim_{x \to 2} \frac{-(2-x)(x-3)}{x(2-x)(2+x)} = \lim_{x \to 2} \frac{-(x-3)}{x(2+x)} = \frac{1}{8}$$

б) домножение на сопряженное: $$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{f(x)}-\varphi(x)}{\sqrt{g(x)}-\psi(x)}=\frac{0}{0}$$

Вспомним: a) Сопряженным к выражению a-b является выражение $a+b$

b) $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ (*)

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{12-x}-\sqrt{6+x}}{\sqrt{6+x}-3}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{6+x}+3)\cdot(\sqrt{12-x}-\sqrt{6+x})\cdot(\sqrt{12-x}+\sqrt{6+x})}{(\sqrt{6+x}+3)\cdot(\sqrt{6+x}-3)\cdot(\sqrt{12-x}+\sqrt{6+x})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{6+x}+3)\left((\sqrt{12-x})^2-(\sqrt{6+x})^2\right)}{\left((\sqrt{6+x})^2-3^2\right)(\sqrt{12-x}+\sqrt{6+x})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{6+x}+3)\big(12-x-(6+x)\big)}{\big(6+x-9\big)(\sqrt{12-x}+\sqrt{6+x})}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{6+x}+3)\big(6-2x\big)}{\big(x-3\big)(\sqrt{12-x}+\sqrt{6+x})}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{6+x}+3)\big(x-3\big)(-2)}{\big(x-3\big)(\sqrt{12-x}+\sqrt{6+x})}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{6+x}+3)(-2)}{(\sqrt{12-x}+\sqrt{6+x})}=\frac{6\cdot(-2)}{6}=-2$$

Неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$

Эквивалентные бесконечно малые

1. $\sin\alpha \xrightarrow{\alpha\to 0} \alpha$
2. $1-\cos\alpha \xrightarrow{\alpha\to 0} \dfrac{\alpha^2}{2}$
3. $tg\alpha \xrightarrow{\alpha\to 0} \alpha$
4. $\arcsin\alpha \xrightarrow{\alpha\to 0} \alpha$
5. $arctg\alpha \xrightarrow{\alpha\to 0} \alpha$
6. $a^{\alpha}-1 \xrightarrow{\alpha\to 0} \alpha\ln a$
7. $\ln(1+\alpha) \xrightarrow{\alpha\to 0} \alpha$
8. $(1+\alpha)^m-1 \xrightarrow{\alpha\to 0} m\alpha$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin(3x^2)}{arctg\,(x^3)}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 3x^2}{x^3}=3$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(5x)}{\ln(1-x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{(5x)^2/2}{-x^2}=-\frac{25}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^x}{\sqrt{1+x}-1}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^x-1+1}{(1+x)^{1/2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-e^x)-(1-\cos x)}{(1/2)\cdot x}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{(1-e^x)-(1-\cos x)}{x}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1-e^x)}{x}-\frac{(1-\cos x)}{x}\right)=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{-x}{x}-\frac{x^2/2}{x}\right)=2\lim_{x\to 0}\left(-1-\frac{x}{2}\right)=2\left(-1-0\right)=-2$$

Неопределенность вида 1^∞

Второй замечательный предел

$e = 2{,}71\ldots$

$$\boxed{\begin{gathered}\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e\end{gathered}}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \left|1^\infty\right| = \lim_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\underbrace{(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{x^2}\cdot(\cos x-1)\cdot\frac{1}{\cos x-1}}}_{e} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-(1-\cos x)}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x^2/2}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2+1}\right)^{5x} = \left|1^\infty\right| = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+x-1}{x^2+1}-1\right)^{5x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+x-1-x^2-1}{x^2+1}\right)^{5x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-2}{x^2+1}\right)^{5x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{x-2}{x^2+1}\right)^{5x\cdot\frac{x-2}{x^2+1}\cdot\frac{x^2+1}{x-2}}}_{e} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}5x\cdot\frac{x-2}{x^2+1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-10x}{x^2+1}} = e^5$$