§4. Непрерывность функции

1. Основные определения

Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Функция $f(x)$ называется* ***непрерывной в точке x_0*** *если справедливо равенство*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (1)$$

Замечания.

1) В силу теоремы 5 §3 равенство (1) можно записать в виде

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0). \qquad (2)$$

Условие (2) – *определение непрерывности функции в точке на языке односторонних пределов.*

2) Равенство (1) можно также записать в виде:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right)$$

Говорят: «если функция непрерывна в точке x_0, то знак предела и функцию можно поменять местами».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (на языке ε-δ).

Функция $f(x)$ *называется* ***непрерывной в точке*** $\boldsymbol{x_0}$ *если* $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ *такое, что*

если $x\in U(x_0, \delta)$ (т.е. $|x-x_0|<\delta$),

то $f(x)\in U(f(x_0), \varepsilon)$ (т.е. $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$).

Пусть $x, x_0 \in D(f)$ (x_0 – фиксированная, x – произвольная)

Обозначим: $\Delta x = x - x_0$ – ***приращение аргумента***

$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ – ***приращение функции в точке*** $\boldsymbol{x_0}$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (геометрическое).

Функция $f(x)$ *называется* ***непрерывной в точке*** $\boldsymbol{x_0}$ *если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции*, т.е.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0$$

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[x_0\,;\, x_0+\delta)$ (на промежутке $(x_0-\delta;\, x_0]$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция* $f(x)$ *называется* ***непрерывной в точке*** $\boldsymbol{x_0}$ ***справа*** (***слева***), *если справедливо равенство*

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0) \quad \left(\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0) \right)$$

Очевидно, что $f(x)$ непрерывна в точке x_0 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ непрерывна в точке x_0 справа и слева.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция* $f(x)$ *называется* ***непрерывной на интервале*** $(a;\, b)$ *если она непрерывна в каждой точке этого интервала.*

Функция $f(x)$ ***называется непрерывной на отрезке*** $[a;\, b]$ *если она непрерывна на интервале* $(a;\, b)$ *и имеет одностороннюю непрерывность в граничных точках* (т.е. непрерывна в точке a справа, в точке b – слева).

СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $X = \{x_0\}$ или $X = (a; b)$ или $X = [a; b]$.

1) *Сумма, разность и произведение конечного числа непрерывных на множестве* X *функций является функцией непрерывной на* X .

2) *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны на* X *и* $g(x) \neq 0$, $\forall x \in X$, *то частное* $f(x)/g(x)$ – *непрерывная на множестве* X *функция*.

3) *Пусть* $f\colon X \to Y$, $\varphi\colon Y \to Z$. *Если* $f(x)$ *непрерывна на* X, $\varphi(x)$ – *непрерывна на* Y , *то сложная функция* $\varphi(f(x))$ *непрерывна на* X .

Свойства 1, 2, 3, следуют из свойств пределов функций.

4) *Основные элементарные функции непрерывны всюду в своей области определения*.

Если функция непрерывна всюду в области определения, то ее называют ***непрерывной***.

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите по определению, что функции $\sin x$ и e^x непрерывны.

Подсказка. Используйте определение непрерывности на языке ε-δ или геометрическое.

5) *Элементарные функции непрерывны*

(следствие свойств 1– 4)

2. Точки разрыва и их классификация

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Если функция* $f(x)$ *определена в некоторой окрестности точки* x_0 *, но не является непрерывной в этой точке, то* ***$f(x)$ называют разрывной в точке x_0*** *, а саму точку* ***x_0 называют точкой разрыва*** *функции* $f(x)$.

Замечания.

1) $f(x)$ может быть определена в неполной окрестности точки x_0 . Тогда рассматривают соответствующую одностороннюю непрерывность функции.

2) Из определения $\Rightarrow$ точка x_0 является точкой разрыва функции $f(x)$ в двух случаях:

а) $U(x_0, \delta) \in D(f)$, но для $f(x)$ не выполняется равенство

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

б) $U^*(x_0, \delta) \in D(f)$.

Для элементарных функций возможен только случай б).

Пусть x_0 – точка разрыва функции $f(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Точка* x_0 *называется* ***точкой разрыва*** **I** ***рода*** *если функция* $f(x)$ *имеет в этой точке конечные пределы слева и справа*.

Если при этом эти пределы равны, то точка x_0 *называется* ***точкой устранимого разрыва****, в противном случае –* ***точкой скачка***.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Точка* x_0 *называется* ***точкой разрыва*** **II** ***рода*** *если хотя бы один из односторонних пределов функции* $f(x)$ *в этой точке равен* ∞ *или не существует*.

3. Свойства функций, непрерывных на отрезке

ТЕОРЕМА 1 (Вейерштрасса).

Пусть функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$. *Тогда*

1) $f(x)$ – *ограничена на* $[a; b]$;
2) $f(x)$ *принимает на* $[a; b]$ *свое наибольшее и наименьшее значения.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Значение функции $m = f(x_1)$ *называется* ***наименьшим****, если*

$$m \le f(x), \ \forall x \in D(f).$$

Значение функции $M = f(x_2)$ *называется* ***наибольшим****, если*

$$M \ge f(x), \ \forall x \in D(f).$$

Замечание. Наименьшее (наибольшее) значение функция может принимать в нескольких точках отрезка.

ТЕОРЕМА 2 (Коши, о промежуточных значениях).

Пусть функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;\, b]$ *и* γ *– число, заключенное между* $f(a)$ *и* $f(b)$. *Тогда существует хотя бы одна точка* $x_0 \in [a;\, b]$ *такая, что* $f(x_0) = \gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

СЛЕДСТВИЕ 1 (теоремы Коши).

Если функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;\, b]$ *и на его концах принимает значения разных знаков, то на* $(a;\, b)$ *существует хотя бы одна точка, в которой функция обращается в ноль.*

СЛЕДСТВИЕ 2 (теорем Коши и Вейерштрасса).

Если функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;\, b]$, *то множеством ее значений является отрезок* $[m;\, M]$, *где* m *и* M *– соответственно наименьшее и наибольшее значения функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a;\, b]$.