

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

**понятия, которые можно описать, но нельзя строго
определить, так как любая попытка дать строгое
определение неизбежно сведётся к замене определяемого
понятия ему эквивалентным**

МНОЖЕСТВО

ФУНКЦИЯ

ЧИСЛО

ПЕРЕМЕННАЯ ВЕЛИЧИНА

Понятие множества

**используется для описания совокупности
предметов или объектов**

«Под многообразием или множеством я понимаю вообще всякое многое, т.е. всякую совокупность определённых элементов, которая может быть связана в одно целое с помощью некоторого закона».

Георг Кантор

$a \in M$ элемент a принадлежит множеству M

$a \notin M$ элемент a не принадлежит множеству M

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ

1) указанием признаков (характеристических свойств), присущих всем элементам множества и только им

$$M = \{x \mid P(x)\} \text{ где } P(x) \text{ – свойство}$$

$$A = \{x \mid x \in R, x^2 - 4 = 0\}$$

2) перечислением всех элементов множества (если это возможно)

$$M = \{a; b; \dots\}$$

$$A = \{-2; 2\}$$

Пустое множество $\emptyset$

$$B = \{x \mid x \in R, x^2 + 1 = 0\}$$

конечное множество

бесконечное множество

N – множество натуральных чисел

R – множество действительных чисел

$$A = \{x \mid x \in R, 0 \leq x \leq 4\}$$

$$C = \{x \mid x \in N, 0 \leq x \leq 4\} = \{1; 2; 3; 4\}$$

Операции над множествами

Определение 1. Два множества A и B называются *равными*, если каждый элемент множества A является элементом множества B и, наоборот, каждый элемент множества B является элементом множества A .

$$A = B \quad \text{множество } A \text{ равно множеству } B$$

Свойства отношения равенства множеств:

1. $A = A$ *рефлексивность*
2. $(A = B) \Rightarrow (B = A)$ *симметричность*
3. $((A = B) \text{ и } (B = C)) \Rightarrow (A = C)$ *транзитивность*

Определение 2. Множество A называется *подмножеством* множества B , если каждый элемент множества A является элементом множества B .

Отношение включения $\subseteq$

$A \subseteq B$ **множество A является подмножеством множества B**

$$A \neq B \wedge A \subseteq B \Rightarrow A \subset B$$

$\subset$ *Отношение строгого включения*

Определение 3. *Объединением* двух множеств A и B называется множество C , состоящее из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств.

$$C = A \cup B$$

$$C = A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B) \vee ((x \in A) \wedge (x \in B))\}$$

Определение 4. *Пересечением* двух множеств A и B называется множество C , состоящее из элементов, которые принадлежат обоим множествам одновременно.

$$C = A \cap B$$

$$C = A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

Определение 5. *Разностью* двух множеств A и B называется множество C , состоящее из элементов множества A , не принадлежащих множеству B .

$$C = A \setminus B$$

$$C = A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

ПРИМЕР

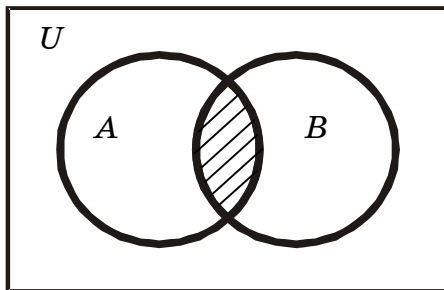
$$A = \{1; 2; 3; 4; 5\} \quad B = \{3; 4; 5; 6; 7\}$$

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$$

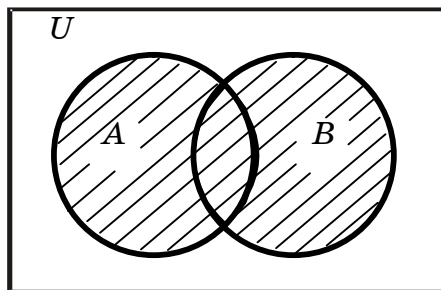
$$A \cap B = \{3; 4; 5\}$$

$$A \setminus B = \{1; 2\}$$

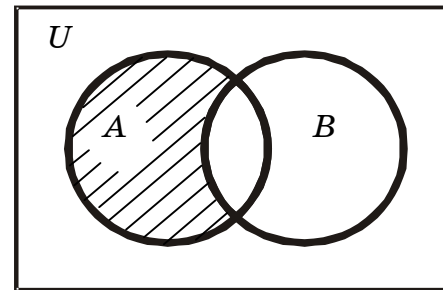
Диаграммы Эйлера - Венна



$$A \cap B$$



$$A \cup B$$

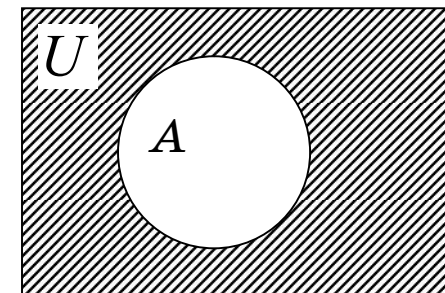


$$A \setminus B$$

U - Универсальное множество

$\bar{A}$ Дополнение множества A до универсального множества

$$\bar{A} = U \setminus A = \{x \mid x \notin A\}$$



$$\bar{A}$$

Свойства операций над множествами

$$1. A \cup B = B \cup A$$

$$2. A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$3. A \cap B = B \cap A$$

$$4. A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$5. A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$6. A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

$$7. A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$8. A \cup U = U$$

$$A \cap U = A$$

$$9. A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$A \cup \bar{A} = U$$

$$\bar{\bar{A}} = A$$

$$10. \bar{\emptyset} = U$$

$$\bar{U} = \emptyset$$

Числовые множества

- Множество натуральных чисел N

*Бог создал натуральные числа,
а всё остальное – дело рук человеческих
Л. Кронекер*

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

множество N упорядочено, т.е.

$$\forall a, b \in N \Rightarrow (a > b) \vee (a = b) \vee (a < b)$$

- Множество целых чисел

$\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

- Множество рациональных чисел

$\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ q \mid q = \frac{p}{n}, p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$$

$$\frac{1}{4} = 0,25 \quad \frac{1}{3} = 0,3333\dots = 0,(3)$$

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

$$\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \quad \exists q \in \mathbb{Q} : q_1 < q < q_2$$

Аксиома плотности

- **Множество иррациональных чисел**

$$\sqrt{2} \quad \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{золотое сечение}$$

$$e \approx 2,7182818285....$$

$$\pi \approx 3,1415926536....$$

- **Множество действительных чисел** R

- **аксиомы:**

1. упорядоченности: $\forall x, y \in R \quad (x > y) \vee (x < y) \vee (x = y)$
2. плотности $\forall x, y \in R \quad (x \neq y, x < y) \exists c \in R : x < c < y$
3. полноты $\forall X, Y \subset R \quad (X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset):$
 $\forall (x \in X), (y \in Y): x \leq y \Rightarrow$
 $\exists a \in R : x \leq a \leq y$

$$+\infty$$

$$-\infty$$

$$\forall x \in R \Rightarrow -\infty < x < +\infty$$

Подмножества числовой прямой

$$\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$$

название	обозначение	изображение
отрезок	$[a; b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$	
интервал	$(a; b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$	
полуинтервалы	$[a; b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$ $(a; b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$	

$$[a; +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$$

$$(-\infty; b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$$

$$(a; +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > a\}$$

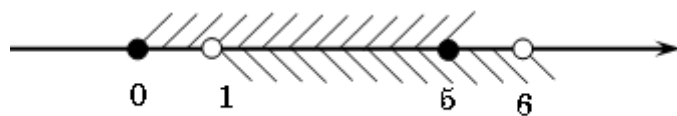
$$(-\infty; b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < b\}$$

пример

Найти объединение и пересечение множеств

$$A = [0; 5]$$

$$B = (1; 6)$$



$$A \cap B = (1; 5]$$

$$A \cup B = [0; 6)$$

Мощность множества

Определение 1. Множества A и B называются *эквивалентными*, если между ними существует взаимно однозначное соответствие, т.е.

$$\forall a \in A \mapsto b \in B$$

$$\forall b \in B \mapsto a \in A$$

Обозначение: $A \sim B$

M конечное множество

$$\forall M \quad \exists n \in N: \quad M \sim \{1, 2, \dots, n\}$$

n – мощность множества M

Определение 2. Множество, эквивалентное множеству натуральных чисел, называется *счётным*.

Пример множество Z счётно

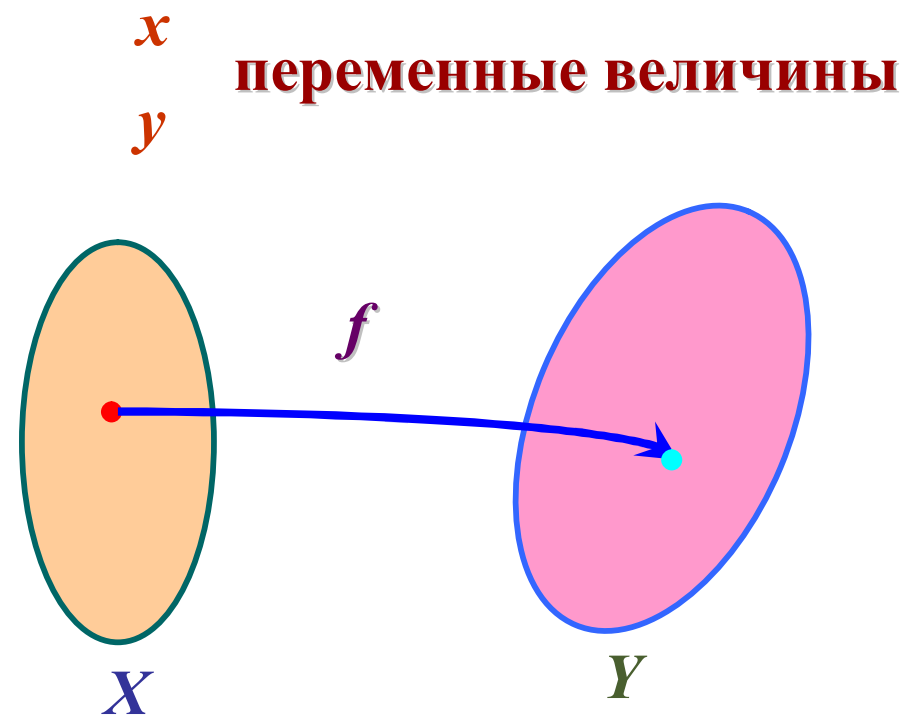
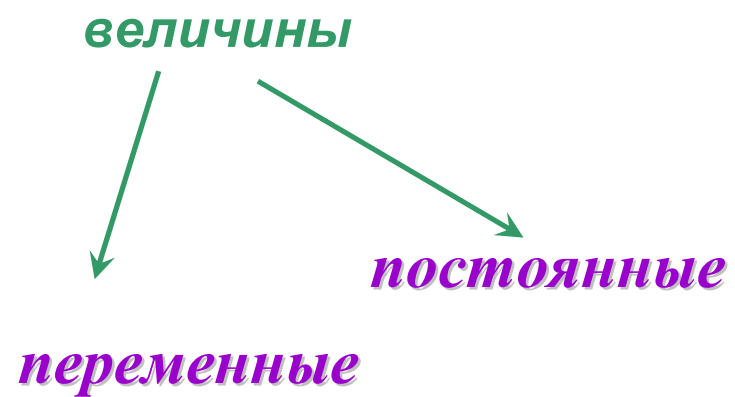
$$\begin{array}{cccccccccccc}
 Z: & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & \dots & -n & n & \dots \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \\
 N: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots & 2n & 2n+1 & \dots
 \end{array}
 \Rightarrow Z \sim N$$

Теоремы:

1. Всякое подмножество счётного множества конечно или счётно
2. Всякое бесконечное множество содержит бесконечное счётное подмножество
3. Множество действительных чисел, заключенных между 0 и 1, несчётно
4. Множество действительных чисел равномощно любому конечному интервалу
5. Множества точек любых двух отрезков числовой прямой равномощны

Мощность континуум

§5. Понятие функции



Если каждому элементу x из множества X по определённому правилу или закону f ставится в соответствие один элемент y из множества Y , то говорят, что на множестве X задана функция f

$$y = f(x)$$

x аргумент

независимая переменная

y функция

зависимая переменная

**Область определения
функции**

$$D(f)$$

*множество значений, принимаемых
независимой переменной*

**Область значений
функции**

$$E(f)$$

*множество значений, принимаемых
зависимой переменной*

Способы задания функции

ЗАДАТЬ ФУНКЦИЮ –

указать область её определения и правило, по которому по данному значению независимой переменной можно найти соответствующее ему значение функции

- аналитический
- табличный
- графический

Аналитический способ

заключается в том, что зависимость между переменными величинами задаётся с помощью *формулы*, указывающей, какие действия надо выполнить над аргументом, чтобы получить соответствующее ему значение функции.

$$y = f(x)$$

$$f(x_0) = y_0$$

$$y|_{x=x_0} = y_0$$

$$y = x^2$$

$$S(R) = 4\pi R^2$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 1, \\ 2x, & x \leq 1 \end{cases}$$

Табличный способ

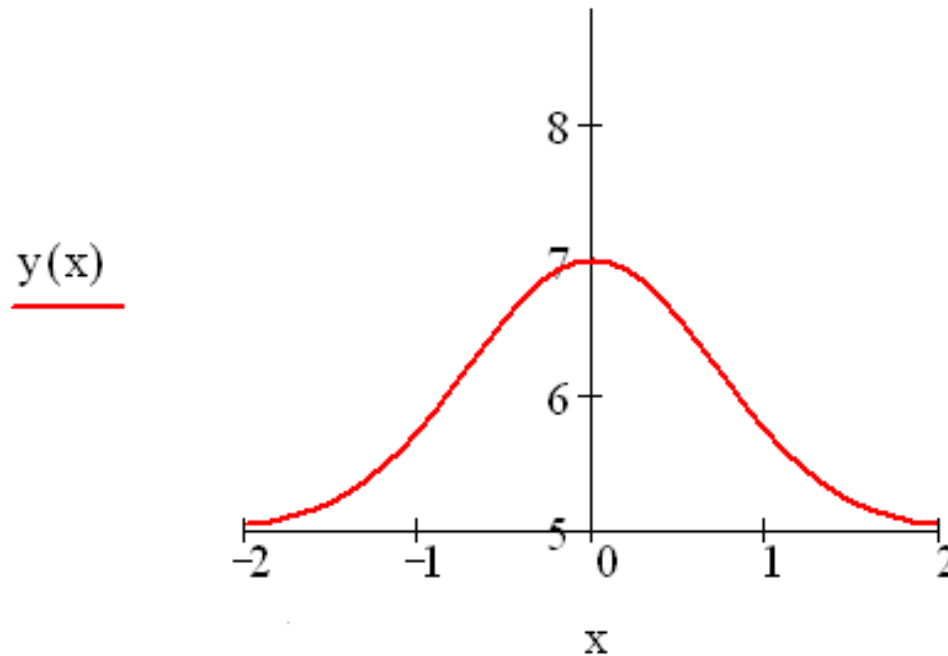
заключается в том, что зависимость между переменными задают с помощью *таблицы*

x	5	10	15	20	25
y	59,3	59,8	60,1	64,9	70,2

*зависимость температуры (y , $^{\circ}\text{C}$) корпуса
работающего агрегата
от времени (x , мин.) измерения*

Графический способ состоит в том, что соответствие между переменными x и y задаётся с помощью *графика* функции.

График функции $y = f(x)$ $(x; f(x))$



§6. Основные характеристики поведения функции

Одной из основных задач математического анализа является анализ функций. Изучить или проанализировать заданную функцию означает охарактеризовать ход её изменения (её поведение) при изменении независимой переменной и в случае необходимости построить график данной функции.

ЧЁТНОСТЬ-НЕЧЁТНОСТЬ

$$f(-x) = f(x) \quad \text{Чётная функция}$$

График симметричен относительно оси Oy

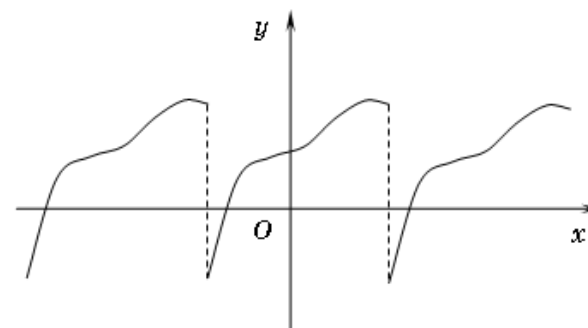
$$y = x^2 + 1 \quad f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$$

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{Нечётная функция}$$

График симметричен относительно начала координат

$$y = x^3 + x \quad f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$$

ПЕРИОДИЧНОСТЬ



Функция $f(x)$ называется

периодической с периодом T

если для любого значения аргумента

значения этой функции в точках

$$x, \quad x + T, \quad x - T$$

равны

$$f(x) = f(x + T) = f(x - T)$$

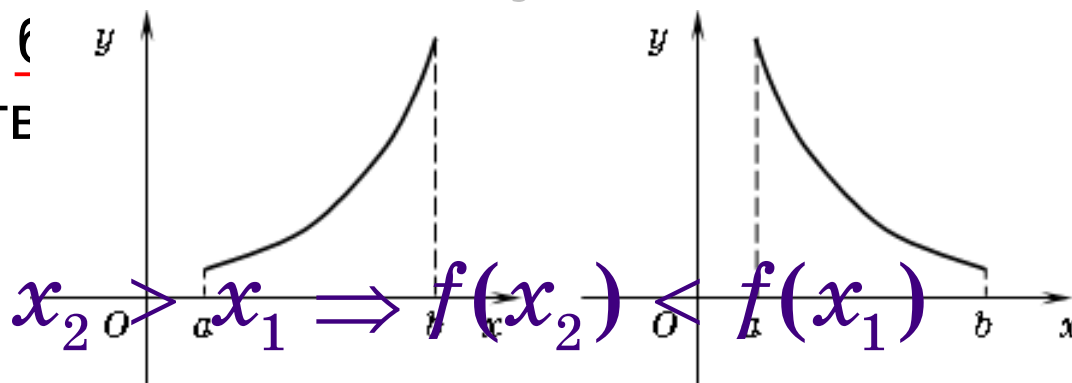
T – основной период

ВОЗРАСТАНИЕ-УБЫВАНИЕ

Функция называется **возрастающей** на интервале ,
если большему значению аргумента из этого интервала
соответствует большее значение функции

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

Функция называется **убывающей** на интервале ,
если меньшему значению аргумента из этого интервала
соответствует меньшее значение функции



возрастающая

убывающая

монотонные

ОГРАНИЧЕННОСТЬ

Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной снизу** на множестве X , если

$$\exists m \in R : \forall x \in X \Rightarrow f(x) \geq m$$

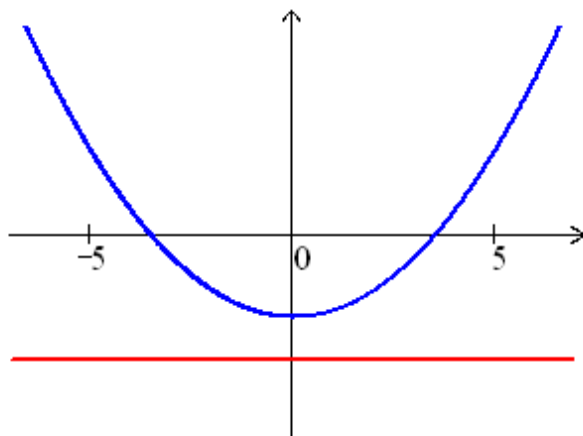
Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной сверху** на множестве X , если

$$\exists M \in R : \forall x \in X \Rightarrow f(x) \leq M$$

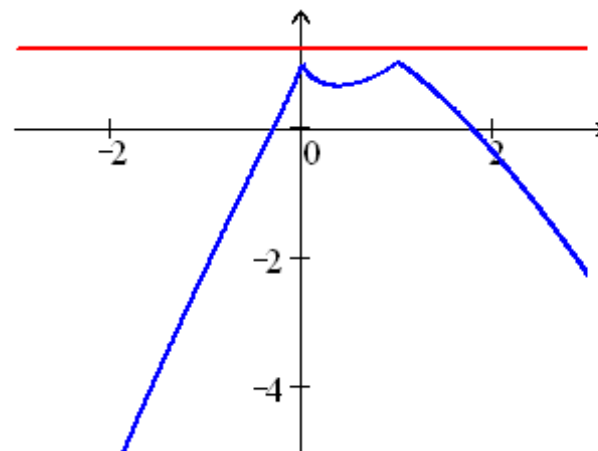
Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной** на множестве X , если

$$\exists C \in R (C > 0) : \forall x \in X \Rightarrow |f(x)| \leq C$$

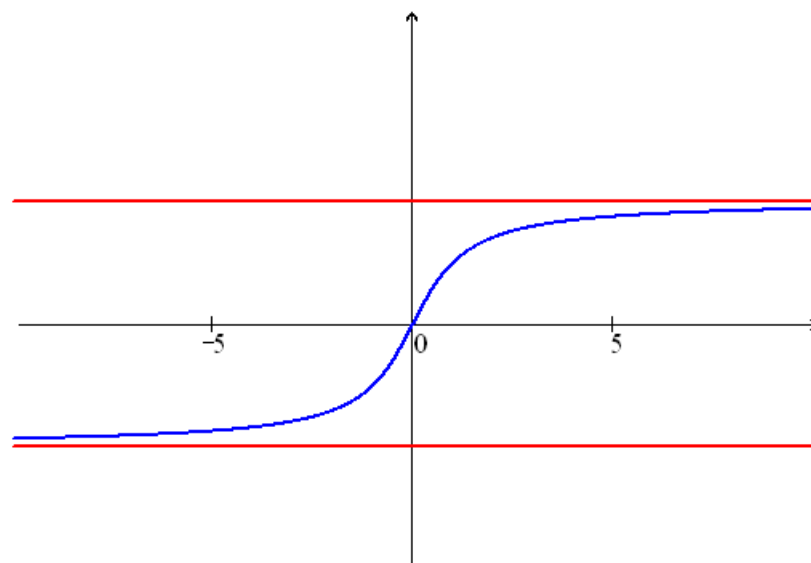
$$m \leq f(x) \leq M$$



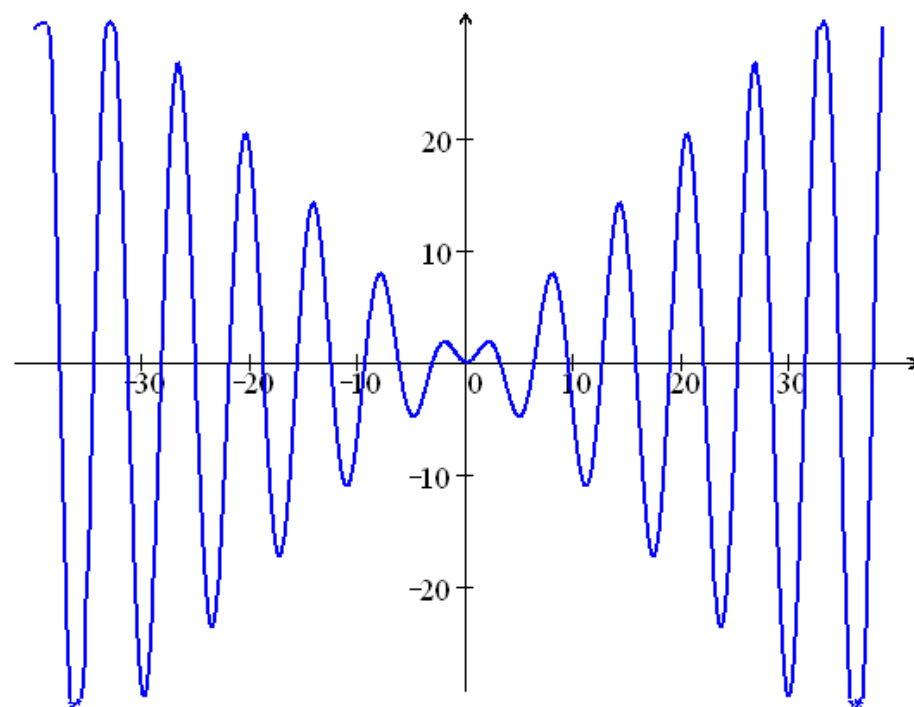
Функция ограничена снизу



Функция ограничена сверху



Функция ограничена

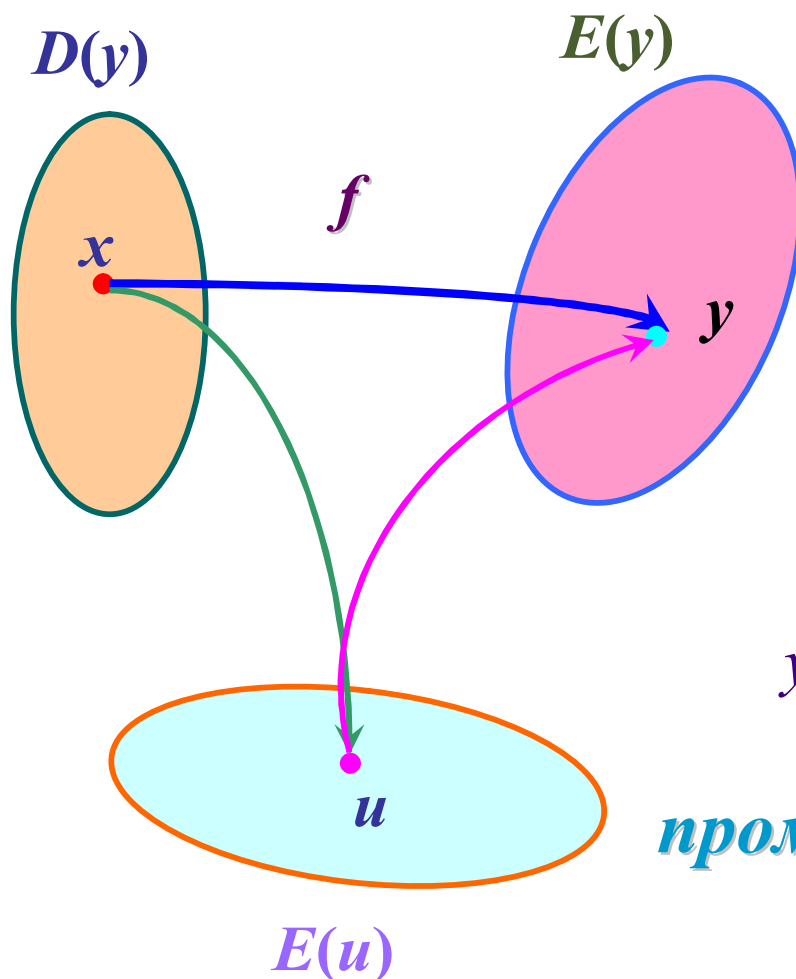


неограниченная функция

§7. Сложная, неявная и обратная функции

СЛОЖНАЯ ФУНКЦИЯ

композиция



$$y = f(u), \quad u = \varphi(x)$$

$$y = g(x) = f(\underline{\varphi(x)})$$

внутренняя функция

$$y = \sin(2x^3 - 1)$$
$$y = \sin u \quad u = 2x^3 - 1$$

промежуточный аргумент

$$y = e^{\operatorname{tg} \frac{1-x}{1+x}}$$

ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

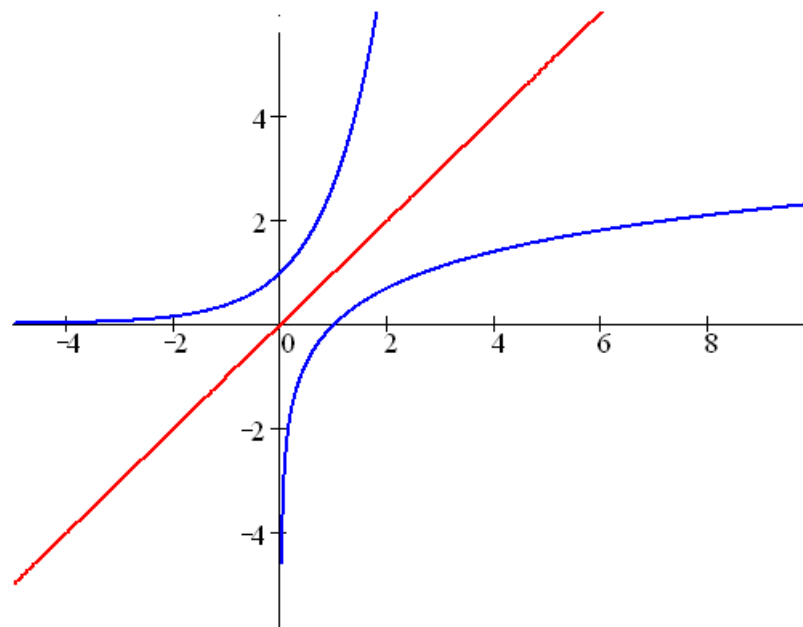
Функция $y = f(x)$

$$x \in D(y) \quad \mapsto \quad y \in E(y)$$

x аргумент

y функция

Функция $x = \varphi(y)$



НЕЯВНАЯ ФУНКЦИЯ

$$F(x, y) = 0$$



$$y = f(x)$$

$$4y - x^2 + 1 = 0$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{4}$$

$$x = -1 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

$$y = \frac{x^2 - 1}{4}$$

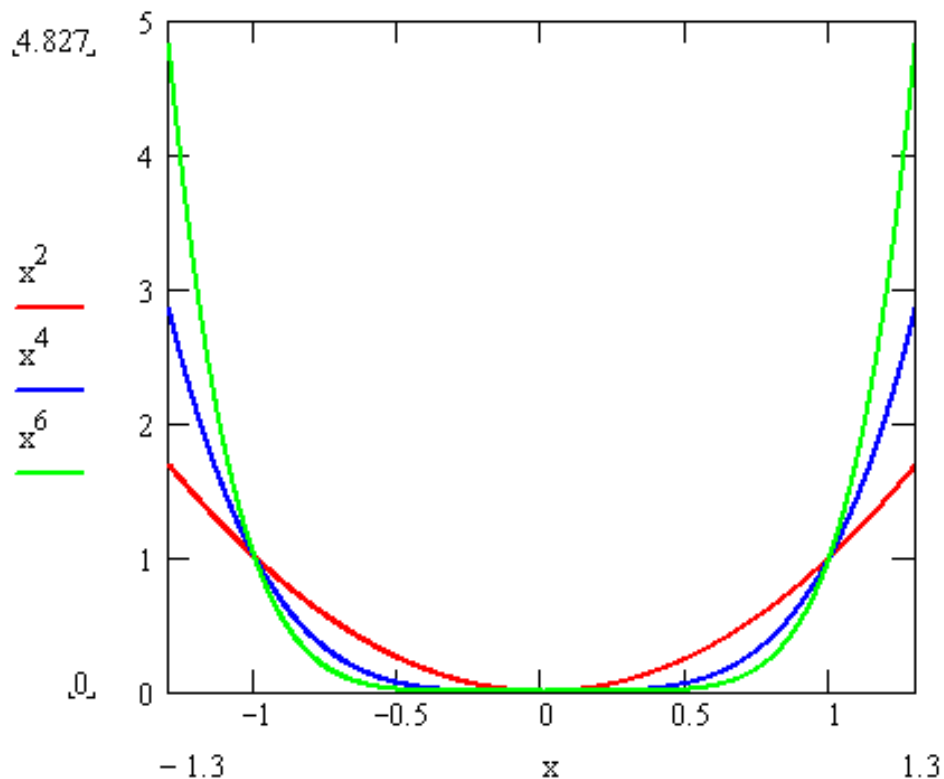
§8. Основные элементарные функции

Элементарной функцией называется функция, которая может быть задана одной формулой $y = f(x)$, где $f(x)$ – выражение, составленное из основных элементарных функций и действительных чисел с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции.

СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

$$y = x^{\alpha}$$

1. $\alpha = 2n$



$$y = x^{2n}$$

Область определения R

Область значений $[0; +\infty)$

Чётная

Ограничена снизу осью Ox

Возрастает на $(0; +\infty)$

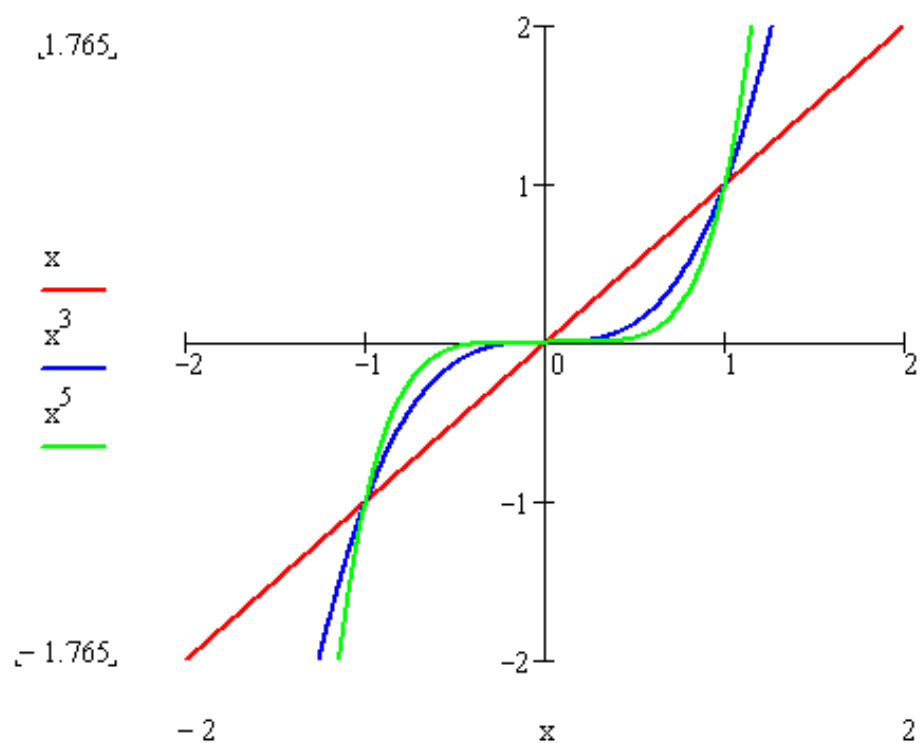
Убывает на $(-\infty; 0)$

СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

$$y = x^{\alpha}$$

$$y = x^{2n-1}$$

$$2. \quad \alpha = 2n - 1$$



Область определения R

Область значений R

Нечётная

Не ограничена

Возрастает на R

СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

$$y = x^{\alpha}$$

$$y = \frac{1}{x^{2n}}$$

3. $\alpha = -2n$

Область определения $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

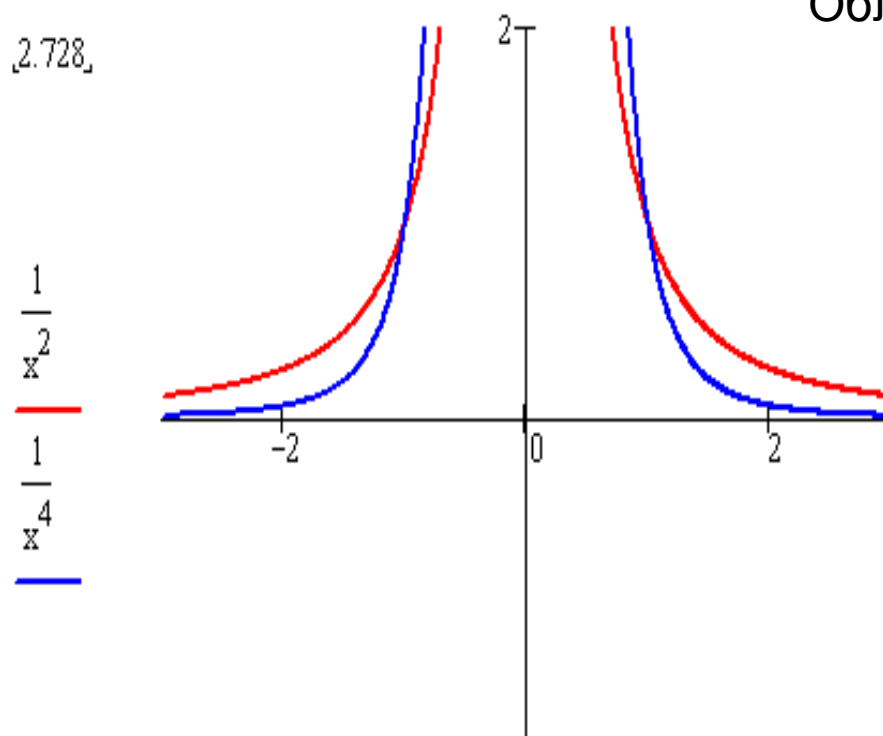
Область значений $(0; +\infty)$

чётная

Ограничена снизу осью Ox

Возрастает на $(-\infty; 0)$

Убывает на $(0; +\infty)$

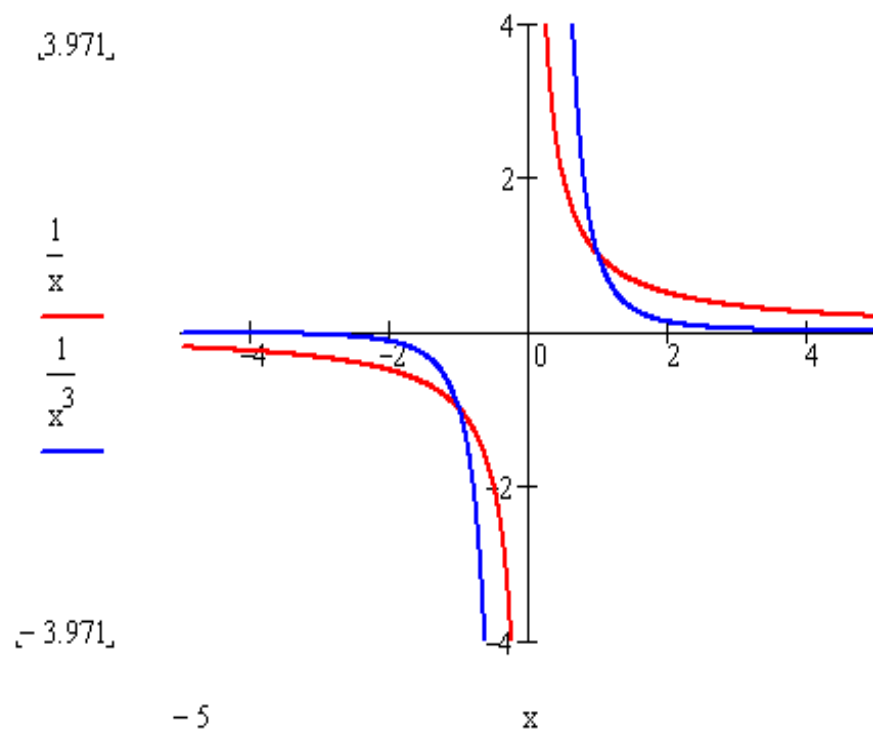


СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

$$y = x^{\alpha}$$

$$y = \frac{1}{x^{2n-1}}$$

4. $\alpha = -(2n-1)$



Область определения $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

Область значений $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

Нечётная

Не ограничена

Убывает на $(0; +\infty)$

$(-\infty; 0)$

СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

$$y = x^{\alpha}$$

5. $\alpha \notin \mathbb{Z}$

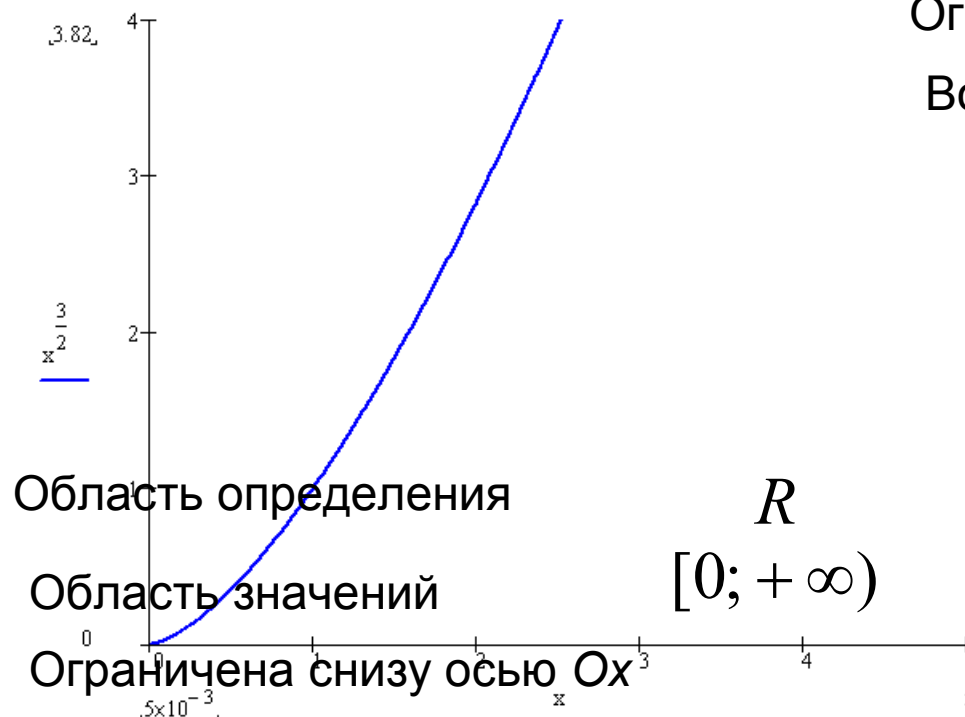
$$y = x^{3/2}$$

Область определения $[0; +\infty)$

Область значений $[0; +\infty)$

Ограничена снизу осью Ox

Возрастает на $(0; +\infty)$



Область определения

Область значений

Ограничена снизу осью Ox

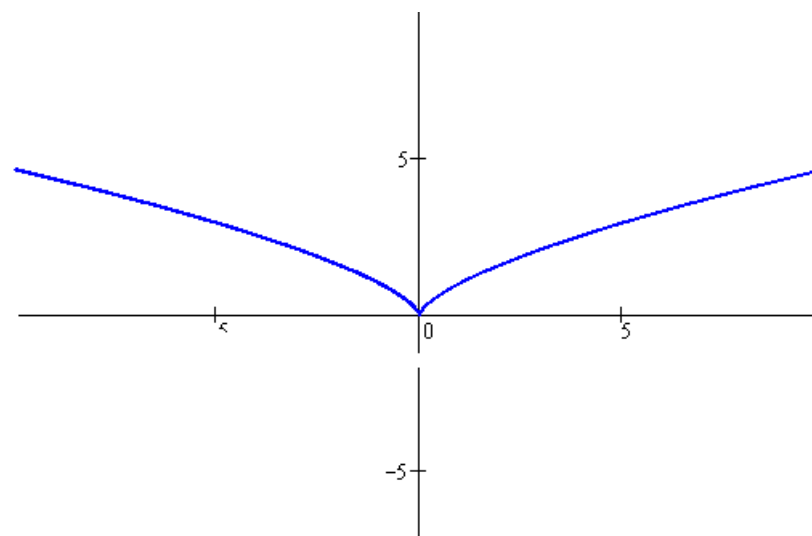
Возрастает на $(0; +\infty)$

Убывает на $(0; +\infty)$

Чётная

$\mathbb{R}$
 $[0; +\infty)$

$$y = x^{2/3}$$



ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

$$y = a^x$$

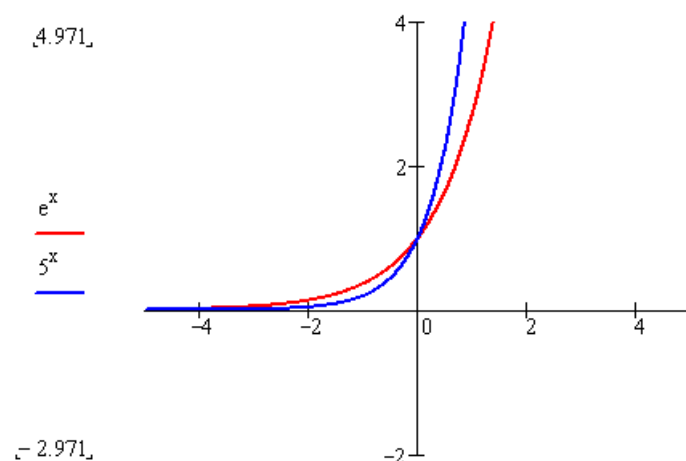
$$a > 0, \quad a \neq 1$$

Область определения R

Ограничена снизу осью Ox

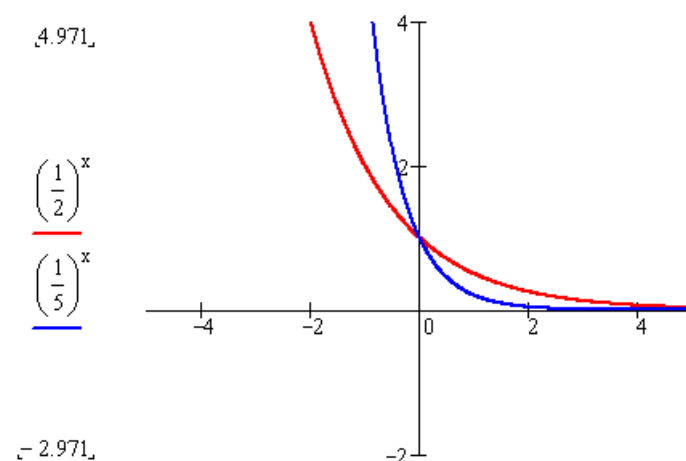
Область значений $(0; +\infty)$

$$a > 1$$



Возрастает на R

$$0 < a < 1$$



Убывает на R

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

$$y = \log_a x$$

$$a > 0, \quad a \neq 1$$

$$1. \quad a > 1$$

Область определения $(0; +\infty)$

Область значений R

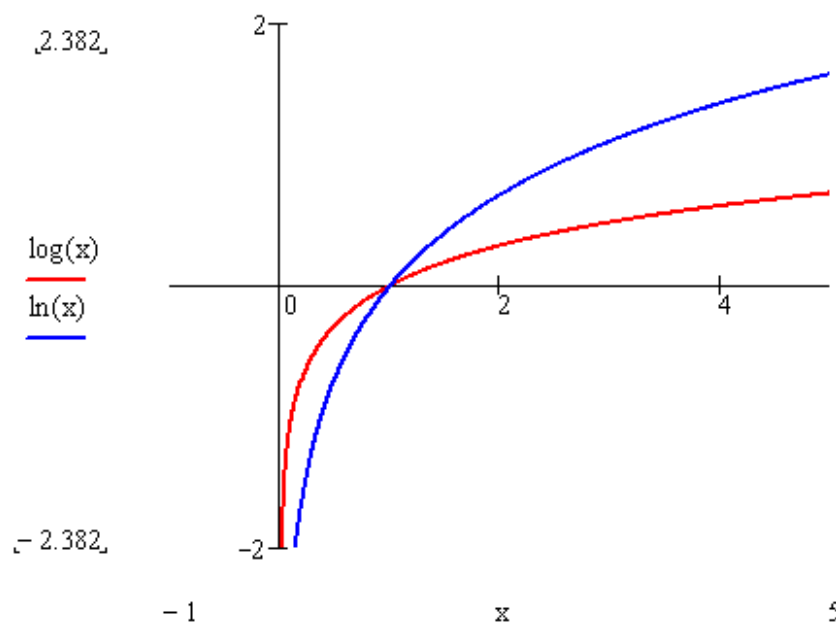
Возрастает на $(0; +\infty)$

Не ограничена

$$y = \ln x$$

функция натурального логарифма

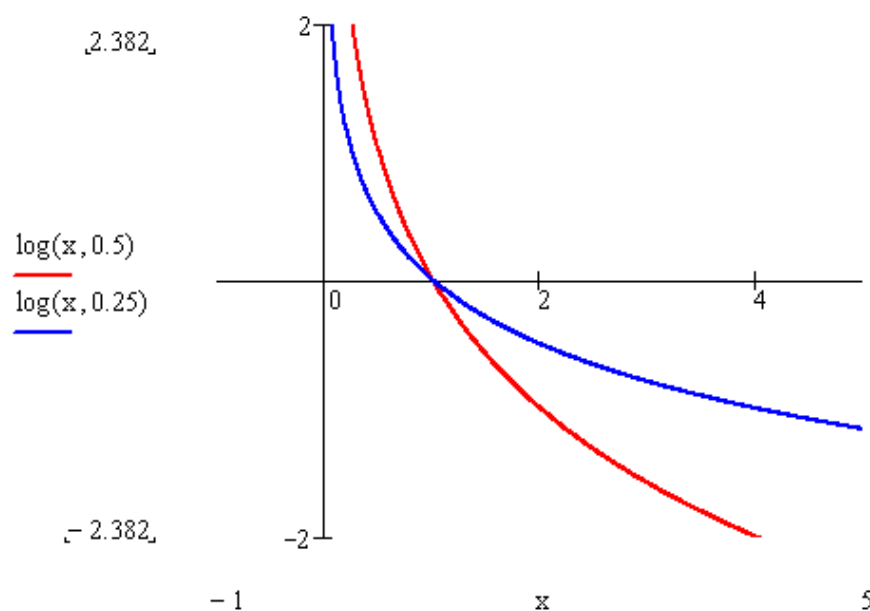
$$a = e \approx 2,71$$



ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

$$y = \log_a x \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

$$2. \quad 0 < a < 1$$



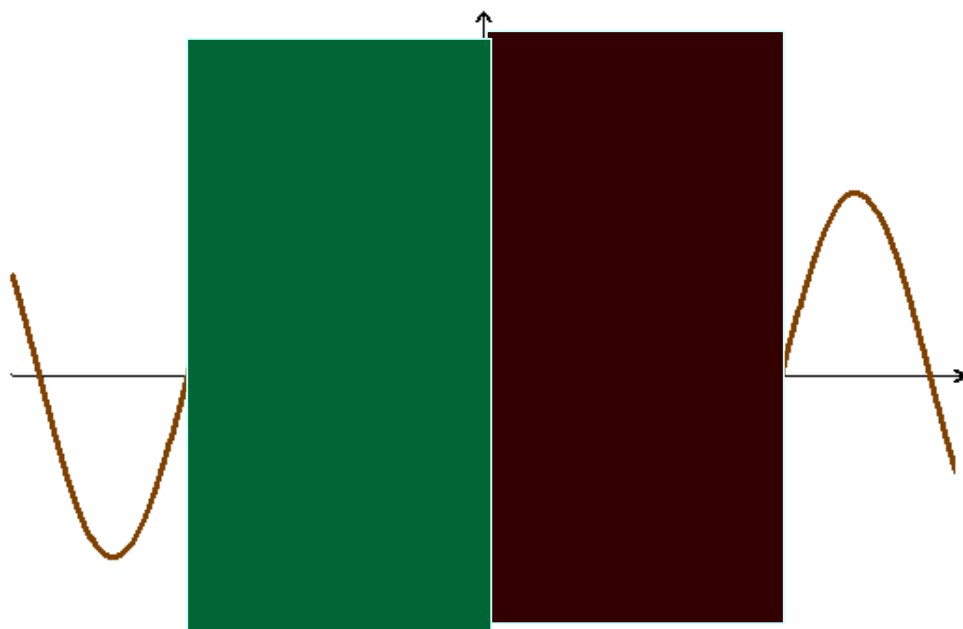
Область определения $(0; +\infty)$

Область значений R

Убывает на $(0; +\infty)$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

СИНУС $y = \sin x$



Периодическая

$$T = 2\pi$$

$$D(y) = R$$

$$E(y) = [-1; 1]$$

Нечётная

Ограничена $|\sin x| \leq 1$

Возрастает на

$$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right)$$

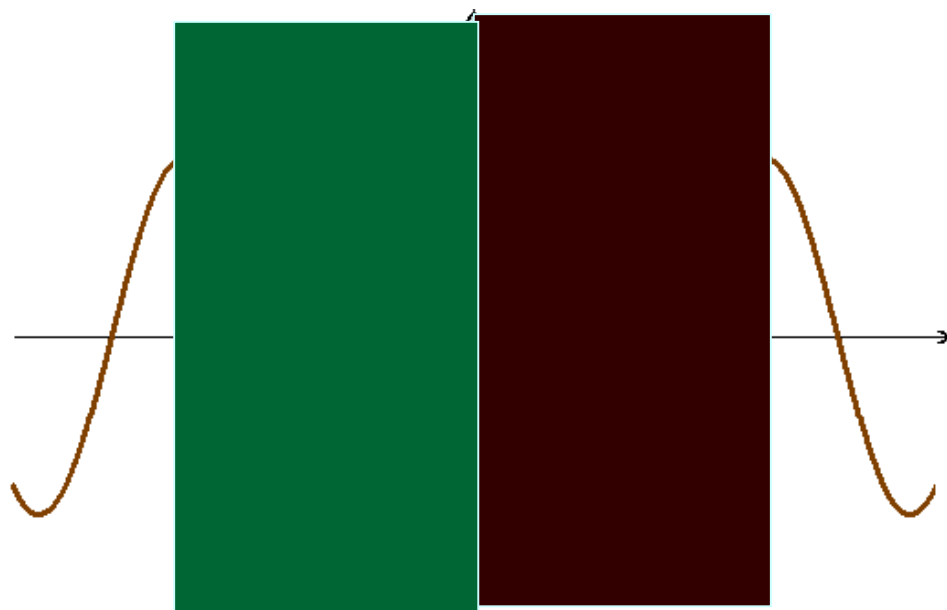
Убывает на

$$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \right)$$

$$k \in Z$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

КОСИНУС $y = \cos x$



Периодическая

$$T = 2\pi$$

$$D(y) = R$$

$$E(y) = [-1; 1]$$

Чётная

Ограничена $|\cos x| \leq 1$

Возрастает на

$$((2k-1)\pi; 2\pi k)$$

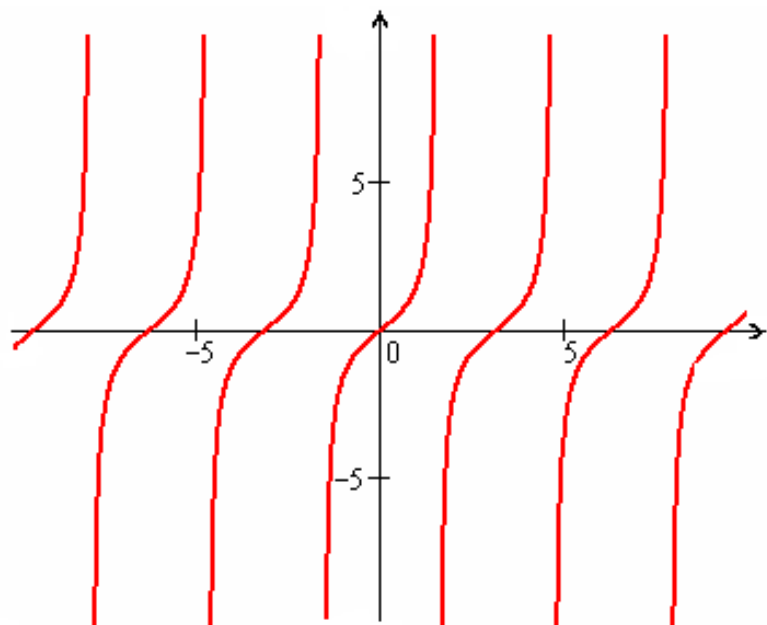
Убывает на

$$(2\pi k; (2k+1)\pi)$$

$$k \in Z$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

ТАНГЕНС $y = \operatorname{tg} x$



Периодическая

$$T = \pi$$

$$D(y) = R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in Z \right\}$$

$$E(y) = R$$

Нечётная

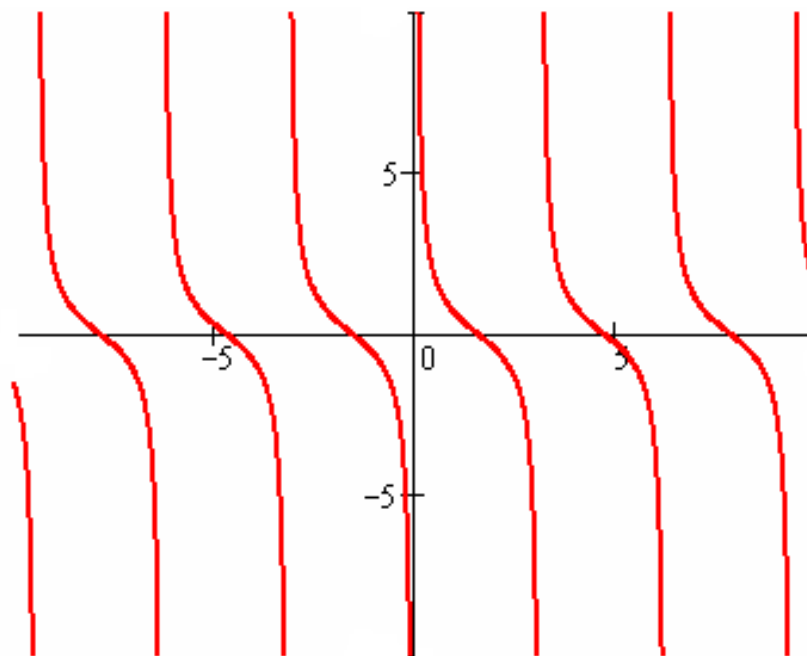
Не ограничена

Возрастает на

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right) \\ k \in Z$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

КОТАНГЕНС $y = \operatorname{ctg} x$



$$D(y) = R \setminus \{\pi k \mid k \in Z\}$$

$$E(y) = R$$

Нечётная

Не ограничена

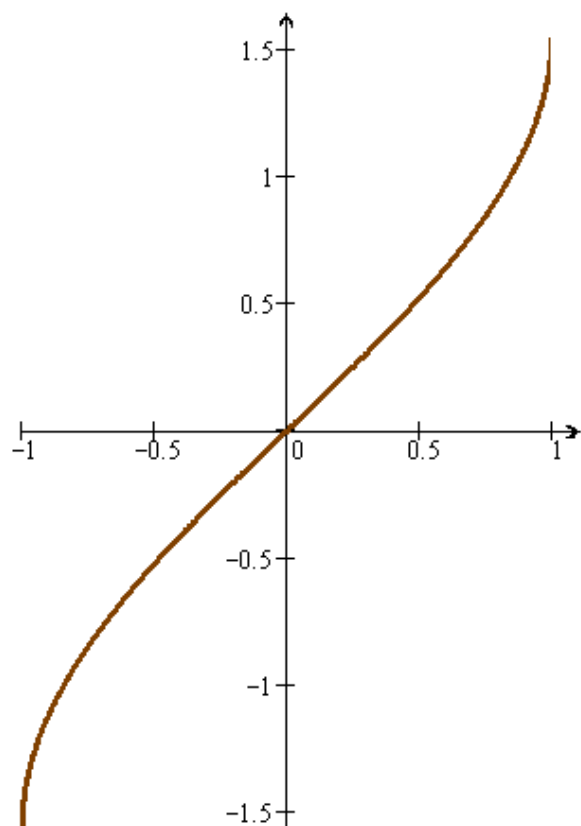
Убывает на $(\pi k; \pi + \pi k)$

$$k \in Z$$

Периодическая $T = \pi$

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

АРКСИНУС $y = \arcsin x$



$$D(y) = [-1; 1]$$

$$E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$$

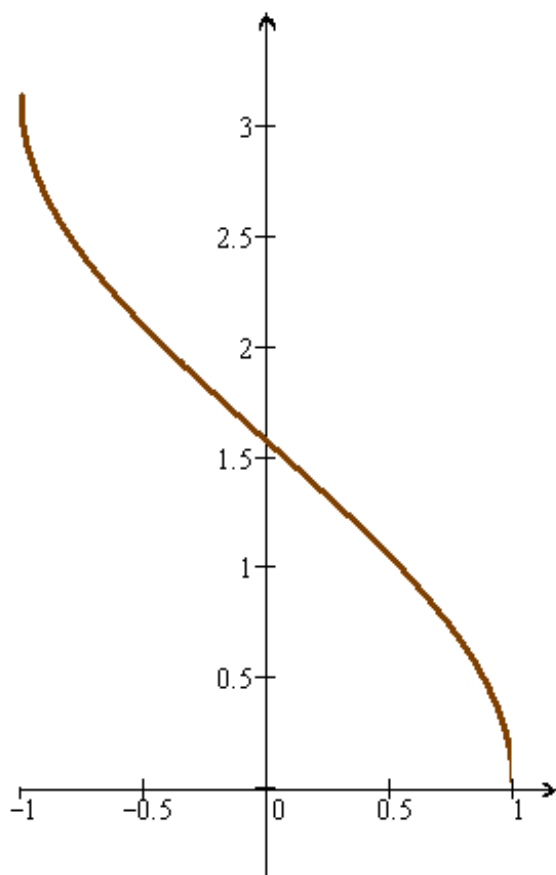
Нечётная

Ограничена $|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}$

Возрастает на $(-1; 1)$

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

АРККОСИНУС $y = \arccos x$



$$D(y) = [-1; 1]$$

$$E(y) = [0; \pi]$$

Ограничена $0 \leq \arccos x \leq \pi$

Убывает на
 $(-1; 1)$

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

АРКТАНГЕНС

$$y = \operatorname{arctg} x$$

$$D(y) = R$$

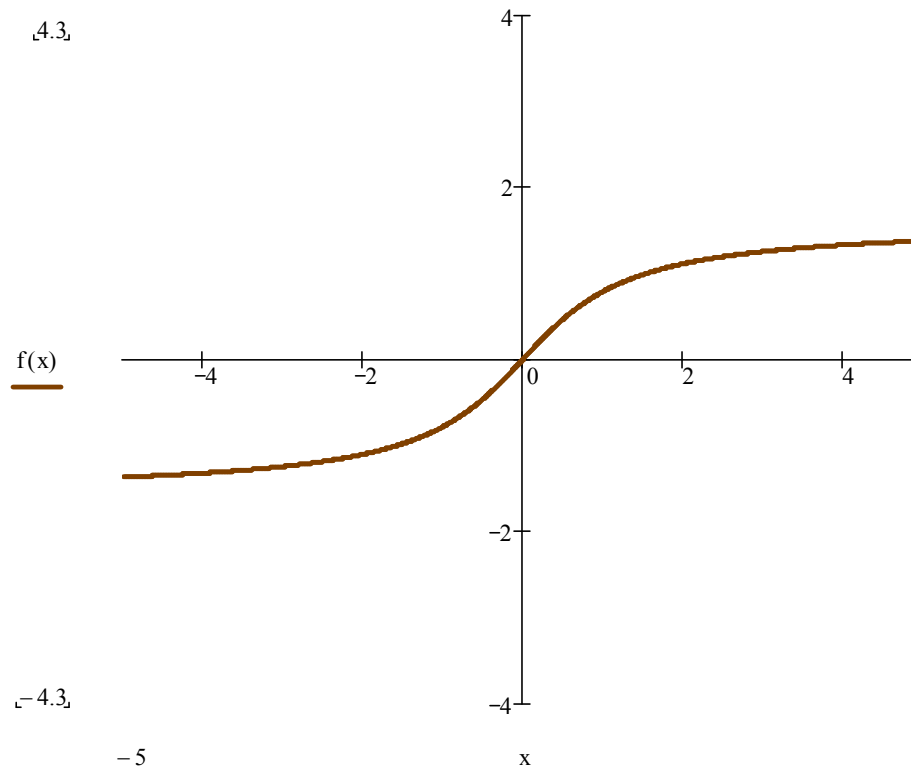
$$E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$$

Нечётная

Ограничена $|\operatorname{arctg} x| < \frac{\pi}{2}$

Возрастает на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$

4.3.



4.3.

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

АРККОТАНГЕНС $y = \operatorname{arcctg} x$

$$D(y) = R$$

$$E(y) = (0; \pi)$$

Ограничена $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$

Убывает на $(0; \pi)$

Основные элементарные функции

СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

$$y = x^{\alpha}$$

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

$$y = a^x \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

$$y = \log_a x$$
$$a > 0, \quad a \neq 1$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

$$y = \sin x$$

$$y = \operatorname{tg} x$$

$$y = \cos x$$

$$y = \operatorname{ctg} x$$

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

$$y = \arcsin x$$

$$y = \operatorname{arctg} x$$

$$y = \arccos x$$

$$y = \operatorname{arcctg} x$$

Элементарной функцией называется функция, которая может быть задана одной формулой $y = f(x)$, где $f(x)$ – выражение, составленное из основных элементарных функций и действительных чисел с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции.

