

## § 13. Прямая в пространстве

### 1. Уравнения прямой в пространстве

Пусть  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  – уравнения любых двух различных плоскостей, содержащих прямую  $l$ .

Тогда координаты любой точки прямой  $l$  удовлетворяют одновременно обоим уравнениям, т.е. являются решениями системы

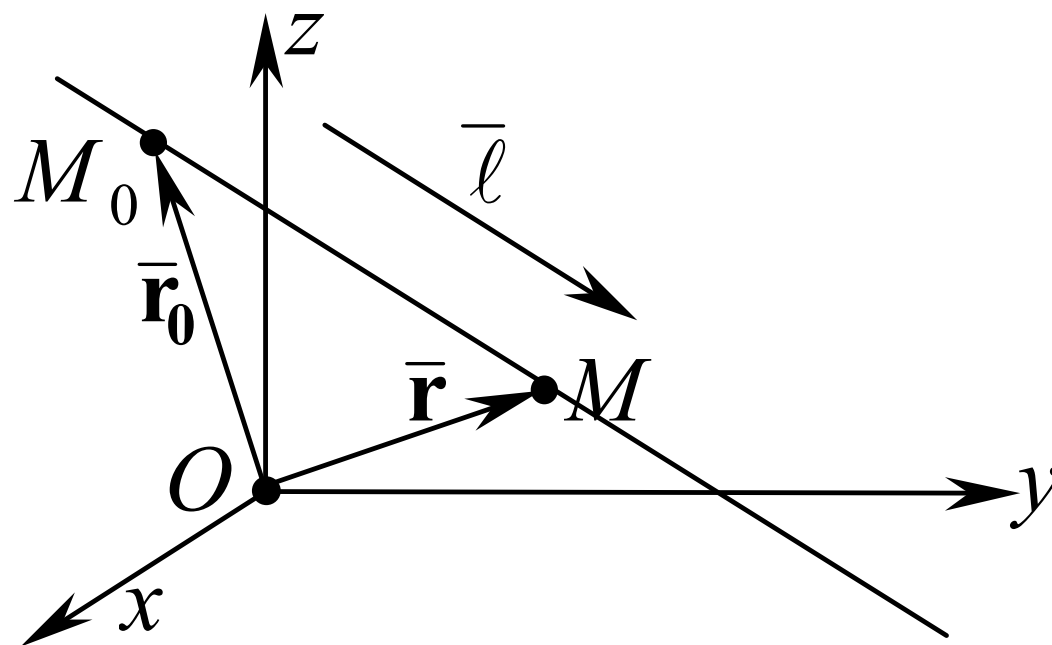
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Систему (1) называют *общими уравнениями прямой в пространстве*.

Другие формы записи уравнений прямой в пространстве – ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ и КАНОНИЧЕСКИЕ уравнения.

ЗАДАЧА 1. Записать уравнение прямой в пространстве, проходящей через точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$ , параллельно вектору  $\bar{\ell} = \{m; n; p\}$

Вектор, параллельный прямой в пространстве, называют **направляющим вектором** этой прямой.



Уравнение  $\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}_0 + t\bar{\ell}$  (2\*)

и систему уравнений 
$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot m, \\ y = y_0 + t \cdot n, \\ z = z_0 + t \cdot p. \end{cases} \quad (2)$$

называют **параметрическими уравнениями прямой в пространстве** (в векторной и координатной форме соответственно).

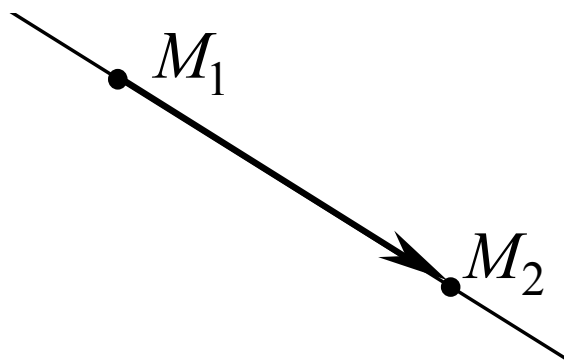
Пусть в задаче 1 вектор  $\bar{\ell}$  не параллелен ни одной из координатных осей (т.е.  $m \neq 0$ ,  $n \neq 0$  и  $p \neq 0$ ).

Уравнения 
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad (3)$$

называют **каноническими уравнениями прямой в пространстве**.

Частным случаем канонических уравнений являются  
УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДВЕ  
ЗАДАННЫЕ ТОЧКИ.

Пусть прямая проходит через точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ .



Уравнения 
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (4)$$

называют **уравнениями прямой, проходящей через две точки**  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ .

## 2. Переход от общих уравнений прямой к каноническим

Пусть прямая  $\ell$  задана общими уравнениями:

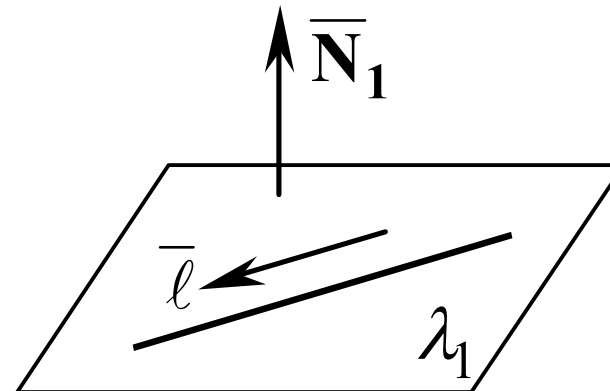
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Чтобы записать канонические (параметрические) уравнения этой прямой, необходимо найти ее направляющий вектор и координаты какой-нибудь точки  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  на прямой.

а) Координаты точки  $M_0$  – это одно из решений системы (1).

б) Направляющий вектор  $\bar{\ell} = [\bar{\mathbf{N}}_1, \bar{\mathbf{N}}_2]$

где  $\bar{\mathbf{N}}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$  и  $\bar{\mathbf{N}}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$  – нормальные векторы к плоскостям  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , уравнения которых входят в общие уравнения прямой.



### 3. Взаимное расположение прямых в пространстве

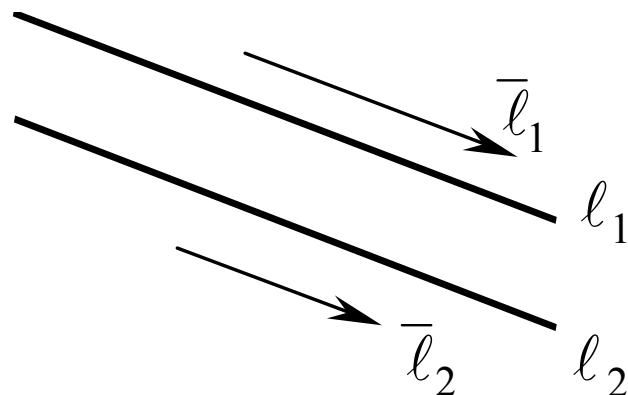
В пространстве две прямые могут:

а) быть параллельны, б) пересекаться, в) скрещиваться.

Пусть прямые  $l_1$  и  $l_2$  заданы каноническими уравнениями:

$$l_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad l_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

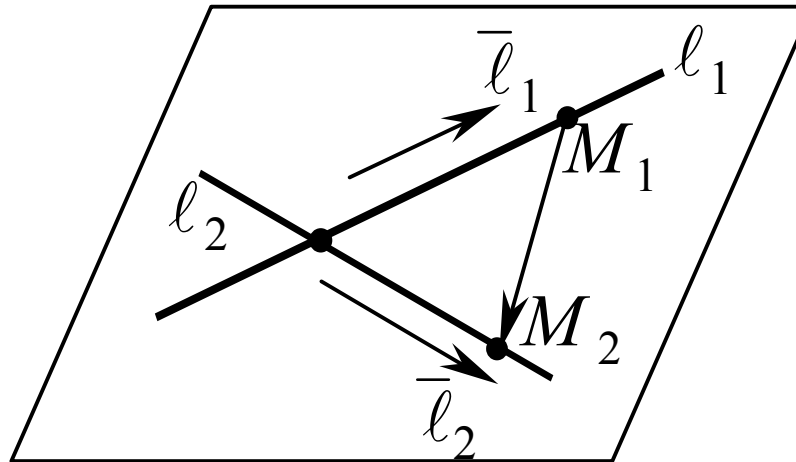
1) Пусть прямые  $l_1$  и  $l_2$  параллельны:



Получаем: *прямые параллельны*  $\Leftrightarrow$  *их направляющие векторы*  $\bar{l}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$  и  $\bar{l}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$  *коллинеарные, т.е. выполняется условие:*

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

2) Пусть прямые  $l_1$  и  $l_2$  пересекаются:



Получили: *прямые  $l_1$  и  $l_2$  пересекаются  $\Leftrightarrow$  они не параллельны и для них выполняется условие  $(\overline{M_1M_2}, \bar{l}_1, \bar{l}_2) = 0$ , (7\*)*  
или, в координатной форме,

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

3) Если для прямых  $l_1$  и  $l_2$  не выполняется условие (6) и (7) ((7\*)), то прямые скрещиваются.

#### 4. Задачи, связанные с возможным взаимным расположением прямых

Возможное расположение прямых в пространстве приводит к следующим задачам:

- 1) параллельные прямые → расстояние между прямыми (т.е. расстояние от точки до прямой)?
- 2) пересекающиеся прямые → а) угол между прямыми?  
б) точка пересечения прямых?
- 3) скрещивающиеся прямые → а) угол между прямыми?  
б) расстояние между прямыми?

Пусть даны 2 прямые:

$$\ell_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \ell_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

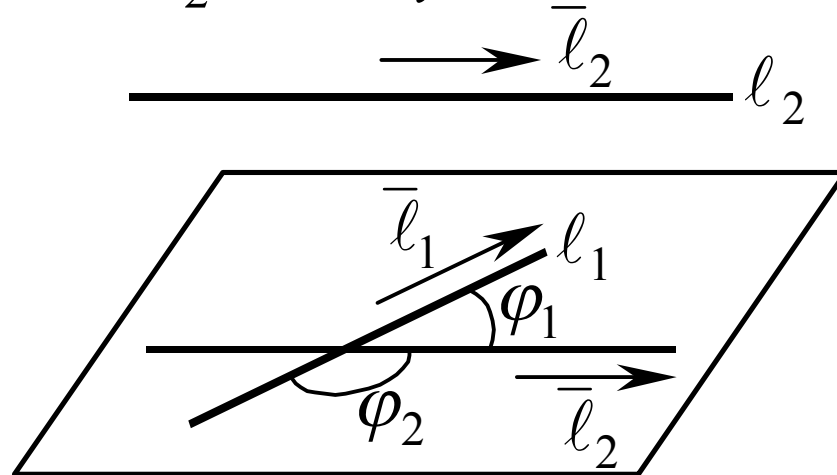
$\vec{\ell}_i = \{m_i; n_i; p_i\}$  – направляющий вектор прямой  $\ell_i$ ,

$$M_i(x_i; y_i; z_i) \in \ell_i \quad (i = 1, 2)$$



ЗАДАЧА 2. Найти угол между пересекающимися (скрещивающимися) прямыми в пространстве.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Углом между двумя скрещивающимися прямыми  $l_1$  и  $l_2$  называется угол между прямой  $l_1$  и проекцией прямой  $l_2$  на любую плоскость, проходящую через прямую  $l_1$ .*



Т.е., угол между скрещивающимися прямыми – это угол между двумя пересекающимися прямыми, параллельными данным.

Получаем:

$$\cos \varphi_{1,2} = \pm \frac{|(\bar{l}_1, \bar{l}_2)|}{|\bar{l}_1| \cdot |\bar{l}_2|} = \pm \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

где знак плюс берется для острого угла, а знак минус – для тупого.

Пусть дана прямая  $\ell: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ ,

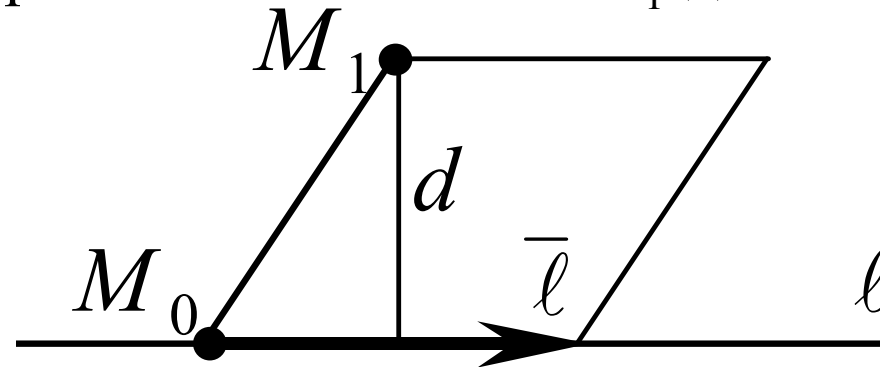
$M_1(x_1; y_1; z_1)$  – точка, не принадлежащая  $\ell$ .

ЗАДАЧА 3. Найти расстояние от точки до прямой в пространстве.

Обозначим:  $\bar{\ell} = \{m; n; p\}$  – направляющий вектор прямой  $\ell$ ,

$M_0(x_0; y_0; z_0)$  – точка на прямой  $\ell$ ,

$d$  – расстояние от точки  $M_1$  до  $\ell$ .



Получаем:

$$d = \frac{|\left[ \bar{\ell}, \overline{M_0 M_1} \right]|}{|\bar{\ell}|}.$$

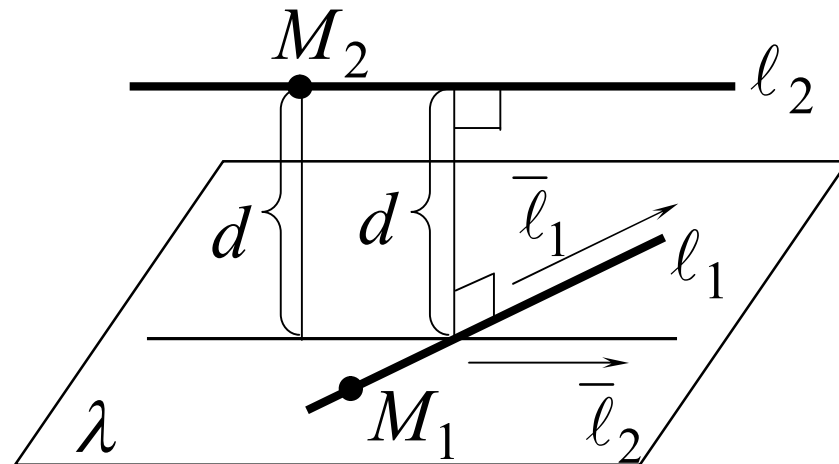
Пусть даны две скрещивающиеся прямые:

$$l_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad l_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

$\vec{l}_i = \{m_i; n_i; p_i\}$  – направляющий вектор прямой  $l_i$ ,  
 $M_i(x_i; y_i; z_i) \in l_i$  ( $i = 1, 2$ ).

ЗАДАЧА 4. Найти расстояние между  $l_1$  и  $l_2$ .

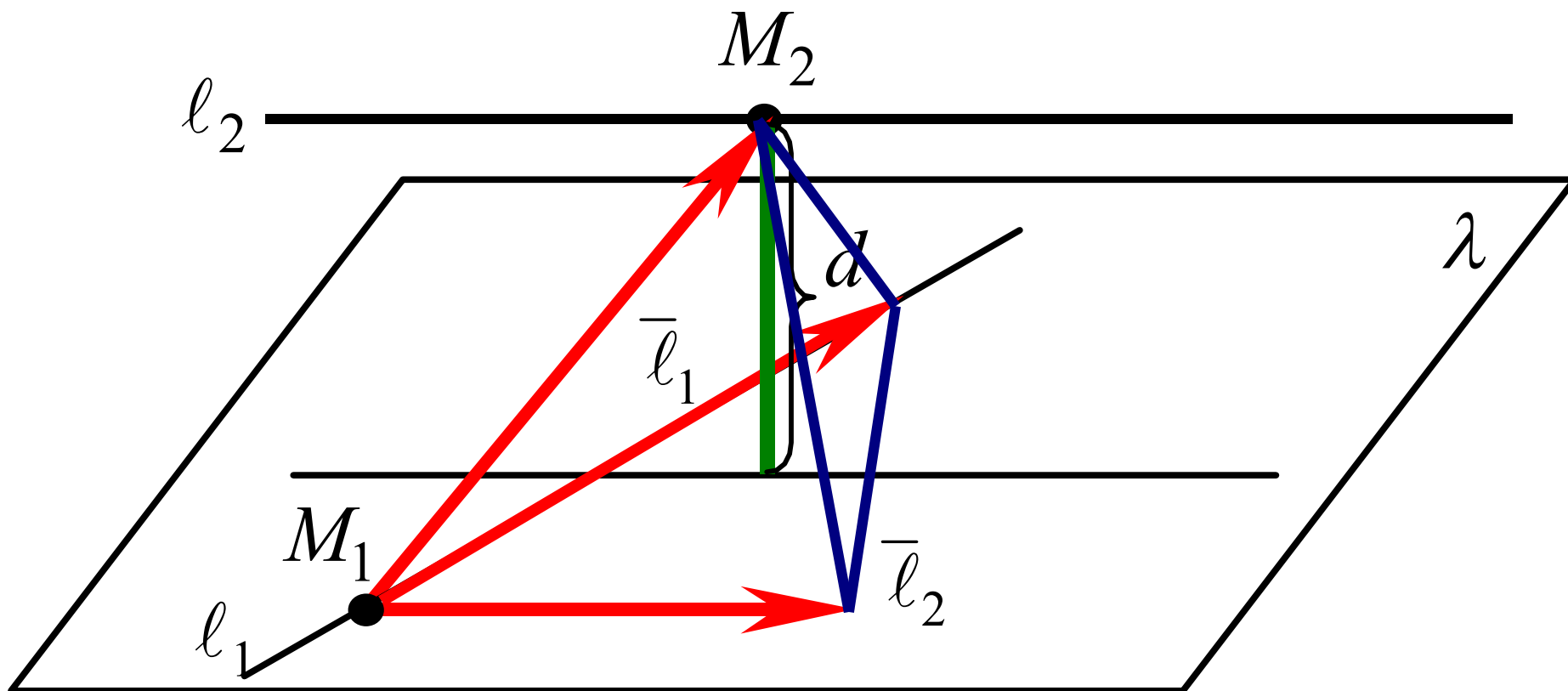
ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми* называется длина их общего перпендикуляра.



Получаем:

$$d = \frac{|Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

где  $Ax + By + Cz + D = 0$  – общее уравнение плоскости  $\lambda$ ,  
 $M_2(x_2; y_2; z_2)$  – любая точка на прямой  $l_2$ .



Тогда  $d$  – высота пирамиды, опущенная из точки  $M_2$ .  
Следовательно:

$$d = \frac{3 \cdot V_{\text{пир}}}{S_{\text{осн}}} = \frac{3 \cdot \frac{1}{6} \cdot |(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \overline{M_1 M_2})|}{\frac{1}{2} \cdot |[\bar{l}_1, \bar{l}_2]|} = \frac{|(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \overline{M_1 M_2})|}{|[\bar{l}_1, \bar{l}_2]|}$$

Пусть даны две пересекающиеся прямые

$$\ell_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \ell_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

ЗАДАЧА 5. Найти точку пересечения прямых.

Пусть  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  – точка пересечения прямых.

Тогда  $(x_0; y_0; z_0)$  – решение системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \\ \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}, \end{array} \right. \quad \text{ИЛИ} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x_1 + t \cdot m_1, \\ y = y_1 + t \cdot n_1, \\ z = z_1 + t \cdot p_1, \\ x = x_2 + \tau \cdot m_2, \\ y = y_2 + \tau \cdot n_2, \\ z = z_2 + \tau \cdot p_2. \end{array} \right.$$

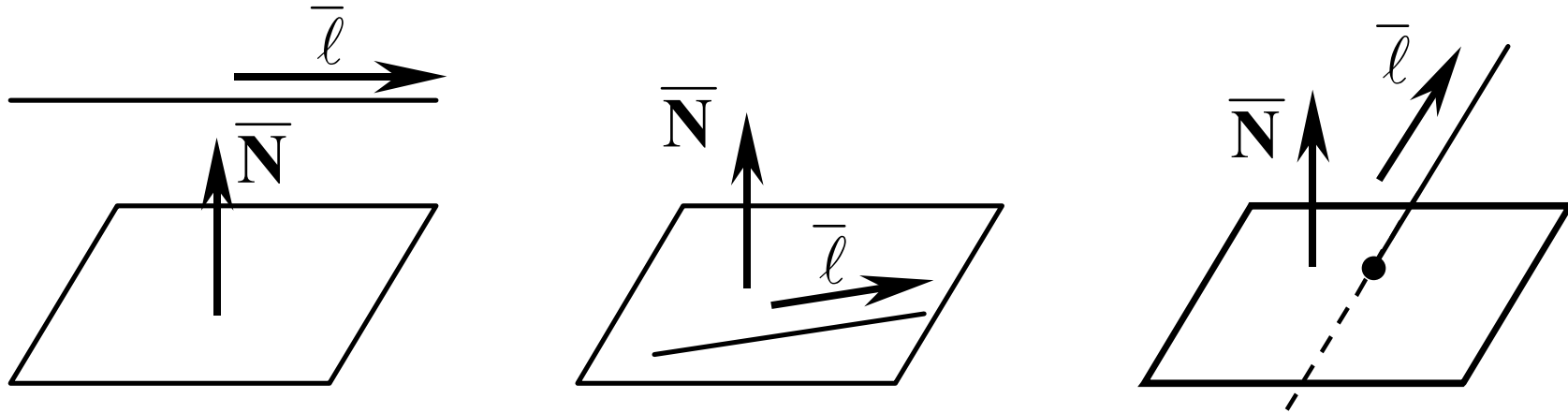
## 5. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть в пространстве заданы плоскость  $\lambda$  и прямая  $\ell$ . Они могут

- 1) быть параллельны;
- 2) прямая может лежать в плоскости;
- 3) прямая и плоскость могут пересекаться в одной точке.

Пусть  $\lambda: Ax + By + Cz + D = 0$  и  $\ell: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ ,

Тогда  $\vec{N} = \{A; B; C\}$  – нормальный вектор плоскости  $\lambda$ ,  
 $\vec{\ell} = \{m; n; p\}$  – направляющий вектор прямой  $\ell$ .



а) Если прямая параллельна плоскости или прямая принадлежит плоскости, то

$$(\bar{N}, \bar{l}) = 0 \quad (10)$$

или в координатной форме

$$At + Bn + Cp = 0 . \quad (11)$$

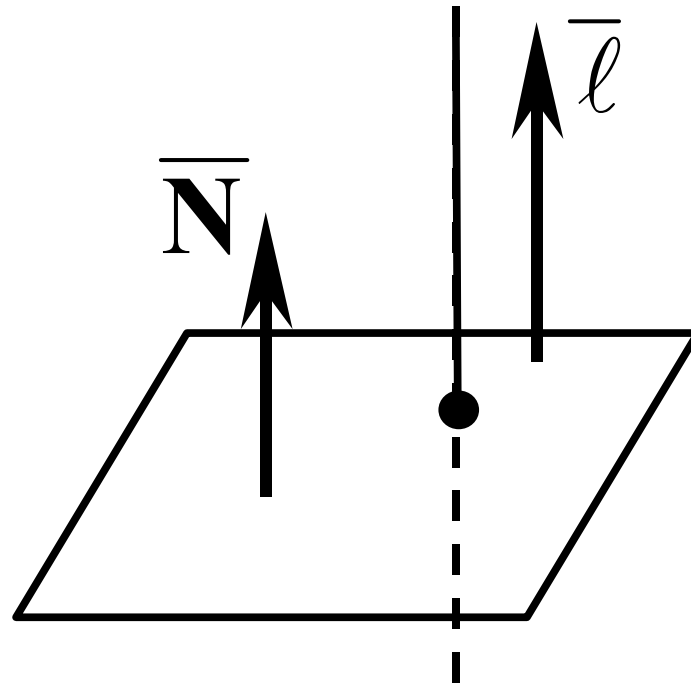
*Если условие (10) (условие (11)) не выполняется, то прямая и плоскость пересекаются в одной точке.*

б) Если прямая принадлежит плоскости, то координаты любой ее точки удовлетворяют уравнению плоскости, и, следовательно, кроме условия (10) ((11)) выполняется условие

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 ,$$

где  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  – любая точка прямой.

Частным случаем пересечения прямой и плоскости в одной точке является перпендикулярность прямой и плоскости

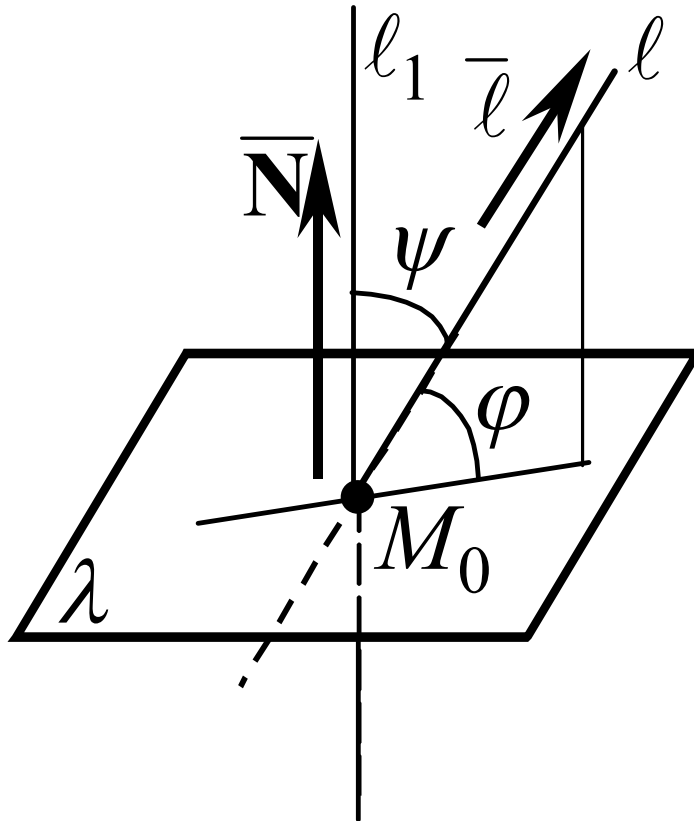


В этом случае  $\bar{\mathbf{N}} \parallel \bar{\ell}$  т.е.  $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$ .



ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Углом между прямой  $l$  и плоскостью  $\lambda$  называется угол  $\varphi$  между прямой  $l$  и ее проекцией на плоскость  $\lambda$ .*

Из определения следует, что угол между прямой и плоскостью всегда острый.



Следовательно,

$$\sin \varphi = \cos \psi = \frac{|(\bar{N}, \bar{l})|}{|\bar{N}| \cdot |\bar{l}|}$$